поступаем в вуз

математика

Г. И. Фалин
А. И. Фалин

Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ

БИНОМ

поступаем в вуз

Г. И. Фалин
А. И. Фалин

Алгебра
на вступительных экзаменах по математике в МГУ

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2006

УДК 51(079)
ББК 22.1
Ф19

Фалин Г. И.

Ф19 Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 367 с.: ил. — (Поступаем в вуз)

ISBN 5-94774-451-1

В книге собрано более 1500 задач по алгебре, предлагавшихся на вступительных испытаниях по математике в Московском государственном университете (как основных, так и предварительных), а также задачи тестов и выпускных экзаменов подготовительного отделения МГУ. Задачи сгруппированы по типам, что позволяет составить представление об основных темах, затрагиваемых на экзаменах, а также об основных методах решения рассматриваемых видов задач. Ко всем задачам даны ответы. Для наиболее характерных задач приведены подробные решения.

Книга будет полезна абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ.

УДК 51(079)
ББК 22.1

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
(495) 157-1902, e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 5-94774-451-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Решения

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено для подготовки к вступительным экзаменам по математике в МГУ. Оно составлено на основе задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова, факультетских олимпиадах (которые фактически являются предварительными экзаменами), задач заочных туров и тестов, а также задач выпускных экзаменов подготовительного отделения.

Задачи вступительных испытаний по математике (как письменных, так и устных) ежегодно публикуются в «Справочнике для поступающих в Московский университет», разнообразных сборниках, регулярно издаваемых механико-математическим факультетом, факультетом вычислительной математики и кибернетики, физическим факультетом, другими факультетами. В этих изданиях задачи письменных экзаменов публикуются в виде вариантов, реально предлагавшихся на вступительных испытаниях, а задачи устных экзаменов публикуются общим списком. В этом виде задачи полезны на заключительном этапе подготовки, когда абитуриент репетирует будущий экзамен. Подготовка к экзамену по математике в строгом смысле этого слова предполагает изучение материала в определенной последовательности. Эта последовательность определяется методическими взглядами преподавателя.

В последние годы появилось несколько сборников задач и пособий для поступающих в МГУ, составленных на базе реальных экзаменационных задач. Эти сборники отражают различные точки зрения авторов на методику подготовки абитуриентов. Наша книга относится к этой группе публикаций.

Задачи, включенные в сборник, сгруппированы таким образом, чтобы читатель мог составить представление об основных темах, затрагиваемых на экзаменах, а также об основных методах решения задач. Ко всем задачам даны ответы.

Следует отметить, что школьная традиция допускает разные формы записи ответов. Например, записи $x \neq 1$, $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ рассматриваются как эквивалентные. На экзамене мы рекомендуем абитуриентам пользоваться теми обозначениями, к которым они привыкли. По этой причине мы сознательно не использовали единую систему при записи ответов.

Для наиболее характерных задач каждого типа (номера этих задач отмечены знаком *) во второй части приведены подробные решения.

Задачи, для которых даны решения, составляют около 10% от общего числа задач, включенных в книгу. Нумерация формул в решениях — своя для каждого решения.

При разборе задач мы старались (насколько это возможно в рамках небольшой книги) показать общие принципы решения и применение общих математических понятий и методов (с тем, чтобы решение не появлялось, как заяц из шляпы фокусника). Это особенно важно для нестандартных задач, которые часто базируются на понятиях и результатах, не входящих в Программу по математике для поступающих в МГУ. Конечно, задачи формулируются так, чтобы формально они соответствовали Программе. Решения, которые публикуются после экзаменов в «официальных» сборниках, также не выходят за рамки этой программы. Однако эти решения часто выглядят искусственно, в то время как введение относительно несложных понятий и методов позволяет дать очень естественное решение, показать взаимосвязь различных задач, повысить математическую культуру абитуриента.

Для каждой задачи мы указываем факультет, на котором она предлагалась, год и месяц, когда проводился экзамен (если в упомянутом году экзамен на этот факультет проводился только в июле, то месяц не указывается), номер задачи в варианте. Для названий факультетов используются обычные университетские сокращения: мех-мат (механико-математический факультет), ВМК (факультет вычислительной математики и кибернетики), физ. (физический факультет), ИСАА (институт стран Азии и Африки) и т. д. Особо отметим следующие сокращения: Севастополь (Черноморский филиал МГУ), ФНМ (факультет наук о материалах; ранее он назывался ВКНМ — высший колледж наук о материалах), ФГУ (факультет государственного управления), ФГП (факультет глобальных процессов), ВШБ (высшая школа бизнеса), МШЭ (московская школа экономики), ФФМ (факультет фундаментальной медицины), МК-МГУ (олимпиада «Покори Воробьевы горы», проводимая МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец»).

Книга будет полезна абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ.

Мы были бы благодарны читателям за советы и пожелания по поводу книги, которые просим направлять по адресу: Москва 119992, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, проф. Г. И. Фалину.

д. ф.-м. н., проф. Г. И. Фалин,

к. ф.-м. н., доцент А. И. Фалин

10 апреля 2006 г.

ЗАДАЧИ

Глава 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Арифметические вычисления с дробями

1* (*психолог., 1984, № 1*). Вычислить, не пользуясь микрокалькулятором:

$$\left(\frac{3\cdot\left(\frac{17}{90}-0{,}125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1{,}8-2\frac{1}{3}:1{,}5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot10^{-2}}{0{,}7}+0{,}3\right).$$

Ответ: 180.

2 (*геолог., 2004, устный*). Сравните числа:

$$2,(004) \quad \text{и} \quad 2{,}005.$$

Ответ: первое число меньше.

3 (*ВМК, 2001, устный*). Что больше: 0,7(621) или $\frac{141}{185}$?

Ответ: числа равны.

4 (*ВМК, 2001, устный*). Сравнить два числа:

$$\frac{7}{33} \quad \text{и} \quad \frac{21212121}{99999999}.$$

Ответ: эти числа равны.

1.2. Многочлены

5* (*ВМК, 2004, устный*). Найти сумму коэффициентов многочлена, который получится после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1-3x+3x^2)^{34}\cdot(1+5x-5x^2)^{249}.$$

Ответ: 1.

6 (*почвовед., 2005, № 5*). Для каких значений параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $(px-7)^{18}$ к его свободному члену минимально?

ОТВЕТ: $p = 7$.

7* (*мех-мат, 1963, устный*). Делится ли многочлен $x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 2$ на $x + 4$ без остатка?

ОТВЕТ: нет.

8 (*ВМК, 2002, устный*). Найдите остаток от деления многочлена

$$x^{2002} + x^{2001} + x^{1002} + x^{1001} + x^2 + x + 1$$

на $x^3 - x$.

ОТВЕТ: $3x^2 + 3x + 1$.

9 (*мех-мат, 2003, март, тест перед олимпиадой, № 1*). Найти остаток от деления числа $n^5 + 2n^4 - 5n^2 - 7n + 2500$ на число $n - 2$ при $n = 2003$.

ОТВЕТ: 529.

10* (*Севастополь, 2003, май, № 5*). Найдите такие числа a и b, что при всех значениях x справедливо равенство

$$(x^2 + 5x + 6)(x + a) = (x^2 - 9)(x + b).$$

ОТВЕТ: $a = -3, \quad b = 2$.

11 (*эконом., 1965, № 4*). Найти все действительные значения p и q, при которых многочлен $x^4 + 1$ делится на многочлен $x^2 + px + q$.

ОТВЕТ: $p = \sqrt{2}, q = 1$ или $p = -\sqrt{2}, q = 1$.

12 (*геолог., 2004, устный*). При каких значениях a и b многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого квадратного трехчлена?

ОТВЕТ: $a = \frac{7}{8}, \quad b = \frac{49}{64}$.

13 (*ВМК, 2005, устный*). Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с 1 дает полный квадрат.

ОТВЕТ: $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

14 (*ВМК, 2002, устный*). Найти три числа p, q и r такие, что равенство

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$$

выполняется для любого значения переменной x.

ОТВЕТ: (1) $p = 1, q = 2, r = -3$; (2) $p = -1, q = -2, r = 3$.

15 (*ВМК, 2002, устный*). Можно ли подобрать числа a, b, c и A, B, C так, что равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$$

является тождеством (выполняется при любых независимых значениях x, y, z)?

Ответ: нет.

16* (*эконом., отд. менеджмента, 2003, № 2*). Про числа x и y известно, что $x + y = 12$, $x \cdot y = 6$. Вычислить значение выражения $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Ответ: 7.

17 (*эконом., 2003, № 2*). Про числа x и y известно, что $x + y = 18$, $x \cdot y = 3$. Вычислить значение выражения $\frac{1}{|x| \cdot x^2} + \frac{1}{y^3}$.

Ответ: 210.

18 (*почвовед., 1999, май, № 4*). Сумма десяти чисел равна нулю, и сумма их попарных произведений равна нулю. Чему равна сумма кубов этих чисел?

Ответ: 0.

19 (*ВМК, 2004, устный*). Пусть числа x, y и a, b такие, что $x + y = a + b$ и $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Выразить через числа a и b сумму $x^n + y^n$, где $n \geqslant 3$ — натуральное.

Ответ: $a^n + b^n$.

1.3. Алгебраические дроби

20 (*Севастополь, 2004, № 1*). Сократите дробь

$$\frac{64x^3 - 27y^6}{9y^4 - 16x^2}.$$

Ответ: $-\dfrac{16x^2 + 12xy^2 + 9y^4}{4x + 3y^2}$.

21* (*геолог., 1998, № 1*). Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2 - 16b^2}{4b + 3a} - \frac{a^2b - 3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3 - b^3}{2a - b}\right).$$

Ответ: -1.

22 (*олимпиада «Ломоносов-2005», апрель, № 1*). Вычислить

$$\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2} - \frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$$

при $x = -3,\underbrace{1\ldots1}_{43}2$, $y = 1,\underbrace{8\ldots88}_{44}$.

Ответ: $(y-x)^3 = 125$.

23 (*ВМК, 2002, устный*). Разложить $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ на два множителя, сумма которых равна $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Доказать единственность этого разложения.

Ответ: $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{b}$.

24 (*ВМК, 2005, устный*). Три числа a, b и c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Доказать, что какие-либо два из них равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Указание: преобразовать данное равенство к виду

$$(a+b)(a+c)(b+c) = 0.$$

25 (*ВМК, 2005, устный*). Для каждой допустимой тройки значений $(a; b; c)$ сравнить значения выражений

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca}$$

и

$$\frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ca}.$$

Ответ: выражения равны.

1.4. Доказательство неравенств

1.4.1. Среднее арифметическое и среднее геометрическое

26* (*ВМК, 2005, устный*). Доказать, что если $b \geqslant -1$, $b \neq 0$, то имеет место неравенство

$$\frac{4b^2+b+1}{4|b|} \geqslant \sqrt{b+1}.$$

27 (*ВМК, 2002, устный*). Сравнить два числа $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ и $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ (a и b — неотрицательные числа, $a \neq b$).

ОТВЕТ: первое число больше.

28 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что для неотрицательных чисел a, b имеет место неравенство

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

29 (*ВМК, 2004, устный*). Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{b+a} \geqslant 3.$$

30 (*ВМК, 2000, устный*). Доказать, что для любых трех положительных чисел x, y и z выполнено неравенство

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

31 (*ВМК, 1999, устный*). Доказать, что если x_1, x_2 и x_3 — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

32 (*ВМК, 1994, устный*). Доказать, что для любых четырех действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 4abcd.$$

33 (*ВМК, 1994, устный*). Известно, что пять положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_5$ связаны соотношением $a_1a_2\cdots a_5=1$. Доказать, что в этом случае справедливо неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_5) \geqslant 32.$$

34 (*ВМК, 1996, устный*). Для положительных чисел a, b, c доказать неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3.$$

35 (*психолог., 1974, № 4*). Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25} \leqslant 13-5b+\frac{1}{2}b^2,$$

и определить, при каких a и b достигается равенство.

1.4.2. Среднее гармоническое

36* (*ВМК, 1990, 1994, 1996, устный*). Доказать, что для любых трех положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

37 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что если положительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c=1$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 9$.

38 (*ВМК, 1994, устный*). Доказать, что для любых четырех положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqslant 16.$$

39 (*ВМК, 2004, устный*). Пусть a, b, c — положительные числа и $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b} \geqslant 4.$$

1.4.3. Неравенство Коши—Буняковского

40* (*ВМК, 2001, устный*). Положительные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 удовлетворяют неравенствам $b_1^2 \leqslant 4a_1c_1$, $b_2^2 \leqslant 4a_2c_2$. Докажите, что

$$4(a_1+a_2+7)(c_1+c_2+2) > (b_1+b_2+1)^2.$$

41 (*ВМК, 2000, устный*). Доказать, что для неотрицательных чисел a, b и c имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

42 (*физ., 1958*). Доказать, что если $a>0$ и $b>0$, то для любых x и y справедливо неравенство

$$a\cdot 2^x+b\cdot 3^y+1 \leqslant \sqrt{4^x+9^y+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}.$$

43 (*ВМК, 1996, устный*). Сумма четырех чисел равна 2. Доказать, что сумма их квадратов не меньше 1.

44 (*ВМК, 1992, устный*). Доказать, что если $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, то $|ac-bd| \leqslant 1$.

45 (*мех-мат, 1958*). Доказать, что если $x^2 + y^2 = 1$, то справедливо неравенство
$$-\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant \sqrt{2}.$$

1.4.4. Неравенство треугольника

46* (*ВМК, 2005, устный*). Доказать, что при любых x, y, z выполняется неравенство
$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geqslant \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

47 (*ВМК, 1996, устный*). Доказать, что для любых положительных чисел a, b и c
$$\sqrt{a^2 + c^2 - ac} \geqslant \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc}.$$

48 (*ВМК, 1996, устный*). Доказать, что для любых положительных чисел a, b и c
$$\sqrt{a^2 + b^2 + ab} - \sqrt{a^2 + c^2} \leqslant \sqrt{b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc}.$$

1.4.5. Неравенство Бернулли

49* (*ВМК, 2000, 2003, устный*). Доказать справедливость неравенства
$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$$
при условии, что $a + b + c = 1$, $4a + 1 \geqslant 0$, $4b + 1 \geqslant 0$ и $4c + 1 \geqslant 0$.

50 (*ВМК, 1997, устный*). Доказать, что
$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} \leqslant 4,$$
если $x + y = 1$, $x \geqslant -\frac{1}{4}$, $y \geqslant -\frac{1}{4}$.

1.4.6. Прочее

51 (*ВМК, 2000, 2002, 2003, устный*). Доказать справедливость неравенства
$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leqslant \frac{3}{2}$$
для любых действительных чисел a, b и c.

52* (*психолог., 1969, № 5*). Доказать, что
$$x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz > 0,$$
если $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.

53 (*ВМК, 1999, устный*). Пусть $a+b=2$. Доказать, что $a^3+b^3 \geqslant 2$.

54 (*ВМК, 2003, устный*). Положительные числа a и b таковы, что $a+b \geqslant 2$. Доказать, что $a^3+b^3 \geqslant 2$.

55 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$, если $a+b \geqslant 1$.

56 (*мех-мат, 1962*). Пусть a и b — произвольные числа, причем $a+b=2$. Доказать, что $a^4+b^4 \geqslant 2$.

57 (*мех-мат, 1963, № 4*). Доказать, что при любых положительных a и b и любом натуральном n справедливо неравенство

$$(a+b)^n < 2^n(a^n+b^n).$$

58 (*ВМК, 2000, 2001, 2002, устный*). Доказать, что если x, y, z — действительные числа, удовлетворяющие равенствам $x+y+z=5$ и $xy+xz+yz=8$, то $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$, $1 \leqslant y \leqslant \frac{7}{3}$, $1 \leqslant z \leqslant \frac{7}{3}$.

59 (*ВМК, 2003, устный*). Три положительных числа a, b и c таковы, что $ab+ac+bc \geqslant 12$. Доказать, что $a+b+c \geqslant 6$.

60 (*ВМК, 2003, устный*). Пусть $a>b>c$. Доказать, что

$$a^2b+b^2c+c^2a > a^2c+c^2b+b^2a.$$

61 (*ВМК, 2004, устный*). Пусть a и b — положительные числа. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2} \leqslant \frac{a^6+b^6}{2}.$$

62 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что для любых положительных a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

63 (*ВМК, 2002, устный*). Доказать, что если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant x_5 > 0,$$

то

$$x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2+x_5^2 \geqslant (x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)^2.$$

64 (*ВМК, 1999, устный*). Сравнить числа a и b, если известно, что $5(a-1)=a^2+b$.

65 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что при $a \geqslant 1$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}.$$

66 (*ВМК, 1994, устный*). Известно, что три положительных числа a, b, c связаны соотношением $a + b = c$. Доказать, что

$$a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} > c^{\frac{3}{4}}.$$

67 (*ВМК, 1990, устный*). Доказать, что для всех x верно неравенство $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.

1.5. Радикалы

68 (*геолог., 1994, май, № 2*). Упростить до численного значения выражение

$$\frac{7\sqrt{3}\sqrt{a} - 7\sqrt{5}\sqrt{b}}{6\sqrt{3}\sqrt{a} + 6\sqrt{5}\sqrt{b}} : \frac{3a - 5b}{9a + 15b + 6\sqrt{15ab}}.$$

Ответ: $\frac{7}{2}$.

69 (*биолог., отд. почвоведения, 1971, № 2*). Упростить выражение

$$(2a - b)^2 \cdot \left(\frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1} + 2\sqrt{2}a^{-1/2}b^{-1/2} + 2b^{-1}} + \frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1} - 2\sqrt{2}a^{-1/2}b^{-1/2} + 2b^{-1}}\right).$$

Ответ: $2(b + 2a)$.

70 (*геолог., отд. общей геологии, 1970, № 1*). Упростить выражение

$$\frac{\left(b^{5/6}a^{-1/6} + b^{1/3}a^{1/3}\right)^2 + \left(b^{5/6}a^{-1/6} - b^{1/3}a^{1/3}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}} - \sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab}\right)} - 2a + \frac{4a^2}{a - b}.$$

Ответ: $2(a + b)$.

71* (*почвовед., 1998, май, № 1*). Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{b}{4a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

72 (*ИСАА, 1999, № 2*). Упростить выражение при $a > b > 0$:

$$A = \frac{3ab - b\sqrt{ab} + a\sqrt{ab} - 3b^2}{\sqrt{2^{-2} \cdot (ab^{-1} + a^{-1}b) - 0{,}5}} - 2ab - 6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $A = 0$.

73 (*почвовед., 1996, № 1*). Докажите, что число

$$\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$$

целое, и найдите это число.

Ответ: 47.

74 (*почвовед., 2002, № 3*). Пусть $a=\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{50}$. Доказать, что число a^3-30a целое, и найти его.

Ответ: это число равно 70.

75 (*почвовед., 2004, май, № 2*). Пусть $a=\sqrt{10}-\sqrt{11}$. Доказать, что число $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ является целым.

Ответ: это число равно 42.

76 (*геолог., 1994, № 2*). Упростить до целого числа выражение

$$2\,\frac{\sqrt{6+2\sqrt5}}{\sqrt{6-2\sqrt5}}-\frac{\sqrt{7+\sqrt5}}{\sqrt{7-\sqrt5}}\cdot 2\sqrt{11}.$$

Ответ: -4.

77 (*мех-мат, 1978, № 1*). Разность

$$\sqrt{|40\sqrt2-57|}-\sqrt{40\sqrt2+57}$$

является целым числом. Найдите это целое число.

Ответ: -10.

78* (*мех-мат, 1996, устный*). Является ли рациональным число

$$\sqrt{3-\sqrt{4+\sqrt{12}}}+\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}?$$

Ответ: нет; это число равно $\sqrt6$.

79 (*ВМК, 1995, устный*). Доказать тождество

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt2}+\sqrt[3]{20-14\sqrt2}=4.$$

Указание: $20\pm14\sqrt2=(2\pm\sqrt2)^3$.

80 (*ВМК, 1995, устный*). Доказать тождество

$$\sqrt[3]{2+\sqrt5}+\sqrt[3]{2-\sqrt5}=1.$$

Указание: $\sqrt5\pm2=\left(\dfrac{\sqrt5}{2}\pm\dfrac12\right)^3$.

81 (*ВМК, 1999, устный*). Сравнить $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ и 1.

ОТВЕТ: числа равны.

82 (*ВМК, 2000, устный*). Является ли число

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

целым?

ОТВЕТ: да; это число равно 4.

83 (*геолог., 1997, № 1*). Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{6}(x^2+2)+2x\sqrt{5}=\sqrt[4]{35}(x^2-2)+2x\sqrt{7}?$$

ОТВЕТ: 1.

84 (*геолог., 1999, № 2*). Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения

$$2x^2-(\sqrt{3}+5)x-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=0.$$

Найти значение $A=x_1+x_1x_2+x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или 1,999?

ОТВЕТ: $A=2$; $A>1{,}999$.

85 (*ВМК, 1992, № 1*). Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$ больше?

ОТВЕТ: второе.

86 (*геолог., 2004, устный*). Сравните числа $\sqrt{2002}+\sqrt{2004}$ и $2\sqrt{2003}$.

ОТВЕТ: первое число меньше.

87 (*геолог., 2005, устный*). Сравните числа $\sqrt{2006}+\sqrt{2004}$ и $2\sqrt{2005}$.

ОТВЕТ: первое число меньше.

88 (*геолог., 2000, устный*). Сравнить по величине числа

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ и } \sqrt{6}.$$

ОТВЕТ: числа равны.

89 (*геолог., 2004, устный*). Сравните числа $\frac{12}{25}$ и $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}$.

ОТВЕТ: первое число меньше.

90 (*ВМК, 1994, устный*). Какое из двух чисел больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[4]{4}$?

ОТВЕТ: второе.

91 (*эконом., 1988, № 1*). Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ или 3?

ОТВЕТ: первое.

92 (*ВМК, 1996, устный*). Что больше:

$$\sqrt{10+\sqrt{56}+\sqrt{28}+\sqrt{8}} \qquad \text{или} \qquad \sqrt{7}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}?$$

ОТВЕТ: второе число больше.

93 (*ВМК, 1996, устный*). Что больше:

$$\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}} \qquad \text{или} \qquad \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}?$$

ОТВЕТ: второе число больше.

94 (*ВМК, 2005, устный*). Упорядочить по величине три числа:

$$\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}, \quad \sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12} \quad \text{и} \quad \sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}.$$

ОТВЕТ: $\sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}<\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}<\sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}$.

95 (*ВМК, 2005, устный*). Докажите, что в представлении в виде десятичной дроби числа $\left(\sqrt{26}+5\right)^{99}$ первые 98 цифр справа после запятой равны нулю.

1.6. Степени

96 (*Севастополь, 2005, № 1*). Сравните числа

$$10^5 \qquad \text{и} \qquad \left(-\frac{1}{16}\right)^{-2}\cdot 2^{-3}\cdot 5^5.$$

ОТВЕТ: числа равны.

97 (*ВМК, 2002, устный*). Сравнить 18^{20} и 63^{13}.

ОТВЕТ: первое число больше.

98* (*ВМК, 2004, устный*). Сравнить два числа: 31^{11} и 17^{14}.

ОТВЕТ: второе число больше.

1.7. Логарифмы

99 (*ВМК, 2002, устный*). Вычислить

$$\log_{15}20\cdot\log_{16}15\cdot\log_{17}16\cdot\log_{18}17\cdot\log_{19}18\cdot\log_{20}19.$$

ОТВЕТ: 1.

100 (*ВМК, 2003, устный*). Вычислить

$$\log_{14} 19 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18.$$

Ответ: 1.

101 (*геолог., 2004, устный*). Вычислите значение

$$3^{\frac{\lg \lg 2}{\lg 3}}.$$

Ответ: $\lg 2$.

102 (*геолог., 2005, устный*). Вычислите значение

$$2005^{\frac{\lg \log_2 64}{\lg 2005}}.$$

Ответ: 6.

103* (*мех-мат, 2003, март, тест перед олимпиадой, № 3*). Вычислить $7^{1-\sqrt[5]{\log_7^3 2}} \cdot 2^{2+\sqrt[5]{\log_2^2 7}}$.

Ответ: 28.

104 (*фил., 1988, № 1*). Вычислить

$$\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}.$$

Ответ: 2.

105* (*эконом., 1989, № 2*). Вычислить

$$\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}.$$

Ответ: 1.

106 (*ВМК, 1996, устный*). Вычислить

$$\frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2}.$$

Ответ: 2.

107 (*географ., 1973, № 2*). Упростить выражение

$$5^{\log_{1/5}\left(\frac{1}{2}\right)} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} + \log_{1/2} \frac{1}{10+2\sqrt{21}}.$$

Ответ: 6.

108 (*ВМК, 2000, 2002, устный*). Вычислить

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right) \cdot \log_{\sqrt{6}+1} \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \log_{2\sqrt{6}+7} \left(2\sqrt{6}+5\right).$$

Ответ: -1.

109 (*ВМК, 1984, № 1*). Известно, что $\log_a b = 7$. Найти $\log_b(a^2b)$.

Ответ: $\frac{9}{7}$.

110 (*физ., 1982, № 3*). Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислить

$$\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right).$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

111 (*биолог., 1994, № 2*). Вычислить

$$\log_{b^3\cdot\sqrt[7]{a^5}}\left(\frac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}\right),$$

если $\log_b a = \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}-21}{42+10\sqrt{3}}$.

112 (*Севастополь, 2003, № 4*). Найдите $\log_{54} 84$, если $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b$.

Ответ: $\frac{a+1}{a(8-5b)}$.

113 (*мех-мат, 1992, № 3*). Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y$, $q = \log_x y$. Найти число

$$\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3}\sqrt{xyz}.$$

Ответ: $\frac{p+q+pq}{6(p+q-2pq)}$, если p и q не равны нулю (p и q могут быть равны 0 только одновременно); $\frac{1}{6}$, если $p = q = 0$.

114 (*мех-мат, 1996, май, № 2*). Вычислить

$$\log^2_{\frac{x}{y}} x + \log^2_{\frac{y}{x}} y,$$

если

$$\log_{\frac{x}{y}}\left(x^9\right) = \log_{\sqrt{y}}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ответ: $\frac{5}{9}$.

115 (*мех-мат, 1999, март, № 3*). Известно, что для некоторой тройки чисел x, y, z $(x \neq y)$ выражения

$$\log_{x^5y^2z}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{z}\right)$$

и

$$\log_{x^2y^5z}\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$$

равны одному и тому же числу. Найдите это число.

Ответ: $\dfrac{1}{18}$.

116 (*мех-мат, 2005, № 2*). Найти $\log_2 \dfrac{2x}{2^x}$ при условии

$$\left|\log_{\sqrt{2}} x^{x/2} - 2\log_2 x\right| + \left||2-x| - |\log_2 x|\right| \leqslant (x-2)\log_8 x^3.$$

Ответ: -1.

117 (*ВМК, 2005, устный*). Доказать, что если числа

$$\log_k x,\ \log_m x,\ \log_n x \qquad (x \neq 1)$$

образуют арифметическую прогрессию, то $n^2 = (kn)^{\log_k m}$.

118 (*ВМК, 2001, устный*). Известно, что $a^2 + b^2 = 7ab$. Доказать, что

$$\ln\frac{a+b}{3} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

(здесь $a > 0$ и $b > 0$).

119 (*ВМК, 1991, устный*). Выразить $\lg 2$ и $\lg 5$ через произведение $a = \lg 2 \cdot \lg 5$.

Ответ: $\lg 2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$; $\lg 5 = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$.

120 (*геолог., 2005, устный*). Сравните числа $2005^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2005}}$ и $\dfrac{3}{2}$.

Ответ: первое число меньше.

121 (*ВМК, 1982, № 1*). Какое из двух чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5 + \log_{1/2} 9}$.

Ответ: первое.

122 (*биолог., 1994, № 2*). Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{11} \text{ или } 9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2}?$$

Ответ обосновать.

Ответ: второе.

123 (*геолог., отд. геофизики, 1989, № 1*). Определить, какое из двух чисел больше: $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$ или $3\log_8 26$. Ответ должен быть обоснован.

ОТВЕТ: второе.

124 (*ВМК, 2004, устный*). Сравнить числа $3^{\sqrt{\log_3 5}}$ и $5^{\sqrt{\log_5 3}}$.

ОТВЕТ: числа равны.

125 (*геолог., отд. общей геологии, 1985, № 1*). Определить, какое из двух чисел больше: $2^{\log_3 5}-0{,}1$ или $5^{\log_3 2}$. Результат обосновать.

ОТВЕТ: второе.

126 (*геолог., отд. геофизики, 1985, № 1*). Определить, какое из двух чисел больше: $3^{\log_2 5}+10^{\frac{1}{3}\lg 2}$ или $5^{\log_2 3}+\sqrt[10]{10}$. Результат обосновать.

ОТВЕТ: первое.

127 (*ВМК, 1999, устный*). Что больше: $9^{\log_2 5}+5^{\log_3 2}$ или $4^{\log_3 5}+5^{\log_2 3}$?

ОТВЕТ: первое число больше.

128 (*эконом., 1990, № 1*). Имеют ли общие точки область значений функции $f(x)=\sqrt{3}+2\sqrt{2}x-2x^2$ и промежуток $[\log_3 15;+\infty)$? Ответ обосновать.

ОТВЕТ: имеют.

129 (*психолог., 1994, № 1*). Верно ли неравенство

$$3\cdot\log_2 5<\sqrt{9\log_2 5+28}\ ?$$

(Таблицами и калькулятором не пользоваться.)

ОТВЕТ: да.

130 (*ВМК, 1997, устный*). Что больше: $\left(\log_3\frac{9}{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\log_3 5+\frac{1}{2}}$ или $\frac{1}{2}\sqrt{18}$?

ОТВЕТ: первое число больше.

131 (*ВМК, 1997, устный*). Что больше: $\sqrt{5-\log_2 9}+\left(\log_2\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{6-\log_2 3}$?

ОТВЕТ: первое число больше.

132 (*ВМК, 2002, устный; геолог., 2004, устный*). Сравните два числа: $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$.

Ответ: $\log_5 3 > \frac{2}{3}$.

133 (*геолог., 2004, устный*). Сравните числа $\log_3 5$ и $\frac{3}{2}$.

Ответ: $\log_3 5 < \frac{3}{2}$.

134 (*ВМК, 1996, устный*). Сравнить два числа: $\log_2 3$ и $\sqrt{2}$.

Ответ: $\log_2 3 > \sqrt{2}$.

135 (*фил., 1969, № 6*). Без использования таблиц доказать, что $\log_2 3 > \log_3 5$.

136 (*психолог., 1969, № 3*). Доказать, не пользуясь десятичными дробями, что

$$\log_2 5 > \log_5 32.$$

137 (*ВМК, 1994, 1999, устный*). Определить, какое из чисел больше: $\log_4 9$ или $\log_9 25$.

Ответ: первое.

138 (*ВМК, 1994, устный*). Определить, какое из чисел больше: $\log_3 72$ или $\log_2 20$.

Ответ: второе.

139 (*ВМК, 2000, 2002, 2003, устный*). Что больше: $\log_{\log_3 2} 0{,}5$ или $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}$?

Ответ: первое число больше.

140 (*ВМК, 1996, 1999, устный*). Имеет ли смысл выражение

$$\sqrt{\log_2 3 - \log_5 11}\,?$$

Ответ: да.

141 (*ВМК, 2001, устный*). Какое из чисел больше: $\log_{135} 675$ или $\log_{45} 75$?

Ответ: первое.

142* (*ВМК, 2000, устный*). Что больше: $\lg 7 \cdot \lg 13$ или 1?

Ответ: 1 больше.

143 (*ВМК, 2003, устный*). Что больше: $\log_{18} 19$ или $\log_{19} 20$?

Ответ: $\log_{18} 19$.

144 (*геолог., 2004, устный*). Сравните числа $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 2}$ и 2.

ОТВЕТ: первое число больше.

145 (*ВМК, 2001, устный*). Сравнить два числа: $\log_3 10 + 4\lg 3$ и 4.

ОТВЕТ: $\log_3 10 + 4\lg 3 > 4$.

146 (*ВМК, 1994, устный*). Сколько цифр содержит десятичная запись числа 2^{500}, если известно, что $0.3010 < \lg 2 < 0.3011$?

ОТВЕТ: 151.

147 (*ВМК, 2002, устный*). Сколько цифр в числе 5^{800} (в десятичной системе)?

ОТВЕТ: 560 цифр; нужно доказать, что $10^{559} \leqslant 5^{800} < 10^{560}$.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ

2.1. Рациональные уравнения

2.1.1. Целые рациональные (алгебраические) уравнения

Линейные уравнения

148* (*ВМК, 2004, № 1*). Решить уравнение

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-3\cos\left(\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})\right)+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)\cdot x=2^{\log_{\sqrt{2}}3}-9.$$

Ответ: $\mathbb{R}$.

Квадратные уравнения

149* (*почвовед., 2005, № 1*). Решить уравнение

$$(6x-15)^7=(x-1)^{14}.$$

Ответ: $x=4$.

150* (*ВМК, 1996, устный*). Найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению

$$2x^2+13y^2-10xy-2x+4y+1=0.$$

Ответ: $(3;1)$.

151 (*ВМК, 1996, устный*). Найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие соотношению

$$5x^2+5y^2+8xy-12x-6y+9=0.$$

Ответ: $(2;-1)$.

152 (*ВМК, 2004, устный*). Найти все x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

Ответ: $x=1; y=-1$.

Уравнения высших степеней

Поиск корней

153* (*Севастополь, 2005, № 4*). Решите уравнение

$$x^3 + 4x^2 = 5.$$

Ответ: $\left\{1; \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

154 (*ВМК, 2003, устный*). При каких натуральных n уравнение

$$2x^4 - x^3 + nx^2 - 1 = 0$$

имеет рациональные корни?

Ответ: 3; 4.

155 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение

$$x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + 2 = 0.$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{2}; x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$.

Группировка

156 (*ВМК, 2000, 2005, устный*). Решить уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999.$$

Ответ: $x_1 = -9; x_2 = 11$.

157 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = -\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

158 (*ВМК, 2002, устный*). Решить уравнение

$$8x^3 + 36x^2 + 54x + 33 = 0.$$

Ответ: $x = -\dfrac{3+\sqrt[3]{6}}{2}$.

Метод неопределенных коэффициентов

159* (*хим., 2000, заочный тур, № 2*). Решить уравнение

$$(x^2+3x-2)^2 + 3\cdot(x^2+3x-2) - 2 = x.$$

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$.

Тригонометрические подстановки

160* (*биолог., 1985, № 5*). Сколько корней на отрезке $[0;1]$ имеет уравнение

$$8x\cdot(2x^2-1)\cdot(8x^4-8x^2+1)=1?$$

Ответ: три корня: $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$, $x_2=\cos\frac{2\pi}{7}$, $x_3=\frac{1}{2}$.

Метод оценок

161 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=0.$$

Ответ: $\varnothing$.

Графические методы

162 (*почвовед., 2000, май, № 6*). Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x)=8x-x^2$ при $x\in[0;8]$. Решите уравнение

$$f(2x+16)+23=5f(x).$$

Ответ: $1+8n$, $7+8m$, где $n,m\in\mathbb{Z}$.

163 (*эконом., отд. менеджмента, 1997, № 5*). Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4, и на промежутке $0\leqslant x\leqslant 2$ ее значения вычисляются по правилу $f(x)=1-|x-1|$. Решить уравнение

$$2f(x)\cdot f(x-8)+5f(x+12)+2=0.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}+4n$, $-\frac{1}{2}+4m$, где $n,m\in\mathbb{Z}$.

Теорема Виета

164 (*ВМК, 1994, устный*). Квадратное уравнение $x^2+px-q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти $x_1^3+x_2^3$.

Ответ: $-p^3-3pq$.

165 (*ВМК, 1994, устный*). Квадратное уравнение $x^2-px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти $x_1^4+x_2^4$.

Ответ: $p^4-4p^2q+2q^2$.

166 (*ВМК, 1994, 1999, устный*). Квадратное уравнение $x^2+px-q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти $\left(x_1^2-x_2^2\right)^2$.

Ответ: p^4+4p^2q.

167* (*мех-мат, олимпиада, 2002, 10 кл., № 4*). Доказать, что если некоторая прямая пересекает график функции $y(x) = ax^3+bx+c$ ровно в трех точках, сумма ординат которых равна 0, то эта прямая проходит через начало координат.

168 (*МК-МГУ, 2006, № 6*). Некоторая прямая пересекает график функции $y(x) = ax^3+bx+c$ ровно в трех различных точках, сумма ординат которых равна 6. В какой точке эта прямая пересекает ось ординат?

Ответ: $(0; 2)$.

169 (*ВМК, устный, 2001*). Найдите уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корень $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Ответ: например, $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$.

170 (*ВМК, устный, 2004*). Найти хотя бы один многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{7} - \sqrt{3}$.

Ответ: например, $x^4 - 20x^2 + 16$.

2.1.2. Дробно-рациональные уравнения

171 (*почвовед., 2000, май, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{x^{17}-1}{1-x^{15}} = \frac{1-x^{15}}{x^{13}-1}.$$

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$.

172* (*биолог., 1985, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x+3)} = 3.$$

Ответ: $x = 0$.

173 (*геолог., 2000, май, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

Ответ: $x_1 = -1; x_2 = 4$.

174 (*соц., 2004, апрель, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 10x - 3(x^2 + 7x) - 30}{\sqrt{x+2}} = 0.$$

Ответ: $x = 3$.

2.1.3. Уравнения, включающие функции $[x]$ и $\{x\}$

175* (*ВМК, 1996, устный*). Решить уравнение

$$x + [10x] = 10x.$$

Ответ: $x_n = \frac{n}{9}$, $n = 0,1,\ldots,8$.

176 (*ВМК, 1996, устный*). Сколько решений имеет уравнение

$$x + [100x] = 100x?$$

Ответ: 100; $x_n = \frac{n}{99}$, $n = 0,1,\ldots,98$.

177 (*ВМК, 2004, устный*). Найти все решения уравнения

$$\{x\} = \frac{1}{x}.$$

Ответ: $x = \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

178 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение

$$\{2\{2x\}\} = x.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{3}; x_3 = \frac{2}{3}$.

179 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right] = \frac{15x-7}{5},$$

где $[a]$ — наибольшее целое, не превосходящее a.

Ответ: $x_1 = \frac{7}{15}$; $x_2 = \frac{4}{5}$.

180 (*Севастополь, 2005, № 8*). Решите уравнение

$$x^2 + [x] = 4,$$

где $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее число x.

Ответ: $x_1 = -\sqrt{7}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

181 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$x^3 - [x] = 3.$$

Здесь $[x]$ есть целая часть x, т. е. наибольшее целое число, меньшее или равное x.

Ответ: $x = \sqrt[3]{4}$.

182 (*ВМК, 2004, устный*). Найти все решения уравнения

$$[x^2] = [x]^2.$$

Ответ: $x \in \left[n, \sqrt{n^2+1}\right)$, $n = 0,1,\ldots$; $x = n$, $n = -1,-2,\ldots$.

183 (*ВМК, отд. прикладной информатики, 2001, № 6*). Пусть $[x]$ обозначает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Найдите все корни уравнения

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot x^6 - [x].$$

Ответ: $x_1 = 0$; $\quad x_2 = \sqrt[3]{2}$.

2.2. Уравнения с радикалами

2.2.1. Решение возведением в степень

184* (*соц., 2005, апрель, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{2x-1} = x - 1.$$

Ответ: $x = 2 + \sqrt{2}$.

185 (*соц., 2005, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = 4$.

186 (*МШЭ, 2005, № 2*). Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = x - 1.$$

Ответ: $x = 2$.

187 (*географ., 1993, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{13 - 2x} = 5 - x.$$

Ответ: $x = 2$.

188 (*биолог., ФФМ, биоинж., 2004, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} = |x - 1|.$$

Ответ: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

189 (*почвовед., 2001, № 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{5-x^2}=1-x.$$

Ответ: $x=-1$.

190 (*соц., 2002, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{3x+10}=x+2.$$

Ответ: $x=2$.

191 (*эконом., отд. менеджмента, 2003, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{5-4x-x^2}=-2x-1.$$

Ответ: $\{-2\}$.

192 (*хим., 1998, май, № 1*). Решить уравнение

$$7-x=3\sqrt{5-x}.$$

Ответ: $x_1=1, \quad x_2=4$.

193 (*соц., 1999, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{y-1}=6-y.$$

Ответ: $y=\dfrac{13-\sqrt{21}}{2}$.

194 (*биолог., 2004, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{x+2}=|x-1|.$$

Ответ: $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

195 (*соц., 2003, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x+7}.$$

Ответ: $x=3$.

196 (*ИСАА, 1997, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cdot(x+2)-\sqrt{9+2x}=0.$$

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}$.

197 (*ВШБ, 2003, апрель, № 1*). Решить уравнение

$$22x^2+10x=\sqrt{1276x^3+364x^2}.$$

Ответ: $x_1=0; \quad x_2=2$.

198 (*географ., 1999, № 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2.$$

Ответ: $x = 2 + \sqrt{3}$.

199 (*физ., 1985, № 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x.$$

Ответ: $x = -\sqrt{3}$.

200 (*психолог., 2001, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}.$$

Ответ: $x_1 = 3 + \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = 3 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

201 (*почвовед., 1998, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1.$$

Ответ: $x = \frac{7}{9}$.

202 (*ФНМ, 2001, апрель, № 3*). Решить уравнение

$$\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

203 (*ВМК, 2002, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.2.2. Метод введения новой неизвестной

204 (*экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{x-2} = x - 2.$$

Ответ: $\{2; 3\}$.

205 (*эконом., отд. кибернетики, 1983, № 1*). Решить уравнение

$$x^2 + 13 - 2\sqrt{x^2 + 13} = 35.$$

Ответ: $x = \pm 6$.

206 (*геолог., 1994, № 3*). Решить уравнение

$$y + 8\sqrt{y^2 + y - 6} - 6 + y^2 = 0.$$

Ответ: $y_1 = 2; \quad y_2 = -3.$

207 (*ВМК, 1989, № 2*). Решить уравнение

$$8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 33.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}.$

208 (*ВМК, 1990, устный*). Решить уравнение

$$x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}.$$

Ответ: $x_1 = 6; \quad x_2 = -2.$

209 (*эконом., отд. полит. экономии, 1969, № 5*). Решить уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} - \sqrt{(x+1)^3} = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$

210* (*ИСАА, 2005, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{(x+1)^3}.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$

211 (*ВШБ, 2005, № 6*). Решите уравнение:

$$\sqrt[5]{32x^2 - 32} + \sqrt[5]{(x+1)^2} + \sqrt[5]{x^2 - 2x + 1} = 0.$$

Ответ: $x = 0.$

212 (*ВШБ, 2005, № 6*). Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2 + 5x + 6} = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3} - \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}.$$

Ответ: $x = -\frac{3}{2}.$

213 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение

$$6 \cdot \sqrt[3]{x - 3} + \sqrt[3]{x - 2} = 5 \cdot \sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{190}{63}; \quad x_2 = \frac{2185}{728}.$

214 (*ВМК, 1999, устный*). Решить уравнение
$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$$

Ответ: $\{16; 81\}$.

215 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение
$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$$

Ответ: $(2; 2)$.

216 (*почвовед., 2004, № 3*). Решите уравнение
$$\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-x-6}=-\sqrt{2x^2+4x-2}.$$

Ответ: $x=-4$.

217 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$$

Ответ: $x=1$.

218 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение
$$\frac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x.$$

Ответ: $\{5; 6; 7\}$.

219 (*ВМК, 1990, устный*). Решить уравнение
$$x^2+x+2=\frac{4}{\sqrt{3}}\,x\sqrt{x+2}.$$

Ответ: $x_1=1;\quad x_2=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$.

Тригонометрические подстановки

220 (*ВМК, 2000, устный*). Решить уравнение
$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

221 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$$

Ответ: $x_1=\dfrac{4}{5};\quad x_2=\dfrac{3}{5}; x_3=-\dfrac{5+\sqrt{73}}{14}$.

222 (*геолог., отд. геофизики, 1981, № 6*). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1.$$

Ответ: $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

223 (*хим., заочный тур олимпиады «Абитуриент-2000», № 5*). Решить уравнение

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

224 (*эконом., отд. менеджмента, 2003, апрель, № 4*). Решите уравнение

$$6x\cdot\sqrt{1-9x^2}+18x^2-3\sqrt{2}x-1=0.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{6},-\dfrac{\sqrt{2}}{6},\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}$.

2.2.3. Использование специфических преобразований выражений с радикалами

Домножение на сопряженное выражение

225 (*геолог., отд. геофизики, 1985, № 5*). Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}.$$

Ответ: $x=-1$.

226 (*геолог., отд. общей геологии, 1985, № 5*). Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

Ответ: $x=7$.

Выделение полного квадрата

227 (*Севастополь, 2003, № 1*). Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+2x+1}=3.$$

Ответ: $x\leqslant -1$.

228 (*эконом., 2000, № 1*). Решить уравнение

$$3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x=\left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)^2.$$

Ответ: $x=0$.

229 (*ВМК, 1996, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2.$$

Ответ: $1\leqslant x\leqslant 2$.

230 (*ВМК, 2000, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Ответ: $x=15$.

231 (*геолог., отд. геофизики, 1981, № 6*). Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1.$$

Ответ: $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

232 (*ВМК, 1996, устный*). Решить уравнение

$$\frac{4x^2+x+1}{4|x|}=\sqrt{x+1}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1+\sqrt{17}}{8};\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\right\}$.

Расщепление за счет разложения на множители

233 (*геолог., 2000, № 7*). Решить уравнение

$$2\cdot(2-x^2-x)=\sqrt{1-x^2}\cdot(3x^2-6x+4).$$

Ответ: $\left\{0;1;\dfrac{2\sqrt{2}}{3};-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$.

2.2.4. Уравнения вида $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$

234* (*географ., 1995, май, № 5*). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}=1.$$

Ответ: $x=1$.

235 (*соц., 2001, № 6*). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1.$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{2}{7}\right\}$.

236 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1.$$

Ответ: $x_1 = -3; x_2 = 4$.

237 (*ВМК, 2000, 2005, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}.$$

Ответ: $\left\{0; -1; 1; -\sqrt{\frac{2+3\sqrt{3}}{2}}; \sqrt{\frac{2+3\sqrt{3}}{2}}\right\}$.

238 (*мех-мат, заочный тур олимпиады «Абитуриент-2000», № 2*). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{15x+1-x^2} + \sqrt[3]{x^2-15x+27} = 4.$$

Ответ: $\{0; 2; 13; 15\}$.

2.2.5. Графический метод

239* (*биолог., 1976, № 5*). Доказать, что уравнение

$$\sqrt{x} = -x^2 + 8x - 15$$

не имеет решений.

240 (*ВМК, 2000, устный*). Решить уравнение

$$x + \sqrt{3+\sqrt{x}} = 3.$$

Ответ: $x = 1$.

241 (*хим., 2001, № 4*). Решить уравнение

$$\sqrt{4x-x^2} + \sqrt{4x-x^2-3} = 3 + \sqrt{2x-x^2}.$$

Ответ: $x = 2$.

Уравнения вида $f(x) = f^{-1}(x)$

242 (*ВМК, 2002, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+22} = x^3 - 6x^2 + 12x - 32.$$

Ответ: $x = 5$.

243 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{3x+9} = 27(x+1)^3 - 6.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

244 (*ВМК, 2002, устный*). Решить уравнение

$$x^3 + 1 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x-1}.$$

Ответ: $x = 1; x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Уравнения вида $F(f(x)) = F(g(x))$

245* (*мех-мат, 2001, март, № 1*). Решить уравнение

$$7x - 5|x-1| = 7\sqrt{2x+8} - 5\left|\sqrt{2x+8} - 1\right|.$$

Ответ: $x = 4$.

246 (*ВМК, 2000, 2003, устный*). Решить уравнение

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right) - 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = 0.$$

Ответ: $x = 1$.

247 (*хим., 1989, № 5*). Решить уравнение

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right) + 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{5}$.

248 (*ВКНМ, 1996, апрель, № 6*). Решить уравнение

$$10x + (4x+2)\sqrt{x^2+x+1} + 3x\sqrt{9x^2+3} = -2.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{5}$.

2.2.6. Метод оценок

249 (*ВШБ, 2005, № 7*). Найдите все пары чисел x и y, удовлетворяющие условию

$$\sqrt{\lg x} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1 + |\sin y|.$$

Ответ: $(1; 0)$.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

250* (*хим., 2003, № 4*). Решить уравнение

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)=8.$$

Ответ: $x=1$.

251 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{1+16x^{-2}}=\sqrt{9-2x}.$$

Ответ: $x=2$.

252 (*ВМК, 2000, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2.$$

Ответ: $x=1$.

253 (*ВМК, 1997, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{x\cdot(2x+3)}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2\sqrt{2}}=\sqrt{3\sqrt{2}+3x}.$$

Ответ: $\varnothing$.

Неравенство Коши—Буняковского

254 (*ВМК, 2005, устный*). Решить уравнение

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

Ответ: $x=5$.

255 (*ВМК, 2002, устный*). Решить уравнение

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}.$$

Ответ: $x_1=1; x_2=1+\sqrt{2}$.

256* (*ФНМ, 2004, заочный тур олимпиады, № 3*). Найти все действительные решения уравнения

$$2\sqrt{x+7}+3\sqrt{37-2x}+6\sqrt{3x+93}=7\sqrt{2x+137}.$$

Ответ: $x=5$.

2.3. Показательные уравнения

2.3.1. Уравнения, приводимые к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

257* (*физ., 1995, № 3*). Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+5} = 27^{-1}.$$

Ответ: $\{-2; 4\}$.

258 (*психолог., 1988, № 2*). Решите уравнение

$$32^{3\cdot(x^3-8)} = 8^{19\cdot(2x-x^2)}.$$

Ответ: $\{-0{,}8; -5; 2\}$.

259 (*геолог., 2001, № 3*). Решите уравнение

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{125}{343}.$$

Ответ: $x = 3 \pm \sqrt{5}$.

260 (*физ., 1995, № 1*). Решите уравнение

$$2^{x-1} \cdot 3^x = 0{,}5 \cdot 6^{2-x}.$$

Ответ: $\{1\}$.

261 (*ВМК, 1979, № 2*). Решить уравнение

$$5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}.$$

Ответ: $x = \frac{7}{5}$.

262 (*эконом., отд. менеджмента, 2002, № 2*). Решить уравнение

$$\left(-1 - \frac{2x}{3}\right)^{3x^2+17x+20} = 1.$$

Ответ: $\{-4; -3; -\frac{5}{3}\}$.

263 (*эконом., подгот. отд., 1992, № 1*). Решить уравнение

$$|x-5|^{3x^2-15x} = 1.$$

Ответ: $\{0; 4; 6\}$.

264 (*ИСАА, 1994, № 2*). Решите уравнение

$$3^{x\log_3 5}\cdot 5^{x^2-3x}=1.$$

Ответ: $\{0;2\}$.

265 (*эконом., отд. менеджмента, 1997, № 1*). Решить уравнение

$$3^{|x|}=5^{x^2+3x}.$$

Ответ: $\{0;-3-\log_5 3\}$.

266 (*ВМК, 1995, устный*). Решить уравнение

$$3^{2^x}=2^{3^x}.$$

Ответ: $x=\log_{\frac{2}{3}}\log_3 2$.

267 (*ВМК, 1999, устный*). Решить уравнение

$$5^{7^x}=7^{5^x}.$$

Ответ: $x=\log_{\frac{7}{5}}(\log_5 7)$.

268 (*географ., 1973, № 4*). Найти решения уравнения

$$3^{x^2+4x}=\frac{1}{25},$$

удовлетворяющие условию $x>-3$.

Ответ: $x=-2+\sqrt{4-\log_3 25}$.

269 (*хим., 1964*). Решите уравнение

$$3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+2}}=6.$$

Ответ: $\{1;-2-2\log_3 2\}$.

270 (*ФНМ, 2003, апрель, № 1*). Решите уравнение

$$2^x\cdot 5^{\frac{x+2}{x}}=100.$$

Ответ: $\{2;\log_2 5\}$.

271 (*ВМК, физ., эконом., подгот. отд., 1996, № 2*). Решить уравнение

$$7^x\cdot 16^{\frac{x}{x+3}}=14.$$

Ответ: $x_1=1;\quad x_2=-3-3\log_7 2$.

272 (*мех-мат, 1994, устный*). Решите уравнение

$$2^{x^2}\cdot 3^{-x}=\frac{2}{5}.$$

Ответ: $\varnothing$.

2.3.2. Метод введения новой неизвестной

273* (*почвовед., 1995, № 2*). Решить уравнение

$$5^{2x} = 115 \cdot 5^{x-1} + 50.$$

Ответ: $x = 2$.

274 (*соц., 2005, № 2*). Решить уравнение

$$3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}$.

275 (*хим., 1998, № 1*). Решить уравнение

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Ответ: $x_1 = 0; \quad x_2 = 2$.

276 (*эконом., отд. менеджмента, 2003, апрель, № 1*). Решить уравнение

$$2 \cdot 4^x - 31 \cdot 2^x - 16 = 0.$$

Ответ: 4.

277 (*психолог., 2004, № 1*). Решить уравнение

$$4^x - 12 \cdot 2^x - 1 = 0.$$

Ответ: $x = \log_2(6 + \sqrt{37})$.

278 (*географ., 1977, № 3*). Решить уравнение

$$4^x - 2^{x+1} = 3.$$

Ответ: $x = \log_2 3$.

279 (*почвовед., 1999, № 1*). Решить уравнение

$$4^x - 2^x = 56.$$

Ответ: $\{3\}$.

280 (*геолог., отд. геофизики, 1984, № 1*). Решить уравнение

$$3 \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0.$$

Ответ: $x = -1$.

281 (*ИСАА, 1998, № 2*). Решить уравнение

$$2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\log_2 \frac{6 + \sqrt{26}}{5}}$.

282 (*физ., 2001, № 3*). Решить уравнение

$$4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$.

283 (*хим., 2002, № 1*). Решить уравнение

$$4^{\frac{1}{x}} - 5 \cdot 2^{2+\frac{1}{x}} + 64 = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

284 (*эконом., отд. менеджмента, 1998, № 4*). Решить уравнение

$$3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0.$$

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

285 (*психолог., 1993, № 1*). Решить уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}.$$

Ответ: $x = 2$.

286 (*хим., 2000, № 6*). Решить уравнение

$$(26 + 15\sqrt{3})^x - 5 \cdot (7 + 4\sqrt{3})^x + 6 \cdot (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 5.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

287 (*психолог., 2002, № 3*). Решить уравнение

$$3^{3^x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{3^x-1} = 4.$$

Ответ: $\{0\}$.

288 (*эконом., отд. менеджмента, 1999, № 1*). Решить уравнение

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} = 7 \cdot \sqrt{\frac{2^x}{2^x - 1}} - \sqrt{14}.$$

Ответ: $\{3\}$.

289 (*Севастополь, 1999, № 5*). Решить уравнение

$$25^{\sqrt{x^3+3x^2+2x}-x+1} + 5 = 126 \cdot 5^{\sqrt{x^3+3x^2+2x}-x}.$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

290 (*географ., 2002, май, № 2*). Решить уравнение
$$2^{2x+1}-15\cdot 2^x+10=6\cdot\left|2^{x-1}-1\right|.$$

Ответ: $x_1=3$; $x_2=\log_2(3-\sqrt{7})$.

291 (*ВМК, физ., эконом., подгот. отд., 1995, № 2*). Решить уравнение
$$\left|\frac{1}{49}\cdot 7^{x+3}+49^x-15\right|-196\cdot 7^{x-2}=3.$$

Ответ: $\{\log_7 3;0\}$.

292 (*биолог., 2003, апрель, № 4*). Решить уравнение
$$4\cdot 3^{2x+\frac{1}{2x}}-8\cdot 3^{x+\frac{1}{4x}}+2=\left|4\cdot 3^{x+\frac{1}{4x}}-1\right|.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{1}{2}\left(\log_3\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}\pm\sqrt{\log_3^2\dfrac{3+\sqrt{6}}{-}1}\right)$.

293 (*Севастополь, 2004, № 7*). Решите уравнение
$$\left(3^{2x+3}-3^{x+1}-1\right)^2-2\cdot 3^{2x+4}+6\cdot 3^{x+1}-1=0.$$

Ответ: $x_1=-2; x_2=\log_3\dfrac{1+\sqrt{97}}{18}$.

294 (*мех-мат, 1998, март, № 1*). Решить уравнение
$$2^{2x}-2^{x+2}+\left|2^x-\frac{1}{3}\right|=-\frac{7}{3}.$$

Ответ: $\{0;1\}$.

295 (*ИСАА, 1992, № 1*). Решите уравнение
$$2^{x+5}+2^3\cdot 2^{x-1}-2^2=0.$$

Ответ: $x=-\log_2 9$.

296 (*ВМК, 2001, 2003, устный*). Решите уравнение
$$3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}.$$

Ответ: $x=2$.

297 (*геолог., 2003, № 2*). Решите уравнение
$$5^{x+\frac{1}{2}}-9^x=3^{2x-2}-5^{x-\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $x=\dfrac{3}{2}$.

298 (*почвовед., 1988, № 3*). Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$$

ОТВЕТ: $\log_{\frac{2}{5}} 2; \quad -\log_{\frac{2}{5}} 3.$

299 (*физ., 2005, № 3*). Решить уравнение

$$5^{x\sqrt{12}} - 5\sqrt{3} \cdot 15^{x\sqrt{3}} + 4 \cdot 3^{1+x\sqrt{12}} = 0.$$

ОТВЕТ: $x_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}(\log_3 5 - 1)}; \quad x_2 = \dfrac{4\log_3 2 - 1}{2\sqrt{3}(\log_3 5 - 1)}.$

300 (*геолог., отд. геофизики, 1982, № 3*). Решить уравнение

$$9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}.$$

ОТВЕТ: $x = \dfrac{1}{2}.$

301 (*ВМК, 2000, апрель, № 2*). Решить уравнение

$$12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0.$$

ОТВЕТ: $x_1 = 0; x_2 = \log_3 2.$

302 (*физ., 2001, март, № 3*). Решить уравнение

$$18^x - 9^{x+1} - 2^{x+2} + 36 = 0.$$

ОТВЕТ: $x_1 = \log_2 9; \quad x_2 = \log_3 2.$

2.3.3. Графический метод

303 (*фил., 2004, № 3*). Решите уравнение

$$(x+4) \cdot (x^2+4) = 5 - 2^{x+4} - 16\left(\sqrt{2}\right)^x.$$

ОТВЕТ: $x = -4.$

304 (*ВМК, 1996, устный*). Решить уравнение

$$x^2 = \left(|x|^{\frac{1}{|x|}} + 2\right)^{|x|}.$$

ОТВЕТ: $\varnothing.$

305 (*хим., 1993, № 5*). Решить уравнение

$$2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2.$$

ОТВЕТ: $\varnothing.$

306 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение

$$5^x - 3^x = 98.$$

Ответ: $x = 3$.

307 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$4 \cdot 3^{3x+1} + 4 = 5 \cdot 2^{9x}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

308 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение

$$(17 + 12\sqrt{2})^x - (17 - 12\sqrt{2})^x = 32^x + 12\sqrt{2}.$$

Ответ: $x = \frac{3}{2}$.

309 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$5^{2x+1} + \sqrt{3} \cdot 3^{3x} + 14 = 3\sqrt{2} \cdot 2^{5x+1}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

2.3.4. Метод оценок

310 (*ВМК, 2000, 2002, 2003, устный*). Найти все положительные корни уравнения

$$2^{6x^2-7x-2} + 2^{3x^2-5x} = 9.$$

Ответ: $x = \frac{5}{3}$.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

311 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$2^{x^6} + 2^{x^2} = 2^{x^4+1}.$$

Ответ: $\{-1; 0; 1\}$.

312 (*ВМК, 1995, устный*). Решить уравнение

$$2^x + 2^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Ответ: $x = 1$.

2.4. Логарифмические уравнения

2.4.1. Уравнения, приводимые к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

313* (*МШЭ, 2005, № 3*). Решить уравнение

$$1 + \log_9(x+1)^2 = \log_3(3x+9).$$

Ответ: $x = -2$.

314 (*ВШБ, 2005, № 2*). Решите уравнение

$$\log_3(x^2-5) - \log_3\left(x - \frac{1}{3}\right) = 1.$$

Ответ: $x = 4$.

315 (*хим., 1995, № 2*). Решить уравнение

$$\log_2 x + \log_2(x+1) = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

316 (*геолог., 2004, устный*). Решите уравнение

$$\log_3\left(1 + \log_2\left(1 + 3\log_2 x\right)\right) = 1.$$

Ответ: $x = 2$.

317 (*психолог., 2003, № 1*). Решить уравнение

$$\log_{3x+3} 5 = 2.$$

Ответ: $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{3}$.

318 (*мех-мат, 1982, № 1*). Решить уравнение

$$\log_3(x^2-6) = \log_3(x-2) + 1.$$

Ответ: $x = 3$.

319 (*геолог., 1997, май, № 2*). Решить уравнение

$$2 - \log_2 x = \log_2\left(\frac{3}{4}|x| + 2\right).$$

Ответ: $x = \dfrac{4}{3}$.

320 (*соц., 1998, № 2*). Решить уравнение

$$\log_2(x^2-5) = \frac{3}{2}\log_{\sqrt{8}}(1-x).$$

Ответ: $x = -3$.

321 (*физ., 1996, март, № 5*). Решить уравнение

$$\log_{25} x^6 + \log_5\left(-x^5\right) = 5.$$

Ответ: $-5^{\frac{5}{8}}$.

322 (*соц., 1998, № 2*). Решить уравнение

$$\log_7(x^2 - 5) = 2\log_{49}(x + 1).$$

Ответ: $x = 3$.

323 (*хим., 2000, май, № 1*). Решить уравнение

$$\log_2 \frac{x+3}{5} + \log_2 \frac{5}{x+1} = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

324 (*биолог., 2003, апрель, № 1*). Решить уравнение

$$\log_2(1 + 2x) = 1 + 2\log_2 x.$$

Ответ: $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

325 (*геолог., 1979, № 2*). Решить уравнение

$$1 + \lg(1 + x^2 - 2x) - \lg(1 + x^2) = 2\lg(1 - x).$$

Ответ: $x = -3$.

326 (*мех-мат, 1996, март, № 1*). Решить уравнение

$$\log_2(x + 6) \cdot \log_{x+6}(x^3 + 10x^2 + 15x) = \log_2(3x^2 + 5x).$$

Ответ: $x = -2$.

327 (*фил., 1998, № 3*). Решить уравнение

$$\frac{\log_5(-2x)}{\log_5(x + 1)} = 2.$$

Ответ: $x = \sqrt{3} - 2$.

328 (*ФФМ, 2003, май, № 1*). Решить уравнение

$$\log_{(-1-x)}(4x + 25) = 2.$$

Ответ: $x = -4$.

329 (*биолог., ФФМ, 1999, № 3*). Решить уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3 - 3x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{55}{8}\right) + 2\log_{(8-7x)^2}(x + 3) = 1.$$

Ответ: $x = -1$.

330 (*эконом., отд. полит. экономии, 1978, № 1*). Решить уравнение

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

331 (*эконом., отд. кибернетики, 1978, № 3*). Решить уравнение

$$3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{x}{2}} \left(\frac{75x}{4} - \frac{11}{x}\right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{4}$.

332 (*почвовед., 1996, май, № 2*). Решить уравнение

$$\log_{(4x-x^2)} x = \log_{(12-3x)} x.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 3$.

333 (*ВМК, 1996, № 2*). Решить уравнение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = -\frac{15}{11}$.

334 (*ВМК, 1981, № 2*). Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}.$$

Ответ: $\left\{2; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

335 (*мех-мат, 1995, май, № 2*). Сколько различных корней имеет уравнение

$$\log_2\left(40 - 5x^2 + x^2 \cdot 2^x\right) = x + 3?$$

Ответ: три корня: $x_1 = 2\sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}, x_3 = \log_2 5$.

336 (*мех-мат, 2001, май, № 2*). При каких значениях x числа

$$\log_3(2x^2 - x), \log_3(10 - x^2 + 12x) \text{ и } \log_3\left(x^2 + 11x + 9\frac{1}{2}\right)$$

являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

Ответ: $x = 5$.

337 (*геолог.*, *1965*, *№ 2*). Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{2}\log_2\left(2^{\sqrt[3]{6x}} - 10\cdot 2^{-\sqrt[3]{6x}} + 1\right) = 3\left(\log_{7\sqrt{7}} 49 - 1\right).$$

ОТВЕТ: $x = \frac{1}{6}\log_2^3 5$.

338 (*геолог.*, *1998*, *май*, *№ 2*). Решить уравнение

$$\log_9\left(4^x - 2\cdot 18^x\right) = 2x.$$

ОТВЕТ: $x = \log_{\frac{2}{9}}(\sqrt{2}+1)$.

339 (*почвовед.*, *2003*, *май*, *№ 1*). Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{3}}(4^x - 1) - \log_{\sqrt{3}}(2^x - 1) = 2.$$

ОТВЕТ: $x = 1$.

340 (*ФНМ*, *2004*, *апрель*, *№ 3*). Решить уравнение

$$\log_{2x^2}\left(4x^2 + 8 - 8x\sqrt{2}\right) + \log_{2x^2}\left(2x^2 + 4 + x\sqrt{32}\right) = \frac{\log_{2x^2} 2}{\log_{8x^2} 2}.$$

ОТВЕТ: $\{1; -1; 2; -2\}$.

2.4.2. Метод введения новой неизвестной

341 (*геолог.*, *1994*, *май*, *№ 5*). Решить уравнение

$$(3 - \log_7 x)\cdot\log_7 x = \frac{5}{4}.$$

ОТВЕТ: $\{\sqrt{7}; 49\sqrt{7}\}$.

342 (*хим.*, *1993*, *№ 2*). Решить уравнение

$$(\log_2 x)^2 + 3\log_{1/2} x + 2 = 0.$$

ОТВЕТ: $\{2; 4\}$.

343 (*физ.*, *1984*, *№ 2*). Решить уравнение

$$4\log_{25}(5x) = 5 - \log_5^2 x.$$

ОТВЕТ: $x_1 = 5; x_2 = \frac{1}{125}$.

344 (*геолог.*, *2004*, *устный*). Решите уравнение

$$\log_2(x^2 + 7) = 5 + \log_2 x - \frac{6}{\log_2\left(x + \frac{7}{x}\right)}.$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1; \quad x_2 = 7$.

345* (*биолог., 1995, № 1*). Решить уравнение

$$4 \cdot (\log_4 x)^2 = \log_2 \frac{x^5}{16}.$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = 16$.

346 (*хим., 1998, май, № 2*). Решить уравнение

$$\log_4 x + 2\log_x 4 = 3.$$

Ответ: $\{4; 16\}$.

347 (*ИСАА, 1999, № 1*). Решить уравнение

$$\lg^2(x-2)^2 = 3^{\left(2\log_3\sqrt{2}\right)}\left(\frac{\log_5(2-x)}{\log_5 10}\right).$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2 - \sqrt{10}$.

348 (*психолог., 1978, № 1*). Решить уравнение

$$\left(\log_3 \frac{3}{x}\right) \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{8};\quad 1\right\}$.

349 (*психолог., 1981, № 4*). Решить уравнение

$$\frac{4}{3}\left(\log_3(5x-6)^3\right)^2 - \left(\log_3(5x-6)^3\right) \cdot \log_3 x^6 = -6\left(\log_3 \frac{1}{x}\right)^2.$$

Ответ: $\left\{\frac{3}{2};\quad \frac{36}{25}\right\}$.

350 (*ИСАА, 2004, № 4*). Решить уравнение

$$\left(2\log_4\left(2^{2x}+1\right) - x\right) \cdot \left(\log_2\left(2^x + 2^{-x}\right) - 2\right) = 8.$$

Ответ: $x = \log_2\left(8 \pm \sqrt{63}\right)$.

351 (*геолог., 2002, май, № 3*). Решить уравнение

$$\frac{1}{4}\log_{x-1}(x-5)^4 - 8 + 4\log_{5-x}(6x - x^2 - 5) = 0.$$

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

352 (*эконом., 1979, № 5*). Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{4}$.

353 (*биолог., ФФМ, биоинж., 2003, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

Ответ: $2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}$.

354 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg \sqrt{x^2}.$$

Ответ: $\{-10; -1\}$.

355 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt[4]{\lg(-x)} = \lg \sqrt[4]{x^4}.$$

Ответ: $\{-10; -1\}$.

356 (*ВМК, 1996, устный*). Решить уравнение

$$x^{\lg x} = 100x.$$

Ответ: $\left\{100; \frac{1}{10}\right\}$.

357 (*ВМК, 2000, 2003, устный*). Решить уравнение

$$x^{\lg 2x} = 5.$$

Ответ: $\{0{,}1; 5\}$.

358 (*психолог., 1976, № 3*). Решить уравнение

$$x^{\lg x} = 5 \cdot 2^{\lg x^2 - 1}.$$

Доказать, что все его корни являются рациональными числами.

Ответ: $\left\{\frac{2}{5}; \quad 10\right\}$.

359 (*геолог., 2000, устный*). Решите уравнение

$$x^{\log_2 \frac{x}{98}} 14^{\log_2 7} = 1.$$

Ответ: $\{7; 14\}$.

360 (*ВМК, 1995, устный*). Доказать, что корни уравнения

$$9x^{\log_6 x} = 4 \cdot 54^{\log_6 x}$$

рациональны.

Ответ: $x_1 = 36; \quad x_2 = \frac{3}{2}$.

361 (*почвовед., 1996, № 3*). Решить уравнение

$$x^{2\log_4 x} = \frac{8}{x^2}.$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{8}$.

362 (*ВМК, 1991, устный*). Решить уравнение

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = x^{\sqrt{\log_x 2}}.$$

Ответ: $x > 1$.

363 (*психолог., 1999, № 2*). Решить уравнение

$$x^{\log_5 9} + 7 \cdot 3^{\log_5 x} - 11 = 0.$$

Ответ: $x = 5^{\log_3\left(\frac{-7+\sqrt{93}}{2}\right)}$.

364 (*геолог., 2004, устный*). Решите уравнение

$$x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6.$$

Ответ: $x = \sqrt{10}$.

365 (*ИСАА, 1995, № 2*). Решить уравнение

$$\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_2(x - 1) \cdot \log_2(x - 3) = 1.$$

Ответ: $x = 5$.

366 (*хим., 2001, май, № 3*). Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} x + \log_x(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = \frac{3}{2} + \log_x(2\sqrt{6}).$$

Ответ: $x_1 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2; x_2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^{-\frac{1}{2}}$.

367 (*биолог., 1965, № 4*). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4\log_4 x - 2} = 4.$$

Ответ: $x = 8$.

368 (*мех-мат, 2003, № 2*). Решить уравнение

$$\left|5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614\right| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{25}$.

369 (*биолог., 1993, № 2*). Решить уравнение

$$\log_2\left(9^x + 2 \cdot 3^x - 5\right) = 1 + 2\log_4\left(3^{x+1} - 4\right).$$

Ответ: $x = 1$.

370 (*эконом., отд. полит. экономии, 1970, № 3*). Решить уравнение

$$\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 (2x).$$

Ответ: $x = 2$.

371 (*почвовед., 1998, май, № 3*). Решить уравнение

$$\log_{0,5}\left(\log_4 \frac{1}{x}\right) + \log_4\left(\log_2(16x^2)\right) = 0.$$

Ответ: $x = 2^{4-4\sqrt{2}}$.

372 (*МК-МГУ, 2005, I тур, № 5*). Найти произведение всех действительных корней уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\log_2^2 x} = 2^{\frac{3}{\sqrt{2}}(\log_2 x - \log_x 2)}.$$

Ответ: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$.

2.4.3. Графический метод и метод оценок

373 (*ФНМ, 2003, апрель, № 2*). Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(1 + (x^2 - 3x + 2)^2\right) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}.$$

Ответ: $x = 2$.

374 (*ФНМ, 2004, заочный тур олимпиады, № 2*). Найти все пары (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$2\log_5\left(\frac{1}{16} \cdot 7^x + 7^{-x}\right) + \log_5\left(2y^2 + 12y + 26\right) + 4x \cdot \log_{\frac{1}{5}} 7 =$$
$$= 4\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{16} \cdot 7^{2x} + 1\right) + \log_{\frac{1}{5}}\left(2(y+3)^2 + 8\right).$$

Ответ: $(\log_7 4; -3)$.

375 (*мех-мат, 2003, заочный тест, № 2*). Решить уравнение

$$(2 - \log_2(|x+4| - |x-8|)) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(|x-1| - |x-4|) = \log_2 3.$$

Ответ: $x \geqslant 8; x = \frac{8}{3}$.

376 (*ВМК, 1999, устный*). Решить уравнение

$$\log_{x-1} x - \log_x (x+1) = 0.$$

Ответ: $\varnothing$.

377 (*психолог., 1982, № 6*). Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

378 (*ВКНМ, 1998, № 6*). Решить уравнение

$$\log_2(3x+1)\cdot\log_5(3x+4)+\log_3(3x+2)\cdot\log_4(3x+3) =$$
$$= 2\cdot\log_3(3x+2)\cdot\log_5(3x+4).$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

2.5. Функциональные уравнения

379* (*ВМК, 1998, устный*). Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая при всех x соотношению

$$2f(x+2)+f(4-x) = 2x+5?$$

Ответ: да, $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$.

380 (*ВМК, 2005, устный*). Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению

$$f(x+3)-f(2-x) = 3x+1?$$

Ответ: нет.

381 (*ВМК, 1998, устный*). Найти квадратичную функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую при всех x уравнению

$$f(1-x)-f(2-x) = -2x+7.$$

Ответ: $f(x) = -x^2-4x+c$, где c — произвольная константа.

382 (*ВМК, 1998, устный*). Существует ли квадратичная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая при всех x соотношению

$$f(x+1)+f(2-x) = (x+1)^2?$$

Ответ: нет.

383 (*ВМК, 2002, устный*). Найти все многочлены

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

степени n, т. е. с коэффициентом $a_n \neq 0$, удовлетворяющие тождеству

$$P(x^2) \equiv (P(x))^2, \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Ответ: $P(x) = x^n$.

384 (*ВМК, 1996, устный*). Найти функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую при всех $x \neq 0$ соотношению

$$f(x) + 3x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2.$$

Ответ: $f(x) = \dfrac{3 - x^3}{4x}$.

385 (*хим., 2000, заочный тур*). Найти значения x, при которых функция $f(x)$, удовлетворяющая при всех $x \neq 0; 1$ уравнению

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x,$$

имеет экстремумы. Найти эту функцию.

Ответ: $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{2x(x-1)}$.

386* (*биолог., 2005, № 7*). Задана функция f, причем $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(10) = -\pi$. Найти $f\left(-\frac{2}{7}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi}{35}$ ($f(x) = -\frac{\pi}{10}x$ для рациональных x).

387 (*биолог., 2005, № 7*). Задана функция f, причем $f(x - y) = f(x) - f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(6) = -\sqrt{3}$. Найти $f\left(-\frac{5}{4}\right)$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{24}$ ($f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{6}x$ для рациональных x).

388 (*биолог., 2005, № 7*). Задана функция f, причем $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(4) = 16$. Найти $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ($f(x) = 2^x$ для рациональных x).

389 (*биолог., 2005, № 7*). Задана функция f, причем $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(3)=27$. Найти $f\left(-\frac{5}{2}\right)$.

ОТВЕТ: $\frac{\sqrt{3}}{27}$ ($f(x)=3^x$ для рациональных x).

390* (*мех-мат, 2003, устный*). Числовая функция для любых действительных значений x, y удовлетворяет равенству

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+80xy.$$

Найти $f\left(\frac{4}{5}\right)$, если $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$.

ОТВЕТ: $f\left(\frac{4}{5}\right)=24$; при рациональных x $f(x)=40x^2+kx$, где $k=-2$.

391* (*мех-мат, 2001, олимпиада, 10 кл.*). Числовая функция $f(x)$ при каждом действительном x удовлетворяет равенству

$$x+f(x)=f(f(x)).$$

Решить уравнение $f(f(x))=0$.

ОТВЕТ: $x=0$.

392 (*МК-МГУ, 2005, I тур, № 10*). Существуют ли функции f и g, определенные на всей числовой прямой и при каждом x удовлетворяющие равенствам:

$$f(g(x))=x^2, \quad g(f(x))=x^3?$$

ОТВЕТ: нет (указание: докажите, что f — инъекция и удовлетворяет уравнению $f(x)=\left(f\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)^2$).

393 (*ВМК, 2002, устный*). Найти все функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$x\cdot f(y)+y\cdot f(x)\equiv(x+y)\cdot f(x)\cdot f(y)$$

для любых $x, y\in(-\infty;+\infty)$.

ОТВЕТ: $f(x)\equiv 0$; $f_c(x)\equiv 1$ при $x\neq 0$, $f_c(0)=c$, где c — произвольная константа.

394 (*мех-мат, 2003, заочный тест*). Найти все функции $f(x)$, определенные на всей числовой прямой, для которых неравенство

$$f(y)\cdot\cos(x-y)\leqslant f(x)$$

выполнено при любых x и y.

ОТВЕТ: $f(x)\equiv c$, где $c\geqslant 0$.

Глава 3

НЕРАВЕНСТВА

3.1. Алгебраические неравенства

3.1.1. Линейные и квадратичные неравенства

395 (*физ., 1992, № 1*). Решить неравенство

$$8x - 1 < 4x^2.$$

Ответ: $x < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Область определения функции

396* (*географ., 1997, май, № 1*). Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - x - 2} + \log_{3+x}(9 - x^2).$$

Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; 3)$.

397 (*геолог., 2003, устный*). Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x^2 - 3x + 2) \cdot \lg(3 - x)}.$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2\}$.

398 (*эконом., 1989, № 1*). Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{-x^2 + x + 20}}.$$

Ответ: $(-4; -3] \cup [3; 5)$.

399 (*ВМК, 1983, № 1*). Найти область определения функции

$$y = \sqrt{16 - x^2} \cdot \log_2(x^2 - 5x + 6).$$

Ответ: $[-4; 2) \cup (3; 4]$.

400 (*географ., 1993, № 3*). Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}.$$

Ответ: $(-2; 1) \cup \{2\}$.

401 (*геолог., 1999, № 1*). Найти область определения функции

$$y = \left(\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\right) \cdot \sqrt{\frac{25}{(x+2)^2} - 1}.$$

Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; 3]$.

3.1.2. Неравенства, содержащие функции $[x]$ и $\{x\}$

402 (*ВМК, 2003, устный*). Введем обозначения: $[a]$ — целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a; $\{a\}$ — дробная часть числа a, т. е. $\{a\} = a - [a]$. Решить неравенство

$$[x] \cdot \{x\} < x - 1.$$

Ответ: $x \geqslant 2$.

3.1.3. Дробные неравенства и неравенства высших степеней

Метод интервалов

403* (*хим., 1995, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{3x}{x^2+2} \geqslant 1.$$

Ответ: $[1; 2]$.

404 (*МШЭ, 2005, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{1}{1-x} \leqslant 1 + x.$$

Ответ: $\{0\} \cup (1; +\infty)$.

405 (*геолог., 2005, устный*). Решите неравенство

$$\frac{x^2+3}{x^2+3x-4} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

406 (*соц., 2004, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{x^2+8x+15}{x^2+7x+14} \leqslant 0.$$

Ответ: $[-5; -3]$.

407* (*ИСАА, 2005, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{x^2+2x-8}{x+4} \leqslant 1.$$

Ответ: $(-\infty; 3] \setminus \{-4\}$.

408 (*ФГП, 2005, № 2*). Решите неравенство

$$\frac{1}{2x^2+3x} \leqslant \frac{1}{3x-2x^3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup [-1;0) \cup \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

409 (*хим., 1993, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{4}{(x-1)^2} \geqslant 1.$$

Ответ: $[-1,1) \cup (1,3]$.

410 (*хим., 2004, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{10+3x-x^2}{x^2-3x+2} \leqslant 1.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup (1;2) \cup [4;+\infty)$.

411 (*почвовед., 1995, № 3*). Решите неравенство

$$4x+7 \leqslant \frac{2}{x}.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (0; 1/4]$.

412 (*геолог., 1995, май, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 \leqslant 0.$$

Ответ: $[-5;1] \cup (2;3)$.

413 (*географ., 2002, май, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{1}{x} \leqslant 5.$$

Ответ: $(-\infty;0) \cup \left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.

414* (*хим., 1999, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \leqslant 2.$$

Ответ: $(-\infty;-2] \cup (-1;0) \cup (0;+\infty)$.

415 (*геолог., 2001, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{\frac{1}{x-5}-1}{1-\frac{1}{x-8}} \geqslant 0.$$

Ответ: $5 < x \leqslant 6$; $8 < x < 9$.

416 (*почвовед., 2002, май, № 3*). Решите неравенство

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \frac{4}{x^2}.$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup \{2\}$.

417 (*физ., 2004, март, № 2*). Решить систему неравенств

$$-2 < \frac{2}{x^2 - x - 2} < -1.$$

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

418 (*ФНМ, 2002, апрель, № 1*). Найти все значения x, при которых график функции $y = \frac{3}{x-1}$ лежит не выше графика функции $y = 2x$.

Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{7}}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$.

419 (*фил., 1999, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2 + 8x - 9} \geqslant \frac{1}{3x^2 - 5x + 2}.$$

Ответ: $(-\infty; -9) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left[\frac{11}{2}; +\infty\right)$.

420 (*мех-мат, 2003, заочный тест, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{5x}{2x^2 - 5x + 2} \leqslant \frac{19x + 2 - 8x^2}{10x^2 - 19x}.$$

Ответ: $\frac{7-\sqrt{65}}{8} \leqslant x < 0$; $\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{7+\sqrt{65}}{8}$; $1{,}9 < x < 2$.

Метод введения новой неизвестной

421 (*географ., 1965, № 4*). Решить неравенство

$$x^4 - 5x^2 + 4 < 0.$$

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

422 (*эконом., отд. полит. экономии, 1968, № 4*). Решить неравенство

$$x^4 - 12x^2 + 36 \leqslant 0.$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{6}$.

423 (*почвовед., 1996, № 2*). Решить неравенство

$$3x^4 + 4 < 13x^2.$$

Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 2\right)$.

424 (*геолог., отд. геофизики, 1974, № 1*). Решить неравенство

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geqslant 5.$$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$.

425 (*почвовед., 1998, май, № 2*). Решить неравенство

$$(x^2 - 4x)^2 \geqslant 16.$$

Ответ: $x \leqslant 2 - \sqrt{8}$; $\quad x \geqslant 2 + \sqrt{8}$; $\quad x = 2$.

426 (*Севастопольский филиал МГУ, 2002, май, № 6*). Решите неравенство

$$x^4 + x^3 + x + 1 > 18x^2.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{21}}{2}; 2-\sqrt{3}\right] \cup [2+\sqrt{3}; +\infty)$.

427* (*ВМК, 2004, апрель, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 7} \leqslant 5x - x^2 - 5.$$

Ответ: $\{2; 3\}$.

3.2. Задачи с модулями

3.2.1. Универсальный метод решения

428* (*хим., 2000, № 1*). Решить уравнение

$$|x| = 4 - x.$$

Ответ: $\{2\}$.

429 (*почвовед., 2004, № 2*). Решить уравнение

$$|5x + 1| + 7x + 2 = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

430 (*эконом., отд. менеджмента, 2000, № 1*). Решить уравнение

$$3|x+1| + x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = -3$.

431 (*мех-мат, 1984, № 1*). Решить уравнение

$$x^2 + 3x + |x+3| = 0.$$

Ответ: $x_1 = -1; x_2 = -3$.

432 (*геолог., 1990, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1.$$

Ответ: $x = 1$.

433 (*геолог., 2005, № 1*). Решите неравенство

$$(|x| - 1)(2x^2 + x - 1) \leqslant 0.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup \{-1\}$.

434 (*геолог., 2003, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{x+1}{|x-1|} + \frac{1-2x}{x-1} \geqslant 0.$$

Ответ: $[0,1) \cup (1,2]$.

435 (*геолог., 2004, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{x-2}{|x-2|} \leqslant 4 - x^2.$$

Ответ: $[-\sqrt{5}; 2)$.

436 (*ВМК, 1998, № 1*). Решить неравенство

$$2x > \frac{5x+3}{|x+2|}.$$

Ответ: $\left(-\frac{9+\sqrt{57}}{4}; -2\right) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

437 (*ИСАА, 1998, № 3*). Решить неравенство

$$\frac{3|x| - 11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}.$$

Ответ: $(-2; 2) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$.

438 (*географ.*, *2003*, *№ 2*). Решить неравенство

$$\frac{6}{|x|} \geqslant 7 + x.$$

Ответ: $(-\infty; -6] \cup [-1; 0) \cup \left(0; \frac{\sqrt{73}-7}{2}\right]$.

439 (*ФНМ*, *2003*, *апрель*, *№ 3*). Решите неравенство

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geqslant 3.$$

Ответ: $\left[\frac{3}{7}; 1\right) \cup (3; +\infty)$.

440 (*географ.*, *2000*, *№ 2*). Решить уравнение

$$|2x+9| - |x-6| = 15.$$

Ответ: $\{-30; 4\}$.

441 (*психолог.*, *2005*, *№ 1*). Решить уравнение

$$|x+1| + 2|x-2| = 9.$$

Ответ: $x_1 = 4; x_2 = -2$.

442 (*ИСАА*, *1997*, *№ 2*). Решить уравнение

$$4 \cdot |x+1| - 1 = 3 \cdot |2x+5| - 2 \cdot |x+5|.$$

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

443 (*мех-мат*, *1995*, *устный*). Сколько корней имеет уравнение

$$3 - 2|x-1| = 2\left(\left|x - \frac{1}{4}\right| - \left|x + \frac{1}{4}\right| - \frac{3}{2}\right)?$$

Ответ: два.

444 (*мех-мат*, *1995*, *устный*). Сколько корней имеет уравнение

$$\left|x^2 - 2|x| + 1\right| = 3|2-x| - 1?$$

Ответ: два.

445 (*ИСАА*, *2003*, *№ 2*). Решить уравнение

$$(|x|-5)^2 - |5-x| = 30.$$

Ответ: $x_1 = 11, \quad x_2 = \frac{-11-\sqrt{161}}{2}$.

3.2.2. Метод введения новой неизвестной

446* (*биолог., 2005, № 1*). Решить уравнение

$$x^2 + 2|x| - 3 = 0.$$

Ответ: $\{-1; 1\}$.

447 (*почвовед., 2003, № 3*). Решить неравенство

$$\frac{3}{2}x^2 - |x| \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -\frac{2}{3}$; $x \geqslant \frac{2}{3}$; $x = 0$.

448 (*соц., 2005, апрель, № 2*). Решить уравнение

$$3x^2 - 5|x| - 2 = 0.$$

Ответ: $x = \pm 2$.

449 (*геолог., отд. геофизики, 1975, № 1*). Решить уравнение

$$(x-1)^2 + |x-1| - 2 = 0.$$

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

450 (*биолог., 1996, № 2*). Решить уравнение

$$(x-3)^2 - 5 \cdot |x-3| = 24.$$

Ответ: $x_1 = -5$; $x_2 = 11$.

451 (*ВМК, физ., эконом., подгот. отд., 1997, № 2*). Решить неравенство

$$|x+2| \geqslant 3 + \frac{1}{5 - |x+2|}.$$

Ответ: $x < -7$; $x > 3$; $x = 2$; $x = -6$.

452 (*ФНМ, 2004, апрель, № 2*). Решить неравенство

$$|3x+1| + 2 + \frac{3}{|3x+1| - 2} \leqslant \frac{1}{|3x+1| + 2}.$$

Ответ: $-1 < x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}-2}{3} \leqslant x < \frac{1}{3}; x = -\frac{1}{3}$.

453 (*физ., 2004, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{|x-1|}{1 - \dfrac{6}{|x-1|}} < -1.$$

Ответ: $(-5; -1) \cup (3; 7)$.

454 (*геолог., 1998, май, № 6*). Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|-3x+3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3x^2}{2}-\left|\frac{x^2}{2}+x-\sqrt{2}\right|.$$

Ответ: $\left(-\infty;-1-\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}+1}\right)\cup\left(-1+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}+1};+\infty\right)$.

3.2.3. Специальные методы решения

455* (*географ., 2002, № 1*). Решить уравнение

$$|x-2|=\frac{1}{x-2}.$$

Ответ: $x=3$.

456 (*МШЭ, 2005, № 1*). Решить уравнение

$$|2x+3|-2x=3.$$

Ответ: $x\geqslant-\frac{3}{2}$.

457 (*физ., 1983, № 2*). Решить уравнение

$$\left|5x^2-3\right|=2.$$

Ответ: $x_1=1; x_2=-1; x_3=\frac{1}{\sqrt{5}}; x_4=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

458 (*почвовед., 2001, май, № 2*). Решить уравнение

$$|2x+3|=x^2.$$

Ответ: $\{3;-1\}$.

459 (*ВМК, 2003, устный*). Сколько корней имеет уравнение

$$|||x-1|-2|-3|=1?$$

Ответ: 5.

460 (*фил., 2005, № 1*). Решить уравнение

$$\left|x^2-3|x|+1\right|=1.$$

Ответ: $\{0;1;-1;2;-2;3;-3\}$.

461 (*геолог., 1998, № 2*). Решить уравнение

$$\left||4-x^2|-x^2\right|=1.$$

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{3}{2}};\quad\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

462 (*психолог., 1998, № 1*). Решить уравнение

$$|4x - |x-2| + 3| = 16.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{17}{5}; \quad x_2 = \frac{11}{3}.$

463 (*хим., 2005, № 1*). Решить уравнение

$$|2x+1| = |x+2|.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = -1.$

464 (*геолог., 2005, устный*). Решите уравнение

$$|x^2 - 1| = |x^3 - x^2 - 1|.$$

Ответ: $\{0; 2; \sqrt[3]{2}\}.$

465 (*соц., 2000, № 1*). Решить уравнение

$$\left|x^2 - 3x\right| = 2x - 4.$$

Ответ: $x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$

466 (*эконом., отд. кибернетики, 1978, № 1*). Найти все корни уравнения

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1,$$

удовлетворяющие неравенству $x < \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}.$

467 (*эконом., 1989, № 3*). Решить уравнение

$$||3-x| - x + 1| + x = 6.$$

Ответ: $x_1 = -2; x_2 = 4.$

468 (*хим., 2001, май, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{|2x-1|}{|x-1|} = \frac{|2x+1|}{|x+1|}.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

469 (*хим., 1999, май, № 1*). Решить уравнение

$$x^2 + 1 + |x-1| = 2|x|,$$

Ответ: $x = 1.$

470* (*хим., 2001, № 6*). Решить уравнение

$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+\cdots$$
$$\cdots+|x-100|+|x+100|=200x.$$

Ответ: $[100;+\infty)$.

471 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$x^4-7x^2+2x+2=|4x-1|-|2x^2-3|.$$

Ответ: $x_1=1+\sqrt{2}; x_2=1-\sqrt{2}; x_3=-1+\sqrt{3}; x_4=-1-\sqrt{3}$.

472* (*почвовед., 2005, № 3*). Решить неравенство

$$|x-1|\leqslant x.$$

Ответ: $x\geqslant\frac{1}{2}$.

473 (*ВМК, отд. бакалавров, 2005, апрель, № 2*). Решить неравенство

$$\left|x^2-x-1\right|\leqslant 5.$$

Ответ: $[-2;3]$.

474 (*Севастополь, 2004, № 6*). Решить систему неравенств

$$\begin{cases}|x^2-4x|<2,\\|x+1|<5.\end{cases}$$

Ответ: $(2-\sqrt{6};2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2};4)$.

475 (*эконом., отд. полит. экономии, 1969, № 2*). Решить неравенство

$$\left|x^2-1\right|-2x<0.$$

Ответ: $(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1)$.

476 (*ВШБ, 2005, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x-|2x-1|}}\geqslant 0.$$

Ответ: $\frac{1}{3}<x<1$.

477 (*ВШБ, 2004, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{x+1}{|x-1|}\geqslant 1.$$

Ответ: $[0;1)\cup(1;+\infty)$.

478 (*ФГУ, 2003, № 2*). Решите неравенство
$$|2x+8| \geqslant 8-|1-x|.$$

Ответ: $x \leqslant -5$; $x \geqslant -1$.

479 (*ВМК, отд. бакалавров, 2003, № 1*). Решите неравенство
$$3|x+2|-4|x+1| \geqslant 2.$$

Ответ: $-\frac{8}{7} \leqslant x \leqslant 0$.

480 (*физ., 2003, № 2*). Решить неравенство
$$|x^2+3x|+x^2-2 \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -\frac{2}{3}$; $x \geqslant \frac{1}{2}$.

481 (*Севастополь, 2003, май, № 4*). Решите неравенство
$$\left|\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}\right| \leqslant 1.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right] \setminus \{-1\}$.

482 (*геолог., 2001, май, № 1*). Решите неравенство
$$\frac{|x-2|+1}{|2x+3|-7} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-5; 2)$.

483 (*ВМК, 2000, апрель, № 1*). Решить неравенство
$$\left||x^2-8x+2|-x^2\right| \geqslant 2x+2.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$.

484 (*мех-мат, 2004, март, заочный тест, № 1*). Решить неравенство
$$\left|x^3+2x^2+2\right| < \left|x^3+3x^2+3x-2\right|.$$

Ответ: $\left(-4; -\frac{3}{2}\right) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

485 (*мех-мат, 2000, март, № 1*). Решить неравенство
$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}.$$

Ответ: $(3; 4) \cup (4; 7)$.

486 (*мех-мат, 2004, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty, -2-\sqrt{3}] \cup (-0{,}3; -2+\sqrt{3}) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.

487* (*мех-мат, 1968, № 2*). Найти все решения уравнения

$$\log_4\left(6+\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|\right) = \frac{1}{2}+\log_2\left|\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|\right|.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{16}\right\} \cup [4; +\infty)$.

3.3. Уравнения и неравенства, включающие функции max и min

488* (*психолог., 1971, № 3*). Найти все такие x, что наименьшее из чисел $1-x^2$, $\dfrac{1-x}{2}$ больше $\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$.

489 (*ВМК, 2003, устный*). Решить уравнение

$$\max(x, 2-x) = \min(3x, 1+2x).$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}$.

490 (*почвовед., 1990, № 5*). Найти все значения x, при которых наибольшее из значений функций $y = 2x+1$ и $y = x+2$ больше -1.

Ответ: $x > -3$.

491 (*ВМК, 2003, устный*). Решить неравенство

$$\min\left(1-x^2, \frac{1-x}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$.

3.4. Показательные неравенства

3.4.1. Неравенства, приводимые к виду $a^{f(x)} < a^{g(x)}$

492 (*геолог., 1998, устный*). Решить неравенство

$$7^{4x} < 7^{x^3}.$$

Ответ: $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$.

493 (*эконом., отд. полит. экономии, 1980, № 2*). Решить неравенство

$$3^{4x^2-3x+\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}.$$

Ответ: $x < -\frac{1}{6}$; $x > \frac{1}{12}$.

494 (*физ., 1980, № 4*). Решить неравенство

$$2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Ответ: $x > 0$.

495 (*геолог., 1997, май, № 4*). Решить неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2} > (6{,}25)^{x^2-6}.$$

Ответ: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

496 (*хим., 2005, № 2*). Решить неравенство

$$\sqrt{3} \cdot 4^x \leqslant \sqrt{2} \cdot 9^x.$$

Ответ: $x \geqslant \frac{1}{4}$.

497* (*мех-мат, 1993, май, № 1*). Решить неравенство

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{35x} > \frac{1}{7} \cdot 7^{|4x^2-12x-1|}.$$

Ответ: $-\frac{1}{12} < x < 0$; $\frac{1}{12} < x < 6$.

498 (*ВМК, эконом., подгот. отд., 1993, № 1*). Решить неравенство

$$0{,}2^{x^2-4x-9|x-2|+10{,}5} \geqslant \frac{25}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $[-6; 1] \cup [3; 10]$.

499 (*хим., 1982, № 3*). Решить неравенство

$$f(g(x)) < g(f(x)),$$

где $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = 2x + 1$.

Ответ: $x < 0$.

500 (*хим., 1982, № 3*). Решить неравенство

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant (\sqrt{2}-1)^{-x}.$$

Ответ: $(-1;2] \cup [3;+\infty)$.

501 (*геолог., 2002, устный*). Решить неравенство

$$\sqrt[3]{2}^{x^2+4x+1} - \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^x \leqslant 0.$$

Ответ: $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$.

502 (*почвовед., 2000, май, № 3*). Решить неравенство

$$2^{(x^2)} \cdot 3^x < 6.$$

Ответ: $(-1-\log_2 3; 1)$.

503 (*Севастополь, 1999, № 1*). Решить неравенство

$$5^x + |x-4| - 5 > 5^{\log_5 |x-4|}.$$

Ответ: $(1;+\infty) \setminus \{4\}$.

504 (*ИСАА, 2000, № 4*). Решить неравенство

$$(5-2x)^{x^2-4} - \cos^2 5^\circ < (5-2x)^{\frac{1}{\log_{\sin 5^\circ} \sqrt{5-2x}}}.$$

Ответ: $(-2;2) \cup \left(2;\frac{5}{2}\right)$.

505 (*фил., 2002, № 4*). Число a подобрано так, что меньший корень уравнения

$$x^3 + 2x = 4x^2 - 4$$

является одновременно одним из решений неравенства

$$a^{5x-4} > a^{-x^2+4x-4}.$$

Решить это неравенство.

Ответ: $-1 < x < 0$.

506 (*геолог., 1995, № 4*). Решить неравенство

$$\frac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant \log_3 2$; $1 < x < 5$.

507 (*физ., 1993, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{2x - 1}{2^x - 1} < 0.$$

Ответ: $(0; 1/2)$.

508 (*геолог., 1998, устный*). Решить неравенство

$$(x^2 + 2x + 2)^x \geqslant 1.$$

Ответ: $\{-1\} \cup [0; +\infty)$.

509 (*эконом., 2002, № 2*). Решить неравенство

$$\left(\frac{4x}{5} + 1\right)^{6-13x-15x^2} \geqslant 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{6}{5}\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

510 (*ВМК, физ., эконом., подгот. отд., 1994, № 1*). Решить неравенство

$$\left(6x^2 + 2x + 1\right)^{2x^2 - x} \geqslant 1.$$

Ответ: $x \leqslant -\frac{1}{3}$; $x \geqslant \frac{1}{2}$; $x = 0$.

511 (*мех-мат, 1963, № 4*). Решить неравенство

$$\left(x^2 + x + 1\right)^x < 1.$$

Ответ: $(-\infty; -1)$.

512 (*мех-мат, 1965, № 4*). Решить неравенство

$$\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2 - 1} < 1.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}; 2\right)$.

513 (*соц., 1997, № 5*). Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |\sqrt{2}x - 1| = \sqrt{2}x - 1. \end{cases}$$

Ответ: $x > \frac{7}{9}$.

3.4.2. Метод введения новой неизвестной

514 (*эконом., подгот. отд., 1991, № 1*). Решить неравенство

$$9^x - 3^{x+1} + 2 \leqslant 0.$$

Ответ: $[0; \log_3 2]$.

515 (*почвовед., 2004, май, № 3*). Решить неравенство

$$4^x < 2^{x+1} + 3.$$

Ответ: $(-\infty; \log_2 3)$.

516 (*геолог., 1995, № 4*). Решить неравенство

$$25^{-x} - 5^{-x+1} \geqslant 50.$$

Ответ: $x \leqslant -1 - \log_5 2$.

517 (*геолог., 1996, май, № 4*). Решить неравенство

$$2 \cdot 2^{-2x^2} - 7 \cdot 2^{-x^2} + 3 > 0.$$

Ответ: $x > 1; \quad x < -1$.

518 (*мех-мат, 1995, № 1*). Найти наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству

$$4 \cdot 3^{2k+1} + 3^k < 1.$$

Ответ: $k = -2$.

519 (*мех-мат, 1975, № 1*). Решить неравенство

$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geqslant 49^{x^2+5x-49}.$$

Ответ: $[-10; 5]$.

520 (*географ., 1996, май, № 2*). Решить неравенство

$$5 \cdot \left(\frac{8}{125}\right)^x - 13 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 3\right]$.

521 (*хим., 1997, № 2*). Решить неравенство

$$(\sqrt{2}+1)^x + 1 < 2 \cdot (\sqrt{2}-1)^x.$$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

522 (*психолог., 2005, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{25^x - 28}{5^x - 6} \geqslant 3.$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_5 6; +\infty)$.

523 (*хим., 1965, № 4*). Решить неравенство

$$\frac{1}{2^x + 3} > \frac{1}{2^{x+2} - 1}.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2 - \log_2 3; +\infty)$.

524 (*олимпиада «Ломоносов-2005», апрель, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{3 \cdot 7^{1-x} - 4}{1 - 7^x} \leqslant \frac{1}{7^{-x} - 1}.$$

Ответ: $(0; \log_7 3]$.

525 (*ИСАА, 2002, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 3} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty; \log_2 3) \cup [2; +\infty)$.

526 (*фил., 2003, март, № 1*). Решить неравенство

$$(2^x + 5)^{-1} < \left(2^{x+3} - 2\right)^{-1}.$$

Ответ: $(-2; 0)$.

527 (*мех-мат, 1997, май, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{21 - 2^x - 2^{6-x} - |3 - 2^x|}{5 - |3 - 2^x|} \geqslant 1.$$

Ответ: $x > 3$.

528 (*ВМК, отд. бакалавров, 2002, № 3*). Решить неравенство

$$3^{x+2} - 7 \cdot 2^{x+2} \leqslant 3^x - 2^x.$$

Ответ: $x \leqslant 3$.

529 (*мех-мат, 1963, № 4*). Решить неравенство

$$5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.

530 (*хим., 2002, май, № 3*). Решить неравенство
$$30^x \cdot (8 \cdot 5^x + 6^x) \leqslant \left|6^{3x} - 2^{2x+2} \cdot 3^{2x+1} \cdot 5^x + 4 \cdot 5^{x+1} \cdot 30^x\right|.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left[\log_{\frac{6}{5}} 4; \log_{\frac{6}{5}} 7\right] \cup \left[\log_{\frac{6}{5}} 12; +\infty\right)$.

531 (*Севастополь, 2003, № 6*). Решите неравенство
$$x^3 2^{x-2} + 2^{|x-3|+4} \geqslant x^3 2^{|x-3|+1} + 2^{x+1}.$$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

532* (*мех-мат, 1999, № 1*). Решить неравенство
$$3^{(x+2)^2} + \frac{1}{27} \leqslant 3^{x^2-3} + 9^{2x+2}.$$

Ответ: $x \leqslant -\frac{7}{4}$; $\quad x = 0$.

533 (*мех-мат, 2001, май, № 1*). Решить неравенство
$$31^x + 33 \geqslant 11 \cdot (7 - \sqrt{18})^x + 3 \cdot (7 + \sqrt{18})^x.$$

Ответ: $x \leqslant \log_{7+\sqrt{18}} 11$; $\quad x \geqslant \log_{7-\sqrt{18}} 3$.

534 (*Севастополь, 2002, май, № 4*). Решить неравенство
$$\left(9^{x+1} + 3^{x+1} - 1\right)^{x^2+x} \geqslant 1.$$

Ответ: $\{-1\} \cup [0; +\infty)$.

535 (*мех-мат, 2001, заочное тестирование*). Решить неравенство
$$\left(2^x + 0{,}09 \cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{2x}} \geqslant \left(2^x + 0{,}09 \cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{1-x}}.$$

Ответ: $[\log_2 0{,}1; \log_2 0{,}9] \cup \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

536 (*географ., 1972, № 4*). Найти все числа x и y, для которых
$$\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \leqslant 2y. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$; $\quad y = \frac{1}{2}$.

537 (*хим., 1995, № 5*). Найдите множество пар действительных чисел, удовлетворяющих системе
$$\begin{cases} 2^{-x} y^4 - 2y^2 + 2^x \leqslant 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0; 1), (0; -1)\}$.

538 (*мех-мат, 1999, март, № 2*). Решить систему

$$\begin{cases} 2^{x+2} = \dfrac{49}{4}x^2 + 4, \\ 2^{x+2} - 4 \leqslant x^2\left(14 - 2^{x+2}\right) \cdot 2^x. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x = 0$.

3.4.3. Графический метод и метод оценок

539* (*геолог., 2004, устный*). Решите неравенство

$$3^x + 5^x \leqslant 8.$$

ОТВЕТ: $x \leqslant 1$.

540 (*мех-мат, 1979, № 4*). Решить неравенство

$$\frac{6 - 3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x - 1}.$$

ОТВЕТ: $0 < x < \frac{1}{2}$.

3.5. Логарифмические неравенства

3.5.1. Неравенства, приводимые к виду $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

541* (*физ., 2004, март, № 3*). Решить неравенство

$$\log_{32}(x^2 + 3x + 2)^5 + \log_2(x^2 - 3x + 2) < 2.$$

ОТВЕТ: $(-\sqrt{5}; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; \sqrt{5})$.

542 (*физ., 2004, № 3*). Решить неравенство

$$\log_2\left((2 - 2x - x^2)(x + 2)\right) - \log_8\left((4 + 4x + x^2)(8x + 16)\right) + 1 > 0.$$

ОТВЕТ: $(-2; -1 + \sqrt{2})$.

543 (*географ., 2001, № 1*). Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2 - 9) \geqslant 0.$$

ОТВЕТ: $[-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}]$.

544 (*эконом., 2005, № 4*). Решить неравенство

$$\log_{2+\sqrt{3}}(x + 3) - \log_{7-4\sqrt{3}}(4x^2 - 20x + 25) + \log_{2-\sqrt{3}}(x^2 - x - 2) \geqslant 0.$$

ОТВЕТ: $\left[-\sqrt{\frac{17}{3}}; -1\right) \cup \left(2; \sqrt{\frac{17}{3}}\right] \cup [-1 + \sqrt{14}; +\infty)$.

545 (*мех-мат, 1987, № 2*). Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})<2.$$

Ответ: $(-3;-1)$.

546 (*биолог., 1996, № 3*). Решите неравенство

$$2+\log_{\frac{1}{2}}(\log_3(7-x))>0.$$

Ответ: $(-74;6)$.

547 (*геолог., 2003, устный*). Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{(x^2-3x+2)\cdot\lg(3-x)}.$$

Ответ: $(-\infty;1]\cup\{2\}$.

548 (*психолог., 2001, № 2*). Решите неравенство

$$\log_2\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+4}{4x-8}\leqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;-8]\cup(12;+\infty)$.

549 (*Севастополь, 2001, № 4*). Решите неравенство

$$\lg(5x-x^2)-\lg(x^2-3x)\leqslant\lg(x^2-13x+40).$$

Ответ: $\left[\frac{11-\sqrt{21}}{2};5\right)$.

550 (*соц., 2003, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{0,1}(6+x)\leqslant\log_{0,1}x.$$

Ответ: $(0;3]$.

551 (*экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, № 3*). Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4.$$

Ответ: $1<x<3$.

552 (*почвовед., 1994, № 3*). Решите неравенство

$$\lg(x+5)\geqslant -2\lg\frac{1}{3-x}.$$

Ответ: $\frac{7-\sqrt{33}}{2}\leqslant x<3$.

553 (*почвовед., 1994, май, № 3*). Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_x 2} - \log_2 \frac{1}{x} \leqslant 2.$$

Ответ: $(0;1) \cup (1;2]$.

554 (*эконом., 1980, № 1*). Решите неравенство

$$\log_5 (26 - 3^x) > 2.$$

Ответ: $x < 0$.

555 (*географ., 1995, май, № 2*). Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\pi}} \left(\log_{\frac{1}{3}} (\log_5 x)\right) > 0.$$

Ответ: $(1; \sqrt[3]{5})$.

556 (*ВМК, отд. бакалавров, 2004, № 1*). Решите неравенство

$$\log_{4x-3}(15 - 16x) \leqslant 0.$$

Ответ: $\frac{3}{4} < x \leqslant \frac{7}{8}$.

557 (*ВМК, 2005, № 1*). Решить неравенство

$$\log_2 \left(\frac{x^2 + |x-3| + 3}{x+1}\right)^2 - |\log_2 x - 2| > \log_2 x + 2.$$

Ответ: $\left(0; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$.

558 (*психолог., 2002, № 2*). Решите неравенство

$$\log_{x+2}(x^2 + 5x - 6) > 2.$$

Ответ: $(10; +\infty)$.

559 (*психолог., 2004, № 2*). Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-2}{2x-10}} \left(\frac{x+2}{4}\right) \leqslant 1.$$

Ответ: $[-1;2) \cup (5;6] \cup (8;+\infty)$.

560 (*соц., 2005, апрель, № 3*). Решить неравенство

$$\log_{|x+1|} \left(\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right) > \log_{|x+1|} \left(\frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}\right).$$

Ответ: $-\frac{5}{6} < x < 0$.

561 (*хим., 2002, № 3*). Решите неравенство

$$\log_{17-x^2}(56-x^2+10x) \leqslant \frac{1}{2}\left(\log_{3+\sqrt{7}}(8+3\sqrt{7})+\log_{3+\sqrt{7}} 2\right).$$

Ответ: $(-4;-3{,}9]\cup(4;\sqrt{17})$.

562 (*геолог., 2004, № 5*). Решите неравенство

$$\log_{3-x}(x^2-10x+25)-2\log_{3-x}(4x-x^2+5)+2\leqslant 0.$$

Ответ: $1\leqslant x<2$.

563 (*эконом., отд. менеджмента, 2004, № 4*). Решить неравенство

$$2\log_{x+1}(1-2x)\cdot\log_{1-4x+4x^2}(x+3)+\log_{\frac{1}{x+1}}(x^2+7x+12)\leqslant 0.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

564 (*эконом., 2004, № 4*). Решить неравенство

$$\log_{x+4}(2x+7)\cdot\log_{4x^2+28x+49}(x^2-4x+4)+\log_{\frac{1}{4}-\frac{x}{4x+16}}(x^2-5x+6)\geqslant 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{7}{2};-3\right)\cup(3;4]$.

565 (*мех-мат, 1988, № 2*). Решите неравенство

$$\log_{5x-4x^2} 4^{-x}>0.$$

Ответ: $(0;1/4)\cup(1;5/4)$.

566 (*мех-мат, 1997, март, № 2*). Решить неравенство

$$\log_{(x-1)}\frac{x^2-x-6}{2x-8}\leqslant 1.$$

Ответ: $(1;2)\cup(2;3)\cup[7;+\infty)$.

567 (*мех-мат, 1997, № 2*). Решить неравенство

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot\log_{13-3\cdot 2^x} 4\leqslant 1.$$

Ответ: $[-\log_2 3;2)\cup(2;\log_2 13-\log_2 3)$.

568 (*геолог., 1997, № 4*). Решить неравенство

$$17^{\log_{\frac{1}{17}}\log_3 x}<3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_{17} x}.$$

Ответ: $(1;+\infty)$.

569 (*почвовед., 2000, № 4*). Решите неравенство

$$\log_{4-x} 3 < \log_x 3.$$

Ответ: $(1; 2) \cup (3; 4)$.

570 (*фил., 2001, № 2*). Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}.$$

Ответ: $x > 1$.

571 (*психолог., 2000, № 4*). Решите неравенство

$$2 + \log_{\sqrt{x^2-2x-3}} \frac{x+4}{x+1} \geqslant \log_{x^2-2x-3}(x^2-2x-2)^2.$$

Ответ: $(3; 1+\sqrt{5}) \cup [10/3; +\infty)$.

572 (*геолог., 2003, май, № 2*). Решите неравенство

$$\log_{-2-x}(-3-2x) \geqslant \log_{-2-x}\left(-\frac{3x}{2}\right).$$

Ответ: $x \leqslant -6, -3 < x < -2$.

573 (*географ., 1994, № 3*). Решите неравенство

$$\log_x(2-x-x^2) > 0.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$.

574 (*почвовед., 1993, № 3*). Решите неравенство

$$\log_{9x^2+1} 37 > 1.$$

Ответ: $(-2; 0) \cup (0; 2)$.

575 (*эконом., 2000, № 3*). Решите неравенство

$$\frac{\log_3(x^2-6x+5)}{\log_3(x^2-3)} \leqslant \frac{\log_2 5}{\log_2(x^2-3)}.$$

Ответ: $(-2; -\sqrt{3}) \cup (5; 6]$.

576 (*ВМК, 1998, № 2*). Решите неравенство

$$\log_2(5-x) \cdot \log_{x+1} \frac{1}{8} \geqslant -6.$$

Ответ: $(-1; 0) \cup [1; 5)$.

577 (*хим., 1999, № 3*). Решить неравенство

$$(\log_{3-x}(2x+1)) \cdot (\log_{2x+1} x^2) \leqslant (\log_{3-x}(3x+1)) \cdot (\log_{3x+1}(x+2)).$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 3\right) \setminus \{0; 2\}$.

578 (*эконом., отд. менеджмента, 1995, № 3*). Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{3x+1}} \left(x - \frac{1}{3}\right) \geqslant 1.$$

Ответ: $\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3}$.

579 (*эконом., 1998, № 1*). Решить неравенство

$$\log_{\frac{4x-1}{11}} (7x - 2x^2) \leqslant 0.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 3\right) \cup \left[\frac{7+\sqrt{41}}{4}; \frac{7}{2}\right)$.

580 (*мех-мат, 1998, № 2*). Решите неравенство

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}} (10x^2 + x - 2) \leqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0{,}4; 0{,}5] \cup (1; +\infty)$.

581 (*эконом., 1999, № 3*). Решить неравенство

$$\log_{|x|-2} |x-3| \leqslant 0.$$

Ответ: $(-3; -2) \cup (3; 4]$.

582 (*эконом., отд. менеджмента, 1999, № 1*). Решить неравенство

$$\log_{1+|7x+17|} (|3x+8| + |7x+17|) \leqslant 1.$$

Ответ: $\left[-3; -\frac{17}{7}\right) \cup \left(-\frac{17}{7}; -\frac{7}{3}\right]$.

583 (*почвовед., 2003, май, № 5*). Решить неравенство

$$\log_{-4x^2+12x-8} |4x-5| > 0.$$

Ответ: $1 < x < \frac{5}{4}$; $\quad \frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$.

584 (*ВМК, 1997, № 2*). Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{1-x^2}} 2 < \log_{2x^2} \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

585 (*физ., 2003, май, № 3*). Решить неравенство

$$[\log_5(x^2-5x+6)]^{-1} < \log_{20}5.$$

Ответ: $x<-2$; $\dfrac{5-3\sqrt5}{2}<x<2$; $3<x<\dfrac{5+3\sqrt5}{2}$; $x>7$.

586 (*геолог., 2005, № 6*). Решите неравенство

$$\log_x\left(x+\frac13\right)\leqslant\log_{\sqrt{2x+3}}\left(x+\frac13\right).$$

Ответ: $\left[\dfrac23;1\right]\cup[3;+\infty)$.

587 (*ВМК, 2003, № 1*). Решить неравенство

$$\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\frac{6}{x+1}\right)\geqslant -1.$$

Ответ: $(-1,1)\cup[2{,}3)$.

588 (*мех-мат, 1993, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1}11}\geqslant\frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123}11}.$$

Ответ: $(-1;0)$.

589 (*МШЭ, 2005, № 4*). Найдите множество определения функции

$$y=\sqrt{\log_{\frac12}\left(2\cdot9^{-x}-3^{-x}\right)}.$$

Ответ: $0\leqslant x<\log_3 2$.

590 (*мех-мат, 2001, № 1*). Решите неравенство

$$x\leqslant\log_5\left(16\cdot15^x-15^{1+2x}\right)-\log_3\left(16\cdot5^x-3^{1+x}\cdot5^{1+2x}\right).$$

Ответ: $(-\infty;-1]\cup[0;\log_{15}16-1)$.

591 (*биолог., ФФМ, биоинж., 2004, № 4*). Решить неравенство

$$\log_{(2^x-2)^2}\left(4^{x+1}-5\cdot2^{x+2}+24\right)-$$
$$-\log_{(2^x-2)^{-2}}\left(2^{2x-2}-7\cdot2^{x-2}+\frac52\right)\geqslant\frac32.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup\left[\log_2\dfrac{9+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$.

592 (*мех-мат, 1965, № 3*). Решить неравенство

$$\log_x\left(\log_2\left(4^x-6\right)\right)\leqslant 1.$$

Ответ: $\dfrac12\log_2 7<x\leqslant\log_2 3$.

593 (*биолог., 1981, № 4*). Решите неравенство

$$\left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1.$$

Ответ: $x > 3$.

594 (*мех-мат, 2002, март, № 1*). Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(6 - x - x^2) + \log_2(x^2 - 2x + 1) + 2 > 2\log_4(x^2 - 4x + 3)^2.$$

Ответ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{73}}{4}; 1\right) \cup \left(1; \dfrac{-1+\sqrt{73}}{4}\right)$.

595 (*мех-мат, 1994, май, № 4*). Найдите все значения x, при которых наибольшее из чисел $3x - 4$ и $\log_2\left(5\cdot 2^{2x-4} - 2^{x-1} + 1\right)$ положительно.

Ответ: $x > 3 - \log_2 5$.

596 (*хим., 2003, май, № 2*). Решить неравенство

$$x\cdot\log_2 x + 1 \geqslant \log_2 x\cdot\log_3 2 + x\cdot\log_2 3.$$

Ответ: $(0; \log_3 2] \cup [3; +\infty)$.

597 (*ВМК, 1995, апрель, № 2*). Решить уравнение

$$\left|\log_{3x}(x^2 - 6x + 8) - 1\right| = 1 - \log_{3x}(x^2 - 6x + 8).$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup [1; 2) \cup (4; 8]$.

598 (*ВМК, 1999, апрель, № 2*). Решить неравенство

$$\left(x + \frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2 - 4x + 4)\right| \geqslant 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2 - 4x + 4)\right|.$$

Ответ: $x \geqslant 8$; $x = 3$.

599 (*мех-мат, 2004, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{\log_4(2-x) - \log_6(2-x)}{\log_6 x - \log_9 x} \leqslant \log_4 9.$$

Ответ: $(0; 2) \setminus \{1\}$.

600 (*мех-мат, 1998, май, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{1 + \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4} + \log_{\frac{1}{2}}(13 - x)}{|x^2 + 2x - 3| - |2x^2 - 10x + 8|} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-4; 1) \cup \left(1; \dfrac{5}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5}{3}; 11\right)$.

601 (*геолог., 1999, май, № 5*). Решить неравенство

$$2 < \left|2\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 4\right| < 3.$$

ОТВЕТ: $\left[\dfrac{\sqrt{2}-16}{48}; -\dfrac{7}{24}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{\sqrt{2}-2}{6}\right]$.

602 (*фил., 1969, № 3*). Решить неравенство

$$[\log_2 x - \log_4(x+3)]^{x-4} > 1.$$

ОТВЕТ: $\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; 4\right) \cup (6; +\infty)$.

603 (*физ., 2003, март, № 3*). Решить неравенство

$$(4^x - 2\cdot 2^x - 3)\log_2 x - 3 \geqslant 4^{\frac{x+1}{2}} - 4^x.$$

ОТВЕТ: $0 < x \leqslant 1/2$, $x \geqslant \log_2 3$.

604 (*физ., 2003, март, № 2*). Решить неравенство

$$7\log_3{(2+x)}^8 < 8\log_2{(-x+1)}^7 \cdot \log_3 2.$$

ОТВЕТ: $x < -2$; $-2 < x < -1/2$.

605 (*почвовед., 2004, № 4*). Решить неравенство

$$\log_{0,5}\left(2^{x+1} - 3\right) \geqslant x - 1.$$

ОТВЕТ: $(\log_2 3 - 1; 1]$.

606 (*мех-мат, 2004, март, № 2*). Решить неравенство

$$3^{\log_x(3x^2+2x-1)} \leqslant \left(x^2+x\right)^{\log_x 9}.$$

ОТВЕТ: $[\sqrt{2}-1; +\infty) \setminus \{1\}$.

3.5.2. Метод введения новой неизвестной

607 (*фил., 2000, № 3*). Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \leqslant 2.$$

ОТВЕТ: $(0; 1) \cup (4; +\infty) \cup \{2\}$.

608 (*фил., 2005, № 3*). Решить неравенство

$$\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16.$$

ОТВЕТ: $\left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (3; +\infty)$.

609 (*Севастополь, 2005, № 5*). Решите неравенство
$$\log_4(16x^2)+\sqrt{\log_2 x+1}\leqslant 1.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

610 (*ИСАА, 2005, № 5*). Решить неравенство
$$\log_{(2|x|+1)}(3x+2)-\log_{(3x+2)}(2|x|+1)>0.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};0\right)\cup(0;+\infty)$.

611 (*геолог., 1998, № 5*). Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)}+\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left(2;\frac{19}{9}\right)\cup(3;2+\sqrt{3})$.

612 (*мех-мат, 1995, № 2*). Решите неравенство
$$\frac{2}{\dfrac{2}{\log_2 x}-1}>-3.$$

Ответ: $(0;1)\cup(1;4)\cup(64;+\infty)$.

613 (*ВМК, 1991, № 3*). Решить неравенство
$$49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\geqslant 0.$$

Ответ: $1<x\leqslant 5^{\log_2 7}$.

614* (*ВМК, 2005, апрель, № 1*). Решить неравенство
$$6\log_{2x}x+2\log_{4\sqrt{x}}(2x)\geqslant 1.$$

Ответ: $0<x<\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}\leqslant x<\frac{1}{2}$, $x\geqslant 1$.

615 (*психолог., 1986, № 3*). Решите неравенство
$$\frac{6-\lg x^4}{3+2\lg x^2}<2.$$

Ответ: $x<-1$; $\quad -10^{-\frac{3}{4}}<x<0$; $\quad 0<x<10^{-\frac{3}{4}}$; $\quad x>1$.

616 (*геолог., 1990, № 4*). Решите неравенство
$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{x^7}\right)+2}{\log_9 x^6}\geqslant\frac{5}{\log_x 3}+2.$$

Ответ: $0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $1<x\leqslant\sqrt[5]{9}$.

617 (*географ., 1992, № 3*). Решите неравенство

$$(\log_x 2 - 1)\log_2(2x) \leqslant \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; 1\right) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

618 (*мех-мат, 1963, № 2*). Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \frac{5}{2}.$$

Ответ: $(0;1) \cup \left(\sqrt{3}; 9\right)$.

619 (*ИСАА, 1997, № 4*). Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} |x-2| - \log_{2-x} 3 \leqslant 2.$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

620 (*ВМК, 1987, № 3*). Решите неравенство

$$\log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4(x+1) \geqslant 9\frac{1}{4}.$$

Ответ: $(0; \sqrt[6]{2} - 1] \cup [63; +\infty)$.

621 (*ВМК, 1998, апрель, № 1*). Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2\left(\frac{4}{x}\right)} \geqslant \log_2 \frac{x}{8} - 1.$$

Ответ: $(0;4) \cup \{8\}$.

622 (*ВКНМ, 1997, № 2*). Решите неравенство

$$\log_2^2 x^{\sqrt{2}} \geqslant \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x^{7/2}}{8}\right).$$

Ответ: $0 < x \leqslant 2\sqrt{2}$; $\quad x \geqslant 4$.

623 (*биолог., ФФМ, 2000, № 4*). Решите неравенство

$$\log_4\left(16 \cdot (x-2)^2\right) \cdot \log^2_{\frac{1}{16}} \frac{(x-2)^4}{64} - \frac{5}{4}\log_{64}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)^2 < \frac{15}{2}.$$

Ответ: $(-6; 10) \setminus \left\{\frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}\right\}$.

624 (*физ., 2003, № 3*). Решить неравенство

$$\log_{25}(5^x - 1) \cdot \log_5(5^{x+2} - 25) < 4.$$

Ответ: $\log_5 626 - 4 < x < \log_5 26$.

625 (*мех-мат, 1986, № 3*). Решите неравенство

$$\frac{1}{4}\cdot x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geqslant 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}.$$

Ответ: $0 < x \leqslant 2^{-2\sqrt{2}}$; $\quad x \geqslant 2^{2\sqrt{2}}$.

626 (*физ., 1966, № 1*). Решить неравенство

$$x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} > 1000.$$

Ответ: $x > 1000$.

627 (*эконом., 1987, № 4*). Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3.$$

Ответ: $(2; 5/2) \cup (5/2; 3)$.

628 (*фил., 1974, № 4*). Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$u^3(x) - 6u^2(x) + 8u(x) \leqslant 0,$$

где $u(x) = \log_2 \dfrac{4x-1}{3x+1}$.

Ответ: $\frac{1}{4} < x \leqslant 2$; $\quad -\frac{5}{8} \leqslant x \leqslant -\frac{17}{44}$.

629 (*эконом., 2001, № 4*). Решите неравенство

$$\log_2(2^x - 3)\cdot\log_{\sqrt{2}}\left(4^{x+2} - 12\cdot 2^{x+3} + 144\right) < 32.$$

Ответ: $2\log_2 7 - 4 < x < \log_2 7$.

630 (*ИСАА, 2003, № 5*). Решить неравенство

$$\sqrt{(x^2+8x+15)(256x^2-24x-1)}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\log_{4x^2}(2x^2)\cdot\log_{8x^4}(4x^4)-1}} - 1\right] \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -5; -3 \leqslant x \leqslant -2^{-2/3}$, $x \geqslant 2^{-2/3}$, $x = \frac{1}{8}, x = -\frac{1}{32}$.

631 (*ВМК, 1999, № 3*). Решите неравенство

$$\left|\log_{-2x-1}\sqrt{(2x+5)^6} + 3\right| \leqslant -4 + \log_{\frac{1}{-2x-1}}\sqrt{(2x+5)^8}.$$

Ответ: $\left[\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left(-1; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]$.

632 (*мех-мат, 2001, март, № 2*). Решите неравенство

$$\frac{\log_{(16-6x-x^2)}(x+8)}{\log_{2-x}(16-6x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

Ответ: $(-8; 2) \setminus \{1; -3; -3+\sqrt{24}; -3-\sqrt{24}\}$.

633 (*ВМК, 2002, апрель, № 2*). Решите неравенство

$$\left|3-\log_2(9x^2-30x+25)\right|\cdot\log_{5-3x}\left(\frac{1}{16}\right)\geqslant -4.$$

Ответ: $[-1;1]\cup\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$.

634 (*мех-мат, 2003, май, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{1}{|7-\log_3 3x|}+\frac{1}{|4-\log_9 9x^2|}\leqslant\frac{1}{|\log_9 81x|}.$$

Ответ: $(0;1]\setminus\left\{\frac{1}{81}\right\}$.

635 (*ВШБ, 2003, апрель, № 5*). Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{\frac{4}{x}}\frac{1}{2}-\log_2(2x)\cdot\log_{\frac{8}{x}}\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $\{2\}\cup(4;8)$.

636 (*ФГУ, 2001, № 5*). Решите неравенство

$$\log_4\left(4^x-1\right)\cdot\log_{16}\left(16^{x+1}-8\cdot 4^{x+1}+16\right)>12.$$

Ответ: $0<x<\log_4 257-4;\quad \log_4 65<x<+\infty$.

637 (*мех-мат, 2004, март, заочный тест, № 2*). Решить неравенство

$$2^{1+\sqrt{\log_2 x}}+2x^{-\sqrt{\log_x 2}}\leqslant 5.$$

Ответ: $(0;1)\cup(1;2]$.

638 (*геолог., 2005, устный*). Решите неравенство

$$x^{\log_2 9}+3^{\log_2 x}\leqslant 2.$$

Ответ: $(0;1]$.

3.5.3. Графические методы и метод оценок

639* (*почвовед., 1990, № 6*). Решите неравенство

$$\log_2(2-3x)>4x+1.$$

Ответ: $x<0$.

640 (*мех-мат, 1979, № 4*). Решите неравенство

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

641 (*фил., 1987, № 5*). Решите неравенство

$$\frac{9}{3x+2} > \frac{1+\log_3(x+6)}{x}.$$

ОТВЕТ: $-\frac{2}{3} < x < 0$.

642* (*МК-МГУ, 2006, № 4*). Решить неравенство

$$5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \leqslant 10.$$

ОТВЕТ: $x = 2$, $0 < x < 1$.

643 (*биолог., 2002, № 4*). Решите неравенство

$$\log_2^2 |2x| - 5\log_2 |2x| + 2|x| \log_2 |2x| - 4|x| + 6 \geqslant 0.$$

ОТВЕТ: $(-\infty; -2] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$.

644 (*ВМК, 1999, устный*). Решить неравенство

$$\log_2(\sqrt{x}+1) \cdot \log_3(x+2) \leqslant 1.$$

ОТВЕТ: $[0; 1]$.

645 (*ВМК, 2005, устный*). Решить неравенство

$$\log_2(2+\sqrt{x+3}) \cdot \log_2(1+\sqrt{x}) \leqslant 2.$$

ОТВЕТ: $[0; 1]$.

646 (*ФГП, 2005, № 3*). Решите неравенство

$$\log_{(0.5-|2x^2-5x+2|)} \left(0.5 + |8x^2 - 2x - 1|\right) \geqslant 1.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{1}{2}$.

647 (*хим., 2003, № 3*). Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x|) > \log_{\sqrt{10}}(1-x^2).$$

ОТВЕТ: $(-1; 1)$.

648 (*ФНМ, 2001, апрель, № 5*). Решить неравенство

$$\frac{1}{3}\log_{x+2}(x^3 + 5{,}5x^2 + 10{,}2x + 6{,}385) \leqslant 1.$$

ОТВЕТ: $[-1{,}9; -1{,}7] \cup (-1; +\infty)$.

649 (*почвовед., 1976, № 5*). Решите неравенство

$$\log_{x\sqrt[6]{3}}(3x^6 + 2x^2 - 6) > 6.$$

ОТВЕТ: $x > \sqrt{3}$.

650 (*ВМК, 2002, 2005, устный*). Решить неравенство

$$\log_3^2(x+y)+\log_3^2(xy)\leqslant 2\log_3(x+y)-1.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{3+\sqrt5}{2};\frac{3-\sqrt5}{2}\right),\left(\frac{3-\sqrt5}{2};\frac{3+\sqrt5}{2}\right)\right\}$.

651 (*ВМК, 2005, устный*). Решите неравенство

$$1+\log_3\left(\frac1x+\frac1y\right)\cdot\log_3(x^2y+xy^2)\leqslant 2\left(\log_3(x+y)-\log_3^2(xy)\right).$$

Ответ: $\left(\frac{3+\sqrt5}{2};\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt5}{2};\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$.

3.6. Неравенства с радикалами

3.6.1. Метод введения новой неизвестной

652* (*почвовед., 1999, май, № 3*). Решить неравенство

$$3\cdot 4^{\sqrt{2-x}}+3<10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}.$$

Ответ: $\left(2-\log_2^2 3;2\right]$.

653 (*геолог., 1997, № 3*). Решить неравенство

$$30>\frac{x}{60-\sqrt{x}}.$$

Ответ: $[0;900)\cup(3600;+\infty)$.

654 (*эконом., отд. полит. экономии, 1968, № 4*). Решить неравенство

$$-9\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18\geqslant 0.$$

Ответ: $[0;81]\cup[1296;+\infty)$.

655 (*эконом., 1998, № 3*). Решить неравенство

$$\sqrt{x+8(3-\sqrt{8+x})}<\frac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}.$$

Ответ: $(17;248)$.

656 (*эконом., 1999, № 2*). Решить неравенство

$$4\cdot\sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14}\leqslant 14\cdot\sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x-1}}.$$

Ответ: $(0;3]$.

657* (*биолог., 2005, № 4*). Решить неравенство
$$\sqrt{x-1} < 3 - x.$$

Ответ: $[1;2)$.

658* (*хим., 1998, № 2*). Решить неравенство
$$\sqrt{x+4} > x + 2.$$

Ответ: $[-4;0)$.

659 (*ВМК, отд. бакалавров, апрель 2005, № 1*). Решить неравенство
$$\sqrt{x+2} > x - 4.$$

Ответ: $[-2;7)$.

660 (*соц., 2005, № 5*). Решить неравенство
$$\log_{0,5}\left(\sqrt{5-x} - x + 1\right) > -3.$$

Ответ: $-4 < x < \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

661 (*мех-мат, 1965, № 2*). Решить неравенство
$$\log_2\left(\sqrt{x+3} - x - 1\right) \leqslant 0.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2} \leqslant x < 1$.

662 (*ИСАА, 1998, № 5*). Решить неравенство
$$\log_{2x-3}\left(\sqrt{x+2} + x - 3\right) \leqslant 1.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};2\right) \cup (2;+\infty)$.

663 (*психолог., 2003, № 3*). Решить неравенство
$$|3x+1| + \sqrt{3x+4} \leqslant 3.$$

Ответ: $x = -\frac{4}{3}$; $\quad -1 \leqslant x \leqslant 0$.

664 (*психолог., 1999, № 1*). Решить неравенство
$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$$

Ответ: $\left(\frac{4}{7}; \frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$.

665 (*географ., 2005, № 3*). Решить неравенство
$$\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \geqslant -2.$$

Ответ: $\frac{4}{5} \leqslant x < 1$.

3.6.2. Решение возведением в степень

666 (*ИСАА, 2004, № 1*). Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-25}\cdot(x+3)<0.$$

Ответ: $x<-5$.

667 (*географ., 2004, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^6-64}}{x-3}\geqslant 0.$$

Ответ: $x>3; x=\pm 2$.

668 (*МШЭ, 2005, № 2*). Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-2x}+1>x.$$

Ответ: $x\leqslant 0$.

669 (*геолог., 2005, № 2*). Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2-x+6}-x\geqslant 2.$$

Ответ: $\left[-3;\dfrac{\sqrt{41}-5}{4}\right]$.

670 (*физ., 2005, № 2*). Решить неравенство

$$\sqrt{5x-x^2+6}<\sqrt{6}-x.$$

Ответ: $[-1;0)$.

671 (*ФГУ, 2005, № 2*). Решите неравенство

$$1<\frac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}.$$

Ответ: $(5;+\infty)$.

672 (*геолог., 2005, устный*). Решите неравенство

$$\sqrt{5-|x+1|}\leqslant x-1.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{4};4\right]$.

673 (*геолог., отд. геофизики, 1984, № 2*). Найти все решения неравенства

$$\sqrt{2x^2-6x+4}<x+2.$$

Ответ: $(0;1]\cup[2;10)$.

674 (*эконом., 2003, № 1*). Решить неравенство

$$\sqrt{8+2x-x^2}\leqslant 2x+1.$$

Ответ: $[1;4]$.

675 (*геолог., 2004, № 3*). Решите неравенство

$$\sqrt{441-x^2} \leqslant x+21.$$

Ответ: $[0;21] \cup \{-21\}$.

676 (*мех-мат, 2003, март, № 2*). Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}} \leqslant x^3.$$

Ответ: $x=0$; $\sqrt[4]{\frac{5}{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{2}$.

677 (*геолог., 2004, устный*). Решите неравенство

$$\sqrt{5-|x+1|} \leqslant 2+x.$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 4$.

678 (*геолог., 2004, устный*). Решите неравенство

$$\sqrt{x(x+4)}+(x+4)\sqrt{\frac{x}{x+4}} \leqslant x+8.$$

Ответ: $\left[-\frac{8}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right] \setminus \{-4\}$.

679 (*мех-мат, 1996, № 2*). Решить неравенство

$$\sqrt{8\cdot 16^x-\frac{1}{2}\cdot 9^x} \leqslant 3\cdot 4^x-3^x.$$

Ответ: $x \geqslant \log_{\frac{4}{3}}\left(3+\frac{\sqrt{30}}{2}\right)$.

680 (*биолог., 1980, № 3*). Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x.$$

Ответ: $(3;5]$.

681 (*геолог., 2004, устный*). Решите неравенство

$$\sqrt{7+x} \geqslant 7-2x.$$

Ответ: $x \geqslant 2$.

682 (*физ., 2003, май, № 5*). Решить неравенство

$$\sqrt{12x^2+42x+1}+|2x^2+7x| \geqslant 9.$$

Ответ: $x \leqslant -4$; $x \geqslant \frac{1}{2}$.

683 (*мех-мат, 1998, № 1*). Решить неравенство

$$3 \cdot \sqrt{|x+1|-3} \geqslant \sqrt{x^2-2x-3}.$$

Ответ: $\left[3; \dfrac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$.

684 (*олимпиада «Ломоносов-2005», апрель, № 6*). Решить неравенство

$$3|x| \leqslant x\left(3x+2-2\sqrt{6+x-x^2}\right).$$

Ответ: $\left[-2; \dfrac{\sqrt{156}-13}{13}\right] \cup \left[\dfrac{23}{13}; 3\right] \cup \{0\}$.

685 (*ВМК, 2001, устный*). Решить неравенство

$$4\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{16}{x}} < x.$$

Ответ: $[4; +\infty) \setminus \left\{\dfrac{1+\sqrt{65}}{2}\right\}$.

686 (*ВМК, 2002, устный*). Решить неравенство

$$\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}} \leqslant x^2.$$

Ответ: $x \geqslant \sqrt[4]{12}$ или $x \leqslant -\sqrt[4]{12}$.

687 (*мех-мат, 1998, март, № 3*). Решить неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}x+1\right) \cdot \log_3(-2x-x^2) \geqslant$$
$$\geqslant \log_3\left(\frac{1}{2}|x|+\frac{3}{2}\right) \cdot \log_2(-2x-x^2).$$

Ответ: $\left(-2; -\dfrac{3}{2}\right] \cup \{-1\}$.

3.6.3. Более сложные преобразования

688 (*геолог., 1999, май, № 7*). Решить неравенство

$$\sqrt{4x-x^2-3} \geqslant \sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}.$$

Ответ: $x = 3$.

689 (*хим., 2004, № 3*). Решить неравенство

$$\sqrt{\log_5 x+3}-\sqrt{\log_5 x-2} < \sqrt{\log_5 x-1}.$$

Ответ: $x > 5^{\frac{2\sqrt{21}}{3}}$.

690 (*ИСАА, 1999, № 5*). Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7} \geqslant 1.$$

Ответ: $(-\infty; -11) \cup [\sqrt{5}; 3)$.

691 (*хим., 1997, май, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}-\dfrac{x+1}{2x}\right)^2} \geqslant 0.$$

Ответ: $(0; 2] \setminus \left\{\frac{1}{5}; 1\right\}$.

692 (*ВМК, 1997, апрель, № 1*). Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}(x-2)} \geqslant 1.$$

Ответ: $\left(2; 2+\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}\right]$.

693 (*ВМК, 1998, апрель, № 2*). Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x-4}-3\right| > \left|\sqrt{9-x}-2\right|+1.$$

Ответ: $[4; 6{,}5)$.

694 (*геолог., 1997, май, № 1*). Решить неравенство

$$\sqrt{|x+2|-2} > \sqrt{|x+2|-1997}.$$

Ответ: $(-\infty; -1999] \cup [1995; +\infty)$.

695 (*эконом., отд. менеджмента, 1998, № 1*). Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+3x+2} < 1+\sqrt{x^2-x+1}.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[-1; \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)$.

696 (*мех-мат, 2003, март, тест перед олимпиадой, № 7*). Решить неравенство

$$\sqrt{6x-3x^2}-2\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{6x-5-x^2} > 3-x.$$

Ответ: $x=2$.

697 (*мех-мат, 2003, № 1*). Решить неравенство

$$2\sqrt{\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4}}}+3\sqrt{\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}}} \leqslant 5\sqrt{x+5}.$$

Ответ: $x=-4$.

698 (*геолог., 2003, май, № 4*). Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-6x-7}}{x-7} \geqslant \frac{x+1}{3}.$$

Ответ: $x \leqslant -2, x = -1, 7 < x \leqslant 8$.

699 (*биолог., 2003, апрель, № 2*). Решить неравенство

$$1 - \sqrt{\frac{1-x}{7-4x}} \leqslant x.$$

Ответ: $\left[\frac{3}{4}; 1\right] \cup \left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

700 (*географ., биоинж., 2003, май, № 3*). Решить неравенство:

$$2\sqrt{9-x^2} < x + 3\left(\sqrt{2}+1\right) - \left|x + 3\left(\sqrt{2}-1\right)\right|.$$

Ответ: $\left[-3; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup (0; 3]$.

701 (*ФФМ, 2003, май, № 3*). Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{4+x} \leqslant \sqrt{x+3}.$$

Ответ: $\left[\frac{-1-2\sqrt{29}}{5}; 2\right]$.

702 (*ВШБ, 2003, № 1*). Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{(x+5)(x-3)}}{x+5} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty; 5) \cup \{3\}$.

703 (*ВШБ, 2003, апрель, № 3*). Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x+4} - 2\right| > \frac{6}{\sqrt{x+4}-3}.$$

Ответ: $[-4; 5) \cup (21; +\infty)$.

704 (*биолог., ФФМ, биоинж., 2003, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x} \geqslant -1.$$

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2) \cup \left[\frac{8+\sqrt{10}}{3}; +\infty\right)$.

705 (*мех-мат, 1963, № 2*). Решить неравенство

$$4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6.$$

Ответ: $(0; \log_3^2 2) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

706 (*мех-мат, 2002, май, № 2*). Решить неравенство

$$\sqrt[3]{2x - x\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{1 - 2x} \leqslant 0.$$

Ответ: $\{0\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

707* (*мех-мат, 1996, март, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{x^3 - 27 + 9x(3 - x)}{|3 - 2x|} \leqslant \sqrt{2x - 3}.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; 6\right]$.

708 (*ВМК, 2004, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} \geqslant |x| - 2.$$

Ответ: $(-3; -2] \cup \left[\frac{3-\sqrt{31}}{2}; \frac{\sqrt{23}-1}{2}\right] \cup [2; 5)$.

709 (*ФГУ, 2004, № 5*). Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\min\left(\log_3(3x + 5), \sqrt{x^2 - x - 2}\right) < 2.$$

Ответ: $-\frac{5}{3} < x \leqslant -1$; $2 \leqslant x < 3$.

710 (*ВМК, 1990, № 4*). Решить неравенство

$$\sqrt{9v^2 - 48v - 21} + \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \leqslant |3v - 6|.$$

Ответ: $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9}; \frac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \cup \left[\frac{17+\sqrt{349}}{6}; \frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.

711 (*ВМК, 2001, № 6*). Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot f(x^2 - 2x - 112) + \left|f(x^2 - 2x - 112) - 3 \cdot f(-2x\sqrt{32 - 2x})\right|}{\left(3 \cdot f\left(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112\right) - 2 \cdot f\left(-2x\sqrt{32 - 2x}\right)\right)^7} > 0.$$

Ответ: $(-13 - \sqrt{57}; 8)$.

3.6.4. Графический метод и метод оценок

712 (*ИСАА, 1994, № 5*). Решить неравенство

$$\left|x - 4^{1+\sqrt{3-x}}\right| \leqslant \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}.$$

Ответ: $x = 3$.

713 (*ВМК, 2003, устный*). Решить неравенство

$$x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leqslant 1.$$

Ответ: $x = 1; y = 0$.

714 (*геолог., 2005, устный*). Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - y^2 - 1} \leqslant 1.$$

Ответ: $x = 1; y = 0$.

715* (*МК-МГУ, 2005, I тур, № 2*). Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x+3} - 2\right| + \sqrt{x+3} + |x+1| \leqslant x + 3.$$

Ответ: $[-1; 1]$.

716* (*биолог., ФФМ, биоинж., 2003, № 6*). Решить неравенство

$$(3 - x)\log_2(1 + \sqrt{7})^{x^2+3x+2} > \sqrt{2 - x}\log_3(8 + 2\sqrt{7})^{(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Ответ: $(-1; 2]$.

717 (*мех-мат, 1996, май, № 1*). Найти все целочисленные решения неравенства

$$\sqrt{x^3 - 5x - 3} \leqslant 6 - x.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

718 (*мех-мат, 1973, № 3*). Решить неравенство

$$4x + 8\sqrt{2 - x^2} > 4 + (x^2 - x) \cdot 2^x + 2^{x+1} \cdot x \cdot \sqrt{2 - x^2}.$$

Ответ: $(-1; \sqrt{2}]$.

Глава 4

СИСТЕМЫ

4.1. Метод исключения

719* (*биолог., 1994, № 1*). Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(4;1);\left(-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)\right\}$.

720 (*ФНМ, 2000, апрель, № 1*). Решить систему

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(1;2;1);\left(\frac{44}{25};-\frac{28}{5};-\frac{108}{25}\right)\right\}$.

721 (*психолог., 1994, № 2*). Известно, что $x = 1$, $y = -1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{1111\pi}{6}, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найдите все решения данной системы.

Ответ: $\left\{(1;-1),\ \left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)\right\}$.

722 (*географ., 1991, № 5*). Найти все действительные значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x, \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Ответ: $|a| \geqslant \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

723 (*почвовед., 1994, № 2*). Решить систему

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(-1; \frac{23}{2}\right), (2; 1)\right\}$.

724 (*эконом., отд. менеджмента, 1996, № 2*). Решить систему

$$\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1; 1)\}$.

725 (*психолог., 1989, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0{,}2)^3 + y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(5; 0),\ \left(\frac{1}{5}; 2\right)\right\}$.

726 (*мех-мат, 1994, № 2*). Решить систему

$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\log_2 \frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)\right\}$.

727 (*геолог., 1987, № 4*). Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2; 4), (6; 4/3)\}$.

728* (*мех-мат, 2000, № 2*). Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(xy) \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(5/8; 4)\}$.

729 (*психолог., 1991, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(81; 0)\}$.

730 (*ВМК, 1997, апрель, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases}|x^2-4y+3|+y=1,\\ 2x+2y=1.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{-3+\sqrt7}{2};\dfrac{4-\sqrt7}{2}\right)$; $\left(\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2};\dfrac{6-\sqrt{19}}{2}\right)$.

Преобразования перед исключением

731 (*ФНМ, 2002, апрель, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-3xy+y^2+1}+|2x^2+5xy-3y^2|=0.$$

Ответ: $\{(1;2),(-1;-2)\}$.

732* (*географ., 1995, май, № 1*). Решить систему

$$\begin{cases}y^2+2xy=15,\\ 2x^2+xy=5.\end{cases}$$

Ответ: $\{(1;3),(-1;-3)\}$.

733 (*фил., 1982, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases}x^2-4xy+y^2=3,\\ y^2-3xy=2.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt2};-\dfrac{1}{\sqrt2}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt2};\dfrac{1}{\sqrt2}\right)\right\}$.

734 (*мех-мат, 1970, № 2*). Решить систему

$$\begin{cases}|xy-2|=6-x^2,\\ 2+3y^2=2xy.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\sqrt6;\dfrac{\sqrt6}{3}\right),\left(-\sqrt6;-\dfrac{\sqrt6}{3}\right)\right\}$.

735 (*географ., 2002, № 6*). Решить систему

$$\begin{cases}x^3=4x+y,\\ y^3=4y+x.\end{cases}$$

Ответ: $(0;0)$, $(\pm\sqrt5;\pm\sqrt5)$, $(\pm\sqrt3;\mp\sqrt3)$,

$\left(\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{2};\dfrac{-\sqrt6+\sqrt2}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-\sqrt6-\sqrt2}{2};\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{2};\dfrac{-\sqrt6-\sqrt2}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-\sqrt6+\sqrt2}{2};\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{2}\right)$.

736 (*геолог., 2003, № 4*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 2 = 0, \\ 4y^3 - 8y + 7x^3 - 2x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$, $\left(\sqrt{\frac{2}{79}}, 9\sqrt{\frac{2}{79}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{79}}, -9\sqrt{\frac{2}{79}}\right)$.

737 (*геолог., 1995, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} y^2 + xy = 42x, \\ 6x^2 + 6xy = 7y. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(0;0),\ (1;6),\ \left(\frac{7}{5}; -\frac{42}{5}\right)\right\}$.

738 (*геолог., 1980, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4;4)\}$.

739 (*фил., 1967, № 3*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x 3 = \log_y 9, \\ x^2 - 7y^2 + 26 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(\sqrt{2}; 2)\}$.

740 (*мех-мат, 1984, № 4*). Решить систему

+

$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 3 - \log_2 11)$, $\left(\frac{\log_2(3 + 2\sqrt{2}) - 1}{3}; 2 - \log_2(3 + 2\sqrt{2})\right)$.

741* (*мех-мат, 1989, № 4*). Решить систему

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)\right\}$.

742 (*геолог., 2000, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} x + y + 3\sqrt{x+y} = 18, \\ x^2 + y^2 = 125. \end{cases}$$

Ответ: $\{(11;-2),\ (-2;11)\}$.

743 (*физ., 2005, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} x+4\sqrt{x-y}=y+12, \\ |2(x+1)+y|+2\,|2x+(y-1)|=3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$.

744 (*эконом., отд. кибернетики, 1977, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} y^{1-\frac{2}{5}\log_x y}=x^{\frac{2}{5}}, \\ 1+\log_x\left(1-\dfrac{3y}{x}\right)=\log_x 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(16;4)\}$.

745 (*Севастополь, 2003, май, № 6*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (\log_y 2)\cdot\log_2(1-x)=-1, \\ x^{\log_y x}=\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

746 (*почвовед., 1998, № 4*). Решить систему

$$\begin{cases} y^x=3y, \\ 2\log_3 y+\log_y 3=3x. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{3}{2};9\right),\left(-1;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

747 (*ВМК, 2003, устный*). Найти все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^{x-y}=y^2, \\ y^{x-y}=x^6y^4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1),(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1)\}$.

748 (*географ., 1974, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} 25\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2}=\dfrac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{2x+y+14}=\sqrt{x+y+12}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-2;-1)\}$.

749 (*эконом., отд. полит. экономии, 1975, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{3+\log_x(1-y)} = \log_x(x\cdot(1-y)), \\ xy = -6. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3;-2)\}$.

750 (*ВШБ, 2003, № 4*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5\log_{32}(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(3y-8) = 0, \\ x^2+2x+y^2+y = 12. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;3)$.

751 (*физ., 2003, май, № 2*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^x\cdot 7^{2y} = 27, \\ 5^y\cdot 4^{x+1} = 32. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.

752 (*ВМК, 2003, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^{-4} = y^4+x^{-4}, \\ 3x^2+6xy+7y^2 = 16. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1),(-1;-1),(2;-2),(-2;2)\}$.

753 (*ВМК, 2005, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^6} = y^2+\dfrac{1}{x^6}, \\ (x^2-y^2)\cdot 2^{2x-3y+6}+3x = 12. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4;4),(4;-4)\}$.

754* (*ВМК, 2005, устный*). Решить систему

$$\begin{cases} \log_2 y - \log_2 x = 3^x - 3^y, \\ 2^{1-x}+8^{-2x} = 65^x\cdot 4^{-3y}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1)\}$.

4.2. Метод введения новых неизвестных

755 (*геолог., 1997, № 6*). Найти все решения уравнения

$$|x+y-3xy+13|+|x^2y+xy^2-30|=0.$$

Ответ: $(2;3)$, $(3;2)$, $\left(-9+\sqrt{\frac{248}{3}};-9-\sqrt{\frac{248}{3}}\right)$, $\left(-9-\sqrt{\frac{248}{3}};-9+\sqrt{\frac{248}{3}}\right)$.

756 (*ВМК, 1995, № 2*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+3xy+y=3+10\sqrt{2}, \\ x^2+y^2=11. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3;\sqrt{2}),(\sqrt{2};3)\}$.

757* (*эконом., 2002, № 3*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+xy-y=1, \\ xy^2-x^2y=30. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;6),(-6;-1),(1;-5),(5;-1)\}$.

758 (*геолог., 1998, № 7*). Решить систему уравнений

X

$$\begin{cases} x-5=y(1-x), \\ xy^2-x^2y=6. \end{cases}$$

Ответ: $(2;3)$, $(-3;-2)$, $(3+2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2})$, $(3-2\sqrt{2};-3-2\sqrt{2})$.

759 (*ВМК, 2004, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2+x-y=5, \\ x^3-x^2y-xy^2+y^3=6. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{11}{6};-\frac{7}{6}\right),\left(\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)\right\}$.

760 (*геолог., 2001, № 5*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{2}+\dfrac{5}{2x+y-xy}=5, \\ 2x+y+\dfrac{10}{xy}=4+xy. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(1;5),\left(\frac{5}{2};2\right)\right\}$.

761 (*физ., 2003, март, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{17}{2x^2+3y} + \dfrac{12}{3x^2-2y} = 3, \\ \dfrac{6}{3x^2-2y} + \dfrac{34}{2x^2+3y} = 3, \end{cases}$$

и изобразить на координатной плоскости Oxy ее решения.

ОТВЕТ: $(-2;3)$, $(2;3)$.

762 (*мех-мат, 1979, № 3*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(5;-2)$.

763 (*физ., 2003, № 3*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y|, \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(5;1)$, $\left(\frac{1}{3};-\frac{11}{3}\right)$.

764 (*хим., 1991, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left\{(1;1), \left(\frac{5}{2};-2\right)\right\}$.

765* (*ВШБ, 2004, № 3*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{(26;-6), (-9;29)\}$.

766 (*ВМК, 2004, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^4 = 13x - 4, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left\{\left(\frac{5}{16};-\frac{3}{16}\right), \left(\frac{5}{16};\frac{13}{16}\right)\right\}$.

767 (*ВМК, 2002, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left\{(4;1), \left(\frac{121}{64}; \frac{169}{64}\right)\right\}$.

768 (*ВМК, 1985, № 1*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(1; \log_3 2)$.

769 (*физ., 1976, № 3*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} + 3^x \cdot 3^{-y} = 12, \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{(0;-2), (2;0)\}$.

770 (*физ., 2004, март, № 5*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |2^x - 2^y| + 2^x + 3 \cdot 2^y = 12\sqrt{2}, \\ |2^x + 2^{-y}| + 2^x - 33 \cdot 2^{-y} = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left\{\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{7}{2} - \log_2 3; \frac{1}{2} + \log_2 3\right)\right\}$.

771 (*физ., 1999, № 4*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^{x+1} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 35, \\ \dfrac{10}{5^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 36. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(\log_5 3; \log_3 5)$.

772 (*эконом., отд. менеджмента, 2003, № 3*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0, \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(1/2; \log_3 3\sqrt{2})$.

773 (*эконом., 2003, № 3*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4^x - 19 \cdot 3^{x\log_3 2 + y} + 4 \cdot 9^y = -10, \\ 4^x + 6 \cdot 2^{x + y\log_2 3} - 9^y = 5. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(-\frac{1}{2}; \log_3 \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\log_2 \frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}\right)$.

774 (*ВМК, 1997, № 4*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}3\cdot 4^x - 2^x - 2\cdot 5^y = 1,\\ 25^y + 3\cdot 2^x - 4\cdot 5^y = 3.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\log_2 \dfrac{7+\sqrt{13}}{6}; \log_5 \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

775 (*географ., 2001, май, № 1*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}9\cdot 2^x\cdot 5^y - 5\cdot 3^{y+x} = 3^x\cdot 5^y,\\ 2^{x-2}\cdot 3^{y-x+1}\cdot 5^{1-y} = 1.\end{cases}$$

Ответ: $(2;1)$.

776 (*психолог., 1992, № 2*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}400\cdot 5^y\cdot 50^x\cdot 100^{x+y} = 1,\\ \log_{0{,}5x+0{,}4y}\left(8^{-x}\cdot 4^{-y} + 25^{-2x}\cdot 125^{-y}\right)\cdot \log_{41}(0{,}5x+0{,}4y) = 1.\end{cases}$$

Ответ: $\{(8\log_5 2 - 6\log_2 5; 8\log_2 5 - 12\log_5 2)\}$.

777 (*физ., 2004, № 5*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3\cdot 2^{x-2y} - \sqrt{2x-2y} = 24 - x,\\ 2^{x-2y} + 2\sqrt{2x-2y} = 2x+8.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-5+\sqrt{13}}{4}\right)\right\}$.

778 (*почвовед., 2003, № 2*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\log_7(x-y) + 7^{xy} = 1,\\ 7^{xy} + \log_7(x-y) = 1.\end{cases}$$

Ответ: $\{(0;-1),\quad (1;0)\}$.

779 (*геолог., 1972, № 2*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x + \log_3 y^2 = 0,\\ \log_2 x^2 - \log_{1/3} y = 5.\end{cases}$$

Ответ: $(2^{\frac{10}{3}}; 3^{-\frac{5}{3}})$.

780 (*геолог., отд. общей геологии, 1973, № 1*). Решить систему

$$\begin{cases}\lg 3\cdot \lg(3x) = \lg 2\cdot \lg(2y),\\ \lg x\cdot \lg 2 = \lg y\cdot \lg 3.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$.

781 (*ВМК, 1976, № 3*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - \log_2 y = 2, \\ 2^x \cdot \log_2 y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 2)$.

782 (*ВМК, 1971, № 1*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 6 \lg \sqrt{x} + 3 \cdot 2^y = 5, \\ 10 \lg x + 3 \cdot 4^y = 17. \end{cases}$$

Ответ: $\left(10^{-\frac{\sqrt{26}}{3}}; \log_2 \dfrac{5+\sqrt{26}}{3}\right)$.

783 (*физ., 2002, май, № 5*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1} \log_9 y - 2^{2x} = 2, \\ 9 \cdot 2^x \cdot \log_{27} y - \log_3^2 y = 9. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 27)$.

784 (*хим., 1985, № 5*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} |x-y| - \log_2^2(|x| + y + 1) + 6 = 0, \\ (x-y)^2 - 6 \cdot (x-y) \cdot \log_2(|x| + y + 1) + 5 \cdot \log_2^2(|x| + y + 1) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(5; 2), \left(\dfrac{93}{2}; \dfrac{33}{2}\right)\right\}$.

785 (*хим., 1993, май, № 4*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 + 17xy + 7y^2 = 16, \\ \log_{2x+y}(3x + 7y) = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{6}{11}; \dfrac{10}{11}\right)\right\}$.

786 (*ВКНМ, 1999, май, № 2*). Решить систему

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3x}{2}} + \log_3^3 y = 504, \\ 4^x - 2^{x-1} \log_{\sqrt{3}} y + \log_3^2 y = 84. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3; 1/9)\}$.

787 (*ВМК, 1994, май, № 5*). Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 удовлетворяют соотношению

$$\log_2 a_n \cdot \log_2 (a_{n-1} \cdot a_{n+1}) = \log_2 a_{n-1} \cdot \log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 \left(4a_n^2\right)$$

при $n = 2{,}3, 4$. Известно, что $a_1 = 2$, $a_5 = 2^{\frac{1}{25}}$.
Найти $\log_2 \left(a_2 + 2a_3 - a_4^4\right)$.

ОТВЕТ: 1 или $\dfrac{10}{9}$.

4.2.1. Тригонометрические подстановки

788 (*мех-мат, 2002, март, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - 9xy = 2, \\ \dfrac{z}{y} - 9yz = 6, \\ \dfrac{3x}{z} - 3zx = 2. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha, \frac{1}{3}\operatorname{tg} 2\alpha, \operatorname{tg} 4\alpha\right)$, где $\alpha = \pm\frac{\pi}{7}, \pm\frac{2\pi}{7}, \pm\frac{3\pi}{7}$.

4.3. Выделение в системе квадратного трехчлена

789* (*эконом., 1980, № 3*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{(-1; 3), (x; 2),$ где $x \in \mathbb{R}\}$.

790 (*ВМК, 2004, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\Big\{(1; -1), (3; -3), \Big(-13 - \sqrt{157}, \dfrac{-13 - \sqrt{157}}{2}\Big),$
$\Big(-13 + \sqrt{157}, \dfrac{-13 + \sqrt{157}}{2}\Big)\Big\}$.

791* (*почвовед., 1979, № 5*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0,\\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0.\end{cases}$$

Ответ: $\{(2;1)\}$.

792 (*хим., 1998, № 3*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0,\\ z^2 + xz + yz - 4 = 0.\end{cases}$$

Ответ: $\{(-1;1;2), (-1;1;-2)\}$.

793 (*ВМК, 2002, устный*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}x + y + z = 4,\\ 2xy - z^2 = 16.\end{cases}$$

Ответ: $\{(4;4;-4)\}$.

794 (*ФГУ, 2003, № 6*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x + y + z = 2,\\ 2xy - z^2 = 4.\end{cases}$$

Ответ: $\{(2;2;-2)\}$.

795 (*Севастополь, 2003, № 7*). Найдите все тройки чисел $(x;y;z)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases}x + 2y + z = 2,\\ 4xy - 4y - z^2 = 1.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(2;\frac{1}{2};-1\right)\right\}$.

796 (*географ., 1981, № 5*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}y^2 - xy + 1 = 0,\\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1.\end{cases}$$

Ответ: $\{(-2;-1)\}$.

797 (*географ., 1981, № 5*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}x^2y^2 - 2x + y^2 = 0,\\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0.\end{cases}$$

Ответ: $\{(1;-1)\}$.

798 (*биолог., 1993, № 6; хим., 1978, № 5*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$.

Ответ: $\{(2;-1;2),(4;-3;0)\}$.

799 (*ВМК, 2001, устный*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^3=3-2y, \\ z^2+4y^2=8y, \\ (2z-x)(x+3)=5x+16, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$.

Ответ: $\{(-4;2;0),(-2;1;2)\}$.

800 (*ВМК, 1984, № 5*). Найдите все решения $(x;y;z)$ системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+x^2(13-y-z)+x(2y+2z-2yz-26)+5yz-7y-7z+30=0, \\ x^3+x^2(17-y-z)-x(2y+2z+2yz-26)+y+z-3yz-2=0, \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку $[4;7]$.

Ответ: $\{(7;6;6)\}$.

4.4. Другие специальные преобразования

801* (*ИСАА, 2004, № 3*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=xyz, \\ y^2+z^2=xyz, \\ z^2+x^2=xyz. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$, $(2;2;2)$, $(2;-2;-2)$, $(-2;2;-2)$, $(-2;-2;2)$.

802 (*ВМК, 2002, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+5y^2+6z^2+8(yz+xz+xy)=36, \\ 6x^2+y^2+5z^2+8(yz+xz+xy)=36, \\ 5x^2+6y^2+z^2+8(yz+xz+xy)=36. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;1;1),\ (-1;-1;-1),\ (3;-3;-3),\ (-3;3;3),\ (3;-3;3),\ (-3;3;-3),\ (3;3;-3),\ (-3;-3;3)\}$.

803 (*ВМК, 2002, устный*). Решить относительно x, y и z систему уравнений, считая, что a, b и c — длины сторон треугольника

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2z^2 = axyz, \\ y^2z^2 + y^2x^2 = bxyz, \\ z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}; \sqrt{(p-a)(p-c)}; \sqrt{(p-a)(p-b)}\right)$,
$\left(\sqrt{(p-b)(p-c)}; -\sqrt{(p-a)(p-c)}; -\sqrt{(p-a)(p-b)}\right)$,
$\left(-\sqrt{(p-b)(p-c)}; \sqrt{(p-a)(p-c)}; -\sqrt{(p-a)(p-b)}\right)$,
$\left(-\sqrt{(p-b)(p-c)}; -\sqrt{(p-a)(p-c)}; \sqrt{(p-a)(p-b)}\right)$,
где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; $\{(r;0;0), (0;r;0), (0;0;r)\}$, где $r \in \mathbb{R}$.

804 (*ВМК, 2005, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y + 2x + z = 2 \cdot (x+y)(z+x), \\ z + 2y + x = 4 \cdot (y+z)(x+y), \\ x + 2z + y = (z+x)(y+z). \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{17}{15}, \frac{23}{15}, -\frac{13}{15}\right)$.

4.5. Графический метод

805 (*почвовед., 2000, май, № 4*). Решите систему уравнений и изобразите множество ее решений на координатной плоскости (x, y):

$$\begin{cases} |x-y| + 2x = 6, \\ |2x-y| + 3x = 6. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;-6); (x; 6-x), \quad \text{где } x \leqslant 2\}$.

806 (*ВМК, 1998, устный*). Решить систему

$$\begin{cases} |x-y| = 2, \\ |x| + |y| = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3;1), (1;3), (-3;-1), (-1;-3)\}$.

807 (*географ., 1980, № 5*). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|y+\dfrac{1}{x}\right|+\left|\dfrac{13}{6}+x-y\right|=\dfrac{13}{6}+x+\dfrac{1}{x}, \\ x^2+y^2=\dfrac{97}{36}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x<0$ и $y>0$.

Ответ: $\left\{\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)\right\}$.

808 (*геолог., 2003, май, № 7*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2-x}=4y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2+1-2x}+\sqrt{x^2+y^2-6x-2y+10}=\sqrt{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$.

809* (*биолог., 2005, № 6*). Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2x-22y+122}=2\sqrt{37}-\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}, \\ \log_{(x+1)}4+\log_y 4=0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

810 (*ВМК, 1996, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58=0, \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104}=2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{217-5\sqrt{415}}{29};\frac{180+2\sqrt{415}}{29}\right)\right\}$.

811 (*ВМК, 1998, устный*). Решить систему

$$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^4+y^4=1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;1),(1;0)\}$.

4.6. Метод оценок

812 (*физ., 1965, № 3*). Найти все действительные решения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2}=y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2}=x. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;0);(1;1)\}$.

813* (*ВМК, 2004, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = \dfrac{2z^2}{1+z^2}, \\ y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \\ z = \dfrac{2y^2}{1+y^2}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{(0;0;0),(1;1;1)\}$.

814* (*мех-мат, 2002, олимпиада, 8 кл., №6*). Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению

$$(x+y\sqrt{2})^2+(u+v\sqrt{2})^2=7+5\sqrt{2}?$$

ОТВЕТ: нет.

815* (*МК-МГУ, 2006, № 9*). Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению

$$(x+y\sqrt{2})^6+(u+v\sqrt{2})^6=7+5\sqrt{2}?$$

ОТВЕТ: нет.

816 (*ВМК, 2004, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_2 = x_1+\dfrac{2}{x_1}, \\ 2x_3 = x_2+\dfrac{2}{x_2}, \\ \dotfill \\ 2x_n = x_{n-1}+\dfrac{2}{x_{n-1}}, \\ 2x_1 = x_n+\dfrac{2}{x_n}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{(\sqrt{2};\sqrt{2};\ldots;\sqrt{2}),(-\sqrt{2};-\sqrt{2};\ldots;-\sqrt{2})\}$.

817 (*ВМК, 2002, устный*). Решить систему

$$\begin{cases} (x_1+x_2+x_3)^3=3x_4, \\ (x_2+x_3+x_4)^3=3x_5, \\ (x_3+x_4+x_5)^3=3x_1, \\ (x_4+x_5+x_1)^3=3x_2, \\ (x_5+x_1+x_2)^3=3x_3. \end{cases}$$

ОТВЕТ:

$$\left\{(0;0;0;0;0),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Глава 5

ОБЛАСТИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

5.1. Многоугольники

818* (*эконом., 1988, № 4*). Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$\left|y-\frac{1}{2}x^2\right|+\left|y+\frac{1}{2}x^2\right| \leqslant 2+x.$$

Ответ: $S=\frac{15}{2}$.

819 (*геолог., отд. общей геологии, 1981, № 3*). Изобразить фигуру

$$|x|+|y-1| \leqslant 4.$$

820 (*геолог., 2001, устный*). Найти площадь фигуры

$$|y-2x|+|y+2x| \leqslant 2.$$

Ответ: $S=2$.

821 (*ВМК, 1983, № 3*). Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством

$$2|x|+|y+2x+1| \leqslant 5.$$

Ответ: $S=25$.

822 (*ИСАА, 1996, № 2*). Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} y \geqslant |x|-1, \\ y \leqslant -2|x|+5. \end{cases}$$

Ответ: $S=12$.

823 (*хим., 2002, № 2*). Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x|+|y-1| \leqslant 1, \\ |x-2|+|y-1| \leqslant 1. \end{cases}$$

Ответ: $(1;1)$.

824 (*геолог., отд. геофизики, 1981, № 3*). Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 6 - 2|x|, \\ y \geqslant 2 + 2|x|. \end{cases}$$

Ответ: $S = 4$.

825 (*ВМК, 2002, апрель, № 1*). Найти площадь фигуры

$$\begin{cases} 3y + 2x \leqslant 8, \\ \sqrt{x^2 + 7x - 8} \leqslant x + 2, \\ 3y + 4 \geqslant x. \end{cases}$$

Ответ: $S = 4{,}5$.

826 (*геолог., 1990, № 2*). Найти площадь треугольника OAB, образованного на плоскости отрезками прямых OA, OB, AB, где O — начало координат, A — точка пересечения прямых $y = 2x$ и $y = -x + 3$, а B — точка пересечения прямой $y = -x + 3$ и оси Ox.

Ответ: $S = 3$.

827 (*эконом., 1994, № 4*). Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|2y + 3x - 2| + |3x + 6| < 6.$$

Ответ: $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$.

5.2. Фигуры, связанные с окружностью

828 (*геолог., 1999, № 3*). Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости $(x; y)$ системой неравенств

$$\begin{cases} x \cdot (x + y - \sqrt{2}) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 2. \end{cases}$$

Ответ: $S = \frac{\pi}{2} + 1$.

829 (*мех-мат, 1991, № 3*). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4x - 4y - 6, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Ответ: $S = \frac{3\pi}{2} + 1$.

830 (*геолог., 2003, устный*). Изобразите множество всех точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2+y^2}{x} \leqslant 2.$$

831 (*геолог., 2001, устный*). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2+4y \leqslant -6, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $S=\pi$.

832 (*географ., 2005, № 4*). Найти периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости $(x;y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y > \left||x-2|-1\right|, \\ x^2+y^2 < 4x+2y-3. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $P=\dfrac{3\pi+4}{\sqrt{2}}$.

833 (*геолог., отд. общей геологии, 1980, № 5*). Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости следующей системой:

$$\begin{cases} \left||x-y|-|y-1|\right| = x-2y+1, \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $S=\dfrac{\pi}{8}$. Фигура представляет собой объединение двух секторов в круге с центром в точке $(1;1)$ и $R=1$; сумма соответствующих центральных углов равна $45°$.

834 (*Севастополь, 1999, № 8*). Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} \left||x-y|-|y-2|\right| = x-2y+2, \\ x^2+y^2 \leqslant 4(x+y). \end{cases}$$

ОТВЕТ: $S=\pi$. Фигура представляет собой объединение двух секторов в круге с центром в точке $(2;2)$ и $R=2\sqrt{2}$; сумма соответствующих центральных углов равна $45°$.

835 (*почвовед., 2002, май, № 6*). Определите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$x^2+y^2 \leqslant 2|x|+4|y|.$$

ОТВЕТ: $S=10\pi+16$.

836 (*хим., 2003, заочный тур, № 6*). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$x^2 + y^2 \leqslant 6|x| - 6|y|.$$

Ответ: $S = 18\pi - 36$.

837 (*ФНМ, 2002, заочный тур, № 5*). Изобразите на координатной плоскости множество, описываемое неравенством

$$(|x| + |y| - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 2|x|) \geqslant 0.$$

838 (*ИСАА, 1997, № 5*). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} y \leqslant \sqrt{4 - x^2}, \\ y \geqslant |x - 1| - 3. \end{cases}$$

Ответ: $S = 2\pi + 7$.

839 (*ФНМ, 2000, апрель, № 2*). Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ y + 1 \geqslant 0, \\ 3y + 6 \geqslant 2|x|. \end{cases}$$

Ответ: $S = \dfrac{9(\pi + 1)}{2}$.

840 (*геолог., 1995, № 8*). Изобразить фигуру, образованную всеми точками (x, y) декартовой плоскости xOy, которые удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 + 4(x - |y|) \leqslant 0.$$

Найти площадь этой фигуры.

Ответ: $S = 12\pi + 8$.

841 (*ВМК, 1999, № 2*). На координатной плоскости $(x; y)$ проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = \sqrt{3}x - 4$, пересекает ее в точках A и B. Найти сумму длин отрезка AB и большей дуги AB.

Ответ: $\dfrac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3}$.

842* (*эконом., 1991, № 5*). Найдите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$(x^2 + y^2 - x - y) \cdot (x^2 + y^2 - 1) \leqslant 0.$$

Ответ: $S = \dfrac{\pi}{2} + 1$.

843 (*почвовед., 1996, май, № 6*). Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$\log_{(x^2+y^2)}(x+y) > 1.$$

Ответ: $S = 1$.

844 (*эконом., ВМК, подгот. отд., 1999, № 6*). Найдите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\left(2xy + \left(\sqrt{x-y}\right)^4\right)^{2x-2y+1} \geqslant (x^2+y^2)^{x^2+y^2-1}.$$

Ответ: $S = 2 + \dfrac{5\pi}{2}$.

5.3. Более сложные фигуры

845* (*ВМК, 2004, устный*). Построить множество точек на координатной плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют равенству

$$2y - |y-x| + y(1-2x) + x = 0.$$

846 (*геолог., 2002, устный*). Изобразите множество всех точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$3|x-y| \geqslant 2 + (x-y)^2.$$

847 (*эконом., 1972, № 2*). Изобразить фигуру

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 12y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$$

848 (*ВМК, 2003, устный*). На плоскости Oxy построить множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x+1}{x+y} = \frac{x^2-1}{x-y}.$$

849 (*ВМК, 1999, устный*). Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$|y| = x^2 - x.$$

850 (*ВМК, 1999, устный*). Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$y^2 = |x+y|.$$

851 (*ВМК, 1999, устный*). Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$|y| = 5^{\left|\log_{\frac{1}{5}} x\right|}.$$

852 (*ВМК, 1999, устный*). Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$|y - x| + |y - x^2| = 2.$$

853 (*Севастополь, 2001, май, № 4*). Найдите все пары (x, y), удовлетворяющие условию

$$(|x| - 2x) \cdot y^2 \leqslant 18x \cdot (6 - 2y).$$

854 (*ВМК, 1999, устный*). Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству

$$2y^2 \leqslant \log_2 x \cdot (3|y| - 2\log_4 x).$$

855 (*мех-мат, 1994, устный*). Изобразить на плоскости (x, y) множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{(x-y)}(x + y) \geqslant 1.$$

856 (*геолог., отд. геофизики, 1982, № 5*). Построить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$y = 4 - \left|y - \frac{6}{x}\right| - 2\left|\frac{3}{x} - 1\right|,$$

и среди точек этого множества найти все такие, в каждой из которых координата y принимает наибольшее значение.

ОТВЕТ: $y_{\max} = 3$ для $2 \leqslant x \leqslant 3$.

857 (*соц., 2004, апрель, № 6*). На плоскости Oxy изобразить фигуру, все точки которой удовлетворяют неравенству

$$2^{\frac{1}{2}\log_2 y^2} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{3^{\frac{1}{2}\log_3 x^2} + \frac{1}{2}}.$$

Доказать, что ее площадь S удовлетворяет неравенству $2 < S < 3$.

858 (*ИСАА, 2005, № 7*). Фигура на плоскости (x, y) состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$(p^4 + 2p^2 + 9)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 16(p^3 + 3p)xy + 2(p^4 + 10p^2 + 9)(x^2 + y^2)$$

при различных действительных значениях p. Найти длину линии, ограничивающей эту фигуру.

ОТВЕТ: $8\sqrt{2}$ (эта фигура — внутренность квадрата со стороной $2\sqrt{2}$).

859 (*мех-мат, 2003, март, № 4*). Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y+\log_2 x| + |y+1-2^{x-1}| = |2y-2^{x-1}+1+\log_2 x|, \\ |x|+|y+1|+|y-1| = x+2. \end{cases}$$

Ответ: $S=2$.

860 (*эконом., 1997, № 6*). Множество точек, расположенных внутри фигуры F, задано на координатной плоскости условием

$$\log_{\left(\frac{x^2+1039}{1147}\right)}\left(\frac{10y-24-y^2}{850}\right) > 0.$$

Множества $F(t)$ получаются из F поворотом вокруг начала координат против часовой стрелки на угол t. Найти площадь фигуры, образованной точками, каждая из которых при некотором $t\in[0;\pi]$ принадлежит множеству $F(t)$.

Ответ: $S=112\pi-12\sqrt{3}$.

861 (*географ., 1997, № 6*). На координатной плоскости построить множество точек с координатами $(x;y)$, для каждой из которых существует остроугольный треугольник со сторонами 1, $|x|$, $\sqrt{-y}$. Найти уравнения кривых, ограничивающих это множество.

Ответ: $y=-x^2-1$, $y=-x^2+1$, $y=x^2-1$.

862 (*мех-мат, 1998, май, № 6*). Фигура задана на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} (y^2-x^2)^2+6(y^2-x^2)-(y+x)^2+5y+7x+1<0, \\ y>1-x. \end{cases}$$

Сколько интервалов на прямой $y=2-x$ образует ортогональная проекция этой фигуры на указанную прямую?

Ответ: 2.

5.4. Области на двумерной целочисленной решетке

863 (*МШЭ, 2005, № 6*). Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-3)^2<5, \\ 4y\leqslant x+8. \end{cases}$$

Ответ: $(1,2),(2,1),(2,2),(3,2),(4,3)$.

864 (*эконом., 1983, № 4*). Сколько точек с целочисленными координатами находится внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = 50$, $x = 244$ и графиком функции $y = \log_3(x+1)$? Точки, лежащие на границе указанной криволинейной трапеции, не учитывать.

Ответ: 743.

865 (*мех-мат, 1971*). Решить в целых числах систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y \geqslant 25, \\ y \leqslant 2x + 18, \\ y \geqslant x^2 + 4x. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3;22), (3;23), (3;24)\}$.

866 (*ВМК, устный, 1992*). Найти все целые значения x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 2x - y > 2, \\ x + 3y > 8, \\ 3x + 2y < 17. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3;2), (4;2), (3;3)\}$.

867 (*фил., 1977, № 1*). В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Ответ: 24 — в первом и 7 — во втором.

868 (*хим., 2005, № 5*). Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y}.$$

Ответ: $(2;0)$.

869* (*биолог., 1992, № 4*). Найти все пары целых чисел p и q, удовлетворяющие одновременно двум условиям

$$\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$$

Ответ: $p = 12; q = -8$.

870 (*биолог., 1996, № 5*). Найти все пары натуральных чисел $(p;q)$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} 18q > 2p + 2q^2 + 27, \\ 7p + 10 \leqslant 4q. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;5),(1;6),(2;6)\}$.

871 (*эконом., отд. кибернетики, 1973, № 2*). Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие одновременно условиям:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 12 = 0, \\ x^2 + 4y^2 \leqslant 60, \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(3;\frac{7}{2}\right)$, $\left(-3;-\frac{7}{2}\right)$.

872 (*хим., 2003, май, 5*). Найти все пары целых чисел (x,y), удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 9y + 24x - 47 > 0, \\ y^3 + x^2 - 9y - 10x + 23 < 0. \end{cases}$$

Ответ: $(4;0)$, $(4;3)$, $(4;-3)$.

Глава 6

ПРОГРЕССИИ И ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

6.1. Текстовые задачи на прогрессии

6.1.1. Арифметическая прогрессия

873* (*ВМК, отд. бакалавров, 2005, № 1*). В возрастающей арифметической прогрессии сумма третьего и седьмого членов равна утроенному второму члену, а произведение первого и четвертого членов равно 40. Найти сумму первых двенадцати членов этой прогрессии.

Ответ: $S_{12} = 126$.

874 (*МШЭ, 2005, № 5*). Найти четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 23 и третье число больше второго на 30%.

Ответ: 7, 10, 13, 16.

875 (*эконом., отд. менеджмента, 1998, № 2*). Второй член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ равен 2, а сумма пятого и шестого членов равна 9. Найти сумму первых двадцати членов прогрессии.

Ответ: $161\frac{3}{7}$.

876 (*географ., 1999, май, № 2*). Сумма первых пяти членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15, а их произведение равно 1155. Найти шестидесятый член прогрессии.

Ответ: 231.

877 (*соц., 1999, № 2*). Найти первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

Ответ: $a_1 = 1$ или 4, $d = -\frac{1}{5}$.

878 (*Севастополь, 1999, № 3*). Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сумма чисел a_1, a_3, a_5 равна 9. Найти числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, если известно, что a_4 вдвое больше a_2.

Ответ: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$.

879 (*ВМК, 1990, № 2*). Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

Ответ: $a_{12} = 17$.

880 (*географ., 1994, № 2*). Сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) в пять раз меньше суммы первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии (b_n). Найдите отношение разности прогрессии (a_n) к разности прогрессии (b_n), если известно, что эти разности отличны от нуля и $4a_{12} = b_{19}$.

Ответ: 1.

881 (*ИСАА, 1993, № 2*). Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

Ответ: 28.

882 (*геолог., 2005, № 5*). В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвертого ее членов равен сумме второго и пятого ее членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

Ответ: 0 или 3.

883 (*хим., 1989, № 2*). Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

Ответ: 2.

884 (*ВМК, 1988, № 1*). Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого ее членов равна 10.

Ответ: 50.

885 (*ВМК, 1995, апрель, № 1*). В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с нечетными номерами, не превосходящими 26, равна 169. Найти номер того члена прогрессии, который равен 13.

Ответ: 13.

886 (*ВМК, 2001, апрель, № 1*). Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа членов прогрессии равна 486?

Ответ: 12.

5—2523

887 (*почвовед., 2001, май, № 4*). Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма членов, сколько бы начиная с первого их ни взять, всегда равна утроенному квадрату числа этих же членов.

Ответ: $a_1 = 3, \quad d = 6$.

888 (*ФГУ, 2005, № 1*). Можно ли разделить сумму в 196 рублей на 16 разных частей так, чтобы ближайшие по величине части отличались на 50 копеек?

Ответ: можно $(8.50,\ 9.00,\ 9.50, \ldots, 16.00)$.

889 (*биолог., 1991, № 3*). Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвертого километров после старта он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?

Ответ: 8 мин. 20 с.

890 (*геолог., отд. общей геологии, 1980, № 4*). Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

Ответ: 42,3%.

891 (*геолог., отд. геофизики, 1980, № 4*). В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проезжал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

Ответ: 20 м.

892 (*МК-МГУ, 2005, I тур, № 3*). Бригада землекопов должна была в 8 ч. начать рыть траншею. Однако, простояв в очереди за лопатами, они приступили к работе позже: первый на 5 минут, второй на 10, третий на 15 и т. д. Вырыв траншею в 12 ч., они ушли на обед, а с 13 до 16 ч. 30 мин. вырыли вторую такую же траншею. Сколько было землекопов?

Ответ: 11 человек.

893 (*геолог., 1999, № 6*). Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$, в которой $a_3 = -13$ и $a_7 = 3$. Определить, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найти значение этой суммы.

Ответ: $n = 6$; $S_6 = -66$.

894 (*ВМК, 2001, № 2*). Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

Ответ: $a_{20} = 119$.

895 (*ВМК, 2005, № 3*). Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенством $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых ее двадцати трех членов равна -60. Найти сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ и b_{40}.

Ответ: $S_{100} = 15\,050$, $b_{40} = 81$.

896* (*мех-мат, 2000, март, № 2*). О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна 0, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

Ответ: $a_7 = -3 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$.

897 (*соц., 2004, № 5*). Три числа, являющиеся длинами ребер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Ответ: $2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$.

898 (*мех-мат, 2002, март, № 3*). Сумма первых четырнадцати членов арифметической прогрессии равна 77. Известно, что ее первый и одиннадцатый члены — натуральные числа. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

Ответ: $a_{18} = -5$.

899 (*мех-мат, 2003, март, № 1*). Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

Ответ: $a_1 = 54$.

900 (*мех-мат, 2004, март, № 3*). Найти все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}, a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}, \dots, a_n = \frac{(-10)}{6m - m^2},$$

где m — некоторое целое число.

Ответ: $-\frac{21}{5}, \quad -\frac{11}{4}$.

901 (*мех-мат, 1996, март, № 5*). Какое наибольшее количество членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 2 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 160?

Ответ: 14.

6.1.2. Геометрическая прогрессия

902* (*географ., 1998, № 2*). Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

Ответ: $q = 2$.

903 (*географ., 2003, № 1*). Разность девятого и третьего членов знакочередующейся геометрической прогрессии равна ее шестому члену, умноженному на $\frac{24}{5}$. Найти отношение десятого к пятому члену прогрессии.

Ответ: $\frac{b_{10}}{b_5} = -5^{-\frac{5}{3}}$.

904 (*эконом., отд. менеджмента, 1995, № 4*). В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. т железной руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% по сравнению с каждым предыдущим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. т. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

Ответ: 6 лет.

905 (*эконом., 1995, № 4*). В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Ответ: 210 тыс. руб.

906* (*ВМК, 1994, № 5*). В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 8 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 5 единиц того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 6 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента после 25-й инъекции?

Ответ: $6 + \frac{2}{6^{24}}$.

907 (*психолог., 2000, № 2*). Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов равна целому числу, кратному четырем, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.

Ответ: $q = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}$, где $n = 6, 7, \ldots, 250$.

908 (*географ., 2002, № 3*). Квадратное уравнение $x^2 - 6px + q$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q — четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найти x_1 и x_2.

Ответ: $x_1 = -3; x_2 = 9$ или $x_1 = 2; x_2 = 4$.

909 (*биолог., 1993, май, № 4*). Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма пятых равна 161. Найти сумму шестых членов прогрессий.

Ответ: 573.

910 (*ВМК, 2003, апрель, № 1*). Сумма первых двадцати четырех членов геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем в полтора раза больше, чем сумма ее первых восьми членов. Найти знаменатель такой прогрессии.

ОТВЕТ: $-1; \sqrt[8]{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}, -\sqrt[8]{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$.

911 (*мех-мат, 1993, май, № 2*). Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна ее первому члену, умноженному на 5, а сумма первых 15 членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.

ОТВЕТ: 20.

912 (*мех-мат, 1995, март, № 1*). Найти первый член геометрической прогрессии, если ее третий член равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

ОТВЕТ: -2.

913 (*мех-мат, 1999, май, № 2*). Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый — со знаком «плюс», второй — со знаком «минус» и т. д.) равна $\frac{20}{27}$. Найти знаменатель прогрессии.

ОТВЕТ: $q = \frac{1}{3}$.

914 (*геолог., 2003, май, № 3*). Целые числа k, n, m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 39 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

ОТВЕТ: 39.

915 (*психолог., 1985, № 3*). Алёша, Боря и Вася покупали блокноты и трехкопеечные карандаши. Алёша купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря — 6 карандашей и 1 блокнот, Вася — 3 карандаша и 1 блокнот. Известно, что суммы денег, заплаченные Алёшей, Борей и Васей, образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько стоит блокнот?

ОТВЕТ: 18 копеек.

916 (*ВМК, 2005, устный*). В геометрической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ даны члены $a_{m+n} = A > 0$, $a_{m-n} = B > 0$. Найдите a_m и a_n.

ОТВЕТ: $a_m = \sqrt{AB}$, $a_n = \sqrt[2n]{A^{2n-m} \cdot B^m}$.

6.1.3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

917* (*соц., 2005, № 3*). Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n = \frac{1}{6}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 6. Найти n, если сумма всей прогрессии равна $\frac{3}{4}$.

Ответ: $n = 2$.

918 (*ВКНМ, 1999, май, № 5*). Знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии отрицателен. Найти все целые m, при которых сумма ее членов с нечетными номерами больше суммы ее членов с четными номерами на величину, равную произведению ее второго члена и числа вида $m^2 + 10m + 20$.

Ответ: $-6; -5; -4$.

6.1.4. Смешанные задачи

919* (*Севастополь, 2004, № 4*). Три числа, которые являются последовательными членами геометрической прогрессии, дают в произведении 8. Если их умножить соответственно на 16, 5 и 1, то получатся три числа, являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите три исходных числа.

Ответ: $1; 2; 4$ или $\frac{1}{4}; 2; 16$.

920 (*Севастополь, 2000, май, № 7*). Даны две арифметические прогрессии a_n и b_n. Известно, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

а суммы $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$ образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_3, a_2 = b_2, a_3 = b_1$.

921 (*фил., 1985, № 2*). Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на две рыбы меньше, а Ваня — на двенадцать рыб меньше, то количества рыб, пойманных Колей, Петей, Мишей и Ваней, образовывали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на восемнадцать рыб меньше Вани?

Ответ: 18.

922 (*ВМК, 2004, апрель, № 1*). Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить 6, 7, 6 и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найти числа a_1, a_2, a_3 и a_4.

Ответ: 2, 4, 8, 16.

923 (*почвовед., 2000, № 2*). Первый, четвертый и пятый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: $1; \frac{1}{3}$.

924 (*почвовед., 1995, № 1*). Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от ее второго члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

Ответ: 50.

925 (*мех-мат, 1997, май, № 2*). Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна (-3), сумма третьих членов 1, а сумма пятых членов равна 5. Найти разность арифметической прогрессии.

Ответ: 2.

926 (*фил., 2003, март, № 3*). Даны такие арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ и геометрическая прогрессия $\{b_n\}$, что

$$a_1 = b_1, \quad a_4 = b_3, \quad a_2 a_3 - b_2^2 = 8.$$

Найти разность арифметической прогрессии.

Ответ: $d = \pm 2$.

6.2. Функциональные уравнения для последовательностей

927* (*хим., 2001, № 7*). Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1.$$

Найти $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

Ответ: $f(2001) = 2001^2$.

928 (*хим., 2001, май, № 7*). Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом:

1. $a_1 = 1$;
2. каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т. е.

$$a_2 = 2a_1 = 2,$$
$$a_3 = 2(a_1 + a_2),$$

и т. д.

Найти произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

Ответ: $2^{2000} \cdot 3^{1999000}$. При $n \geqslant 2$ последовательность a_n задается формулой: $a_n = 2 \cdot 3^{n-2}$.

929* (*хим., 1999, № 7*). Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ определяется следующим правилом:

$$a_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ — нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ — четное,} \end{cases}$$

т. е. $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 10$, $a_5 = 20$, $a_6 = 22$ и т. д. Найти a_{1999}.

Ответ: $a_{1999} = 3 \cdot 2^{1000} - 4$. При $n = 2k - 1$ последовательность a_n задается формулой: $a_n \equiv a_{2k-1} = 3 \cdot 2^k - 4$.

930 (*хим., 1999, апрель, № 7*). Функция $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: для любых чисел a и b выполняется равенство

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}.$$

Найти значение функции $f(1999)$, если $f(1) = 1$, $f(4) = 7$.

Ответ: $f_{1999} = 3997$. При натуральных значениях аргумента x функция $f(x)$ образует арифметическую прогрессию, так что $f(n) = \dfrac{(n-1)f(4) - (n-4)f(1)}{3} = 2n - 1$.

931 (*географ., 2004, № 6*). Сколько цифр содержится в десятичной записи 99991-го члена последовательности a_n, если $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1024$, $\lg 2 = 0{,}301029\ldots$?

Ответ: 30103; $a_n = \left(2^{n-1} - 1\right) \cdot 2^{10}$.

932 (*мех-мат, 2005, устный*). Функция f с областью определения $\mathbb{Z}$ удовлетворяет равенствам

$$f(1) = \cos 1, \quad f(n+1) = f(n) \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для любого ли натурального (целого) n верно неравенство $f(n) > -1$?

Ответ: да ($f(n) = \cos n$).

933 (*мех-мат, 2005, устный*). Найти наименьшее значение функции f, определенной на множестве натуральных чисел и удовлетворяющей следующим равенствам:

$$f(1) = \cos 2, \quad f(n+1) = f(n) \cdot \cos 1 - \sqrt{1 - (f(n))^2} \cdot \sin 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ответ: $\cos 3$ (для четных n $f(n) = \cos 3$; для нечетных n, больших 1, $f(n) = \cos 4$).

6.3. Суммирование числовых последовательностей

934 (*геолог., 1998, устный*). Решить уравнение

$$1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280.$$

Ответ: $x = 55$.

935 (*геолог., 1999, устный*). Найти сумму цифр в десятичной записи числа $n = 10^{1999} - 1999$.

Ответ: 17 964.

936* (*ВМК, 1999, устный*). Доказать, что

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \cdots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

937 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{1000^2} < 2.$$

938 (*ВМК, 2001, устный*). Доказать, что

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{1000}{2^{1000}} < 2.$$

939 (*эконом., 1964*). Найти сумму

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \cdots + 100 \cdot 2^{99}.$$

Ответ: $99 \cdot 2^{100} + 1$.

940 (*ВМК, 1982, устный*). Найти сумму

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

Ответ: $3 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

941 (*ВМК, 2001, устный*). Что больше:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200}$$

или

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{200}?$$

Ответ: суммы равны.

942 (*ВМК, 2002, устный*). Вычислить сумму

$$1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2$$

в общем виде и конкретно при $n = 100$.

Ответ: $(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$; при $n = 100$ сумма равна -5050.

943 (*ВМК, 2002, устный*). Что больше:

$$S = 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \cdots + n! \cdot n \qquad \text{или} \qquad (n+1)!?$$

Ответ: $S = (n+1)! - 1 < (n+1)!$.

944* (*ВМК, 2002, устный*). Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{i}{(i+1)!} + \cdots + + \frac{n}{(n+1)!}$$

в общем виде и при $n = 8$.

Ответ: $S = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$; при $n = 8$ $S = \dfrac{362879}{362880}$.

945 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

946 (*ВМК, 2002, устный*). Докажите, что каждое число последовательности 49, 4489, 444889, 44448889, ... является полным квадратом.

ОТВЕТ: n-й член последовательности равен $\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$; десятичная запись числа $2\cdot 10^n+1$ содержит одну цифру 1 и одну цифру 2 (остальные цифры — нули), так что это число делится на 3.

947 (*ВМК, 2002, устный*). Докажите, что каждое число последовательности 25, 1225, 112225, 11122225, ... является квадратом целого числа.

ОТВЕТ: n-й член последовательности равен $\left(\frac{10^n-5}{3}\right)^2$; десятичная запись числа 10^n-5 содержит одну цифру 1 и одну цифру 5 (остальные цифры — нули), так что это число делится на 3.

948 (*физ., 1965, № 3*). Доказать, что при любом натуральном n число

$$\underbrace{1\ldots1}_{2n\ \text{раз}}-\underbrace{2\ldots2}_{n\ \text{раз}}$$

есть квадрат целого числа.

949 (*ВМК, 2003, устный*). Найти целое число, квадрат которого равен

$$\underbrace{111\ldots111}_{2n\ \text{цифр}}-\underbrace{222\ldots222}_{n\ \text{цифр}}.$$

ОТВЕТ: $\underbrace{3\ldots3}_{n\ \text{цифр}}$.

950 (*ВМК, 2002, устный*). Найти все такие натуральные n, при которых число $\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{раз}}$ является квадратом целого числа.

ОТВЕТ: $n=1$.

951 (*физ., 1964*). Сколько множителей 2 имеется в произведении всех целых чисел от 1 до 500 включительно?

ОТВЕТ: 494.

952 (*ВМК, 2001, устный*). Число

$$P=(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-1)\cdot 2n$$

раскладывается в произведение степеней простых чисел. В какой степени число 2 входит в это разложение?

ОТВЕТ: n.

953 (*мех-мат, 1962*). Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 1962 включительно?

Ответ: 488.

954 (*ФНМ, 2001, заочный тур, № 5*). Сколькими нулями оканчивается число 2000! ?

Ответ: 499.

955* (*мех-мат, 1963, устный*). Доказать, что

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

956 (*ВМК, 1982, устный*). Найти сумму

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

Ответ: $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

957 (*почвовед., 2001, май, № 4*). Найти сумму n первых членов ряда

$$7 + 77 + 777 + \dots$$

Ответ: $\frac{1}{9}\,(77\ldots70 - 7n)$ (в скобках стоит число, составленное из n цифр 7 и цифры 0).

958 (*физ., 1965, № 3*). Найти коэффициент при x^n в разложении:

$$\left(1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n\right)^n.$$

Ответ: $\dfrac{n^3 + 11n}{6}$.

Глава 7

ЗАДАЧИ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

7.1. Признаки делимости

959 (*физ., 1964*). Найти все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$ (x и y — цифры), которые делятся на 36.

Ответ: 34056, 34452, 34956.

960* (*мех-мат, 2001, март, тест перед олимпиадой, № 2*). Найти все числа, кратные числу 72 и имеющие десятичную запись вида $\overline{7X531Y}$, где X и Y — цифры.

Ответ: 705312, 795312.

961 (*ВМК, 2001, устный*). Найти все пятизначные числа, делящиеся на 45, запись которых в десятичной системе имеет вид $\overline{53x1y}$ (x и y — цифры).

Ответ: 53010, 53910, 53415.

962 (*ВМК, 2005, устный*). Известно, что натуральное трехзначное число $p = \overline{abc}$ делится нацело на 37. Могут ли числа $q = \overline{bca}$ и $r = \overline{cab}$ также делиться на 37?

Ответ: эти числа обязательно делятся на 37.

963 (*ВМК, 2005, устный*). Докажите, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из 243 единиц, делится на 243.

964 (*геолог., 2000, устный*). Доказать, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

7.2. Основная теорема арифметики

965 (*фил., 1991, № 1*). Представить число 1991 в виде произведения простых чисел.

Ответ: $1991 = 11 \cdot 181$.

966 (*ВМК, 2004, устный*). Сколько различных делителей имеет число 210^{37}?

Ответ: $2 \cdot 38^4$.

967* (*эконом., 1993, № 5*). За время хранения вклада в банке проценты по вкладу начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}$% и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}$%. Определите срок хранения вклада.

Ответ: $7 = 1 + 1 + 3 + 2$ месяцев.

968 (*мех-мат, 2005, устный*). Найти все целочисленные решения уравнения

$$\left(\frac{45}{8}\right)^{x^3-4x^2+2y+6} = \left(\frac{162}{5}\right)^{y^3-4y^2+2x-1}.$$

Ответ: $x = 2$, $y = 1$.

969* (*эконом., 2000, № 2*). Интервалы движения морских катеров по трем маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 минут соответственно. Сколько раз с 7^{40} до 17^{35} того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 11^{15}?

Ответ: 4.

970 (*эконом., 2005, № 3*). В целях рекламы новой модели автомобиля автосалон установил скидку 10% на каждый седьмой продаваемый автомобиль и 20% на каждый одиннадцатый продаваемый автомобиль новой модели. В случае если на один автомобиль выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Всего было продано 516 автомобилей этой модели. Определить выручку автосалона от продажи автомобилей новой модели, если ее базовая цена составляет 20 000 условных единиц.

Ответ: 10 002 000.

971 (*геолог., 2004, устный*). Является ли число $50^{20} - 49^{11}$ простым?

Ответ: нет.

972* (*ВМК, 1999, устный*). Может ли число $n^4 + 64$ быть простым при каком-либо натуральном n?

Ответ: нет.

973 (*ВМК, 2004, устный*). Найти все простые числа вида $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: 2 (соответствует $n = 2$) и 5 (соответствует $n = 3$).

974 (*ВМК, 1999, устный*). Доказать, что числа 3, 4, 5 не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

975 (*мех-мат, 1998, устный*). Сколько различных целочисленных пар $(x; y)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 = 4y^2 + 2025?$$

ОТВЕТ: 30 пар.

976 (*ВМК, 2004, устный*). Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению

$$m^2 + 1954 = n^2?$$

ОТВЕТ: нет.

977 (*ВМК, 2004, устный*). Доказать, что существует бесконечно много троек натуральных чисел x, y и z таких, что числа $x(x+1)$, $y(y+1)$ и $z(z+1)$ образуют в указанном порядке возрастающую арифметическую прогрессию.

ОТВЕТ: Например, $x = n, y = 5n + 2, z = 7n + 3$.

978 (*мех-мат, 1998, устный*). Найти количество трехзначных чисел, делящихся на 5 или 7 (возможно, одновременно), но не делящихся на 3.

ОТВЕТ: 188.

979 (*мех-мат, 2004, март, заочный тест, № 4*). Сколько различных пар натуральных чисел $x \leqslant y$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2004}?$$

ОТВЕТ: 23.

980 (*ВМК, 1999, устный*). Решить в натуральных числах уравнение

$$3^{x^2+y-1} - 3^{x^2+1} = 486.$$

ОТВЕТ: $x = 2; y = 3$.

981 (*ВМК, 1999, устный*). Решить в целых числах уравнение

$$9^x = 4y + 1.$$

ОТВЕТ: $\left(n; \dfrac{9^n - 1}{4}\right)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$.

982 (*ВМК, 1999, устный*). Решить в натуральных числах уравнение

$$2^x + 1 = y^2.$$

ОТВЕТ: $(3;3)$.

983* (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом.

984 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что число $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ — иррациональное.

985 (*ВМК, 2001, устный*). Найти все целые числа m и n, при которых один из корней уравнения

$$3x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$$

равен $1 + \sqrt{3}$.

ОТВЕТ: $m = -12; n = 6$.

986 (*ВМК, 1995, № 1*). Найти все целые числа n и m, для которых $2mn + n = 14$ и $mn \geqslant 9$.

ОТВЕТ: $m = -1; \quad n = -14$.

987 (*ВМК, 1998, устный*). Найти целое число a, при котором $(x-a)(x-10)+1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

ОТВЕТ: $a = 12$ или $a = 8$ (докажите, что $(b+10)(c+10) = 1$).

988 (*ВМК, 2003, устный*). Найти все целые числа a, при которых многочлен $x^2 - 3ax + 2a^2 + 1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

ОТВЕТ: $a = \pm 2$.

989 (*ВМК, 2003, устный*). При каких натуральных значениях n уравнение $2x^4 - x^3 + nx^2 - 1 = 0$ имеет рациональные корни?

ОТВЕТ: $n = 3$ или $n = 4$.

990 (*ВМК, 2001, устный*). Корни уравнения $x^2 + ax + b + 1 = 0$ являются натуральными числами. Может ли число $a^2 + b^2$ быть простым?

ОТВЕТ: нет.

991 (*мех-мат, заочный тур олимпиады «Абитуриент-2000», № 5*). Пусть m/n — положительная несократимая дробь, и известно, что дробь $\dfrac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

ОТВЕТ: на 7.

992* (*ВМК, 1998, устный*). Найти все целые числа, на которые может быть сократима дробь $\dfrac{5l+6}{8l+7}$ при целых l.

Ответ: ± 13.

993 (*ВМК, 2000, устный*). При каких натуральных n дробь $\dfrac{10n+3}{6n+2}$ несократима?

Ответ: дробь несократима при любом натуральном n.

994 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что дробь $\dfrac{10n+3}{6n+2}$, где $n \in \mathbb{N}$, несократима.

995 (*фил., 1979, № 5*). Пусть m и n — натуральные числа, причем $\dfrac{m}{n}$ есть правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\dfrac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

Ответ: на 11.

996* (*почвовед., 2001, май, № 5*). Решить уравнение в целых числах:

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7.$$

Ответ: $\{(5;-4), (-13;20), (-5;4), (13;-20)\}$.

997 (*географ., 2001, май, № 5*). Найти все целые значения параметра k, при каждом из которых графики функций

$$y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-2k)$$

и

$$y = \log_2(x - 2k^3 - 3k^2)$$

пересекаются в точке с целочисленными координатами.

Ответ: $0; -2$.

998 (*ИСАА, 1998, № 6*). При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.

Ответ: 49 и 83.

999 (*мех-мат, 2000, май, № 2*). Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашел 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашел. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберезовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?

ОТВЕТ: 8.

1000 (*МК-МГУ, 2005, I тур, № 6; мех-мат, 2004, олимпиада, 8 класс, № 3*). В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

ОТВЕТ: 218.

1001 (*географ., 2005, № 5*). В цехе имелось N одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 готовых деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком деталей возросло на 20%. Это позволило по крайней мере без сокращения объемов производства уменьшить число станков максимум на 4. Найти N.

ОТВЕТ: $N = 26$.

1002 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что уравнение $x^3 - px + 1 = 0$, где $p > 2$ — целое, не имеет рациональных корней.

1003 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что если для некоторых натуральных чисел n и m число $n^2 + m^2 - n$ делится нацело на $2nm$, то n является квадратом натурального числа.

1004 (*эконом., 1990, № 4*). Натуральные числа k, l, m, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на l и m соответственно. Найдите числа k, l и m, если известно, что при указанных условиях сумма $k+l+m$ максимальна.

ОТВЕТ: $k = 27, \quad l = 189, \quad m = 1323.$

1005 (*ИСАА, 2000, № 6*). Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n + 5$ соответственно.

ОТВЕТ: 30.

1006 (*ВМК, 1978, № 4*). Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найдите числа, из которых состоит A.

ОТВЕТ: $A = \{6,10,14,30,42,70,105,210\}$.

1007 (*ВМК, 1982, № 4*). На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их число увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

ОТВЕТ: $n = 5$ прессов.

1008 (*ВМК, 1982, № 4*). В университете было несколько библиотек с одинаковым количеством книг в каждой, причем всего книг было 34560. Через некоторое время число библиотек увеличилось на 4, а в каждой из библиотек по-прежнему было по одинаковому количеству книг, по большему, чем раньше. Всего книг стало 70875. Сколько библиотек было первоначально.

ОТВЕТ: 5.

1009 (*ВМК, 2002, устный*). Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$, число $n^{n-1} - 1$ нацело делится на $(n-1)^2$.

1010 (*ВМК, 2001, 2005, устный*). Доказать, что для всех натуральных k число $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ делится на 11.

1011 (*ВМК, 2001, устный*). Доказать, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ является полным квадратом при любом натуральном n.

ОТВЕТ: данное число равно $(n^2 + 3n + 1)^2$.

1012 (*почвовед., 1977, № 5*). Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

ОТВЕТ: 144 человека.

1013 (*экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, № 6*). Найти все пары натуральных чисел k и l, удовлетворяющих условиям: 1) k и l имеют общий целый делитель, больший 4; 2) $53 < k < l$; 3) $k + l \leqslant 119$.

Ответ: $(54; 60), (54; 63), (55; 60), (56; 63)$.

1014 (*ВМК, 2005, устный*). Докажите, что числа $2^m - 1$ и $2^n - 1$ являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда числа m и n — взаимно простые числа.

7.3. Однородные уравнения

1015* (*ВШБ, 2005, № 3*). Найдите все наборы натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} 11x - 6y = z, \\ z - y = 7, \\ x \leqslant 20. \end{cases}$$

Ответ: $(7; 10; 17)$, $(14; 21; 28)$.

1016 (*эконом., 1994, № 1*). Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \leqslant 5, \end{cases}$$

Ответ: $\{(0; 0); \quad (3; 5); \quad (-3; -5)\}$.

1017 (*ВМК, 1998, устный*). Найти минимальные натуральные m и n такие, что $2n^2 = 3m^3$.

Ответ: $m = 6, n = 18$.

1018 (*психолог., 1994, № 5*). Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найдите минимальное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.

Ответ: 432.

1019 (*психолог., 1994, № 5*). Партия деталей была изготовлена цехом в течение нескольких дней, причем каждый день изготовлялось одно и то же число деталей. Когда треть продукции одного дня была упакована в ящики, то в каждом ящике оказалось столько деталей, сколько ящиков понадобилось для упаковки, причем число ящиков было равно числу дней работы цеха. После отсылки половины всех деталей заказчикам выяснилось, что куб числа заказчиков был равен числу деталей, высланных каждому из заказчиков. Какое минимальное число деталей мог при этих условиях изготовить цех?

ОТВЕТ: 41472.

1020 (*ФГУ, 2004, № 4*). Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине — 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

ОТВЕТ: 2445 долларов.

1021 (*почвовед., 2003, май, № 4*). Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

ОТВЕТ: $x = 7n, y = 3n, z = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

1022 (*мех-мат, 2003, устный*). Найти тройку натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению

$$xa^{z+1} = ya^{z-1} - a$$

как при $a = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}$, так и при $a = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$. Конечно ли множество таких троек?

ОТВЕТ: $x = 3, y = 1, z = 1$. Нет.

7.4. Уравнения вида $ax + by = c$

1023 (*фил., 1969, № 5*). Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что

$$36k_1 - 25k_2 = 1.$$

ОТВЕТ: $k_1 = 16$, $k_2 = 23$.

1024* (*фил., 1969*). Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

ОТВЕТ: 22.

1025 (*ВМК, 1999, устный*). Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

ОТВЕТ: 7.

1026 (*фил., 1970, № 7*). Сколькими способами сумму в 4 руб. 96 коп. можно составить из монет по 2 и 15 коп.?

ОТВЕТ: 17.

1027 (*ФНМ, 2001, апрель, № 4*). Учительница принесла в класс счетные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счетных палочек?

ОТВЕТ: 189.

1028 (*психолог., 1967, № 4*). Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами двух арифметических прогрессий 5, 9, 13, ... и 3, 9, 15, ..., если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 200 членов.

ОТВЕТ: 27135.

1029 (*психолог., 1967*). Найти числа, одновременно являющиеся членами арифметической прогрессии 12,15,18,... и геометрической прогрессии 1,3,9,..., если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 100 членов.

ОТВЕТ: 27, 81, 243.

1030 (*соц., 2005, апрель, № 6*). Фирма продавала чай в центре города по 7 рублей, а кофе по 10 рублей стакан, на вокзале по 4 рубля и 9 рублей, соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?

ОТВЕТ: 5 стаканов.

1031 (*ФГУ, 2005, № 5*). Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе сто рублей. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тёма обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Тёмы?

Ответ: 69 руб. 43 коп.

1032 (*мех-мат, 2000, № 3*). Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй — со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов автобусы

а) встретятся в пункте B,

б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B,

если известно, что первый стартует из пункта A, а второй — из пункта B?

Ответ: а) 6 раз; б) 192 раза.

7.5. Уравнения, приводимые к виду $y = \dfrac{a(x)}{b(x)}$

1033* (*ИСАА, 1997, № 7*). Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$3xy + 14x + 17y + 71 = 0.$$

Ответ: $(-4; -3), (-6; -13), (-14; -5)$.

1034 (*геолог., 2001, устный*). Решите уравнение в целых числах: $xy = 2x + y$.

Ответ: $\{(0; 0), (2; 4), (-1; 1), (3; 3)\}$.

1035 (*геолог., 2004, устный*). Решите уравнение $xy = 2003(x + y)$ в целых числах.

Ответ: $\{(0; 0), (4006; 4006), (2002; -2002\cdot 2003), (-2002\cdot 2003; 2002), (2004; 2003\cdot 2004), (2003\cdot 2004; 2004)\}$.

1036 (*геолог., 2005, устный*). Решите в целых числах уравнение

$$xy = 2x + 2y.$$

Ответ: $\{(1;-2), (-2;1), (3;6), (6;3), (0;0), (4;4)\}$.

1037 (*ВМК, 1997, устный*). Найти все целые m, при которых дробь $\dfrac{2m+25}{m+7}$ представляет собой натуральное число.

Ответ: -18, -6, 4.

1038 (*ВМК, 1997, устный*). Найти все пары $(x;y)$ натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 11.$$

Ответ: $(1;6), (2;11), (5;2), (7;6), (11;11)$.

1039 (*психолог., 1975, № 5*). Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

Ответ: $(1;37)$.

1040 (*ВШБ, 2004, № 6*). Найти все пары целых неотрицательных чисел $(k;m)$, являющихся решениями уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

Ответ: $(9;9)$.

1041 (*эконом., 1989, № 6*). Решить в целых числах уравнение

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

Ответ: $(0;2), (-2;0), (0;3), (2;1)$.

1042 (*хим., 1997, май, № 6*). Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

Ответ: $(0;0), (2;2), (0;3), (3;0)$.

1043 (*соц., 2005, № 6*). Группа школьников решила купить музыкальный центр, при этом каждый внес одинаковую сумму. Однако в последний момент двое из них отказались, и каждому из оставшихся пришлось добавить 100 рублей. Сколько школьников первоначально участвовало в покупке, и какова цена музыкального центра, если известно, что она заключена в пределах от 17 000 до 19 500 рублей?

Ответ: 20 школьников, 18 000 рублей.

1044 (*мех-мат, 1992, № 4*). Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

ОТВЕТ: 24.

1045 (*мех-мат, 1992, № 4*). Один рабочий на новом станке производит за 1 час целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма, если производительность рабочих одинакова?

ОТВЕТ: 36.

1046 (*геолог., 2000, май, № 6*). Любая из трех барж разной грузоподъемности может при полной загрузке в каждом рейсе перевезти некоторый груз, причем баржа наименьшей грузоподъемности — за 15 рейсов. Две другие баржи перевозят весь этот груз за 3 совместных рейса. Сколько рейсов необходимо барже наибольшей грузоподъемности для перевозки всего груза (недогрузка запрещается)?

ОТВЕТ: 4.

1047 (*ВМК, 1979, № 4*). Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1.$$

ОТВЕТ: $x_1 = -7$; $\quad x_2 = -31$.

1048 (*психолог., 1999, № 6*). Найти все значения параметра a, при которых существует ровно 5 различных наборов $(x; y; z)$ натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ ayz + axz + axy > xyz, \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\dfrac{5}{11} < a \leqslant \dfrac{6}{13}$.

1049 (*ВМК, 2004, апрель, № 3*). Найти все целые n, при которых справедливо равенство

$$\frac{5n^2 + 4n + 13}{n+1} = 11 - 8\sqrt{1 - 8n}.$$

ОТВЕТ: $n = -15$.

7.6. Деление с остатком

1050* (*ВМК, 2005, устный*). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы квадратов двух других натуральных чисел.

1051 (*ВМК, 2005, устный*). Доказать, что квадрат любого простого числа $p > 3$ при делении на 12 дает в остатке 1.

Указание: простое число $p > 3$ при делении на 6 дает в остатке 1 или 5.

1052 (*ВМК, 2005, устный*). Докажите, что если $(n-1)! + 1$ делится на n, то n — простое число.

1053 (*ВМК, 1997, устный*). Найти все простые числа x, y, удовлетворяющие равенству $x^2 - 3y = 19$.

Ответ: $x = 5; y = 2$.

1054 (*ВМК, 1997, устный*). Доказать, что ни при каком натуральном n число $n^2 + 3n + 1$ не делится на 7.

1055 (*ВМК, 1997, устный*). Доказать, что уравнение $x^2 - 4x - 3y^2 = 1$ не имеет целочисленных решений.

1056 (*ВМК, 2001, устный*). Доказать, что число $n^3 - 7n$ ($n \in \mathbb{N}$) делится на 6.

1057 (*мех-мат, 1963, устный*). Доказать, что числа вида $n^3 + 2n$, $n = 1,2,\ldots$, делятся на 3.

1058 (*ВМК, 2000, устный*). Доказать, что при любом нечетном n число $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48.

1059 (*ВМК, 1999, устный*). Доказать, что если $a+b+c$ делится нацело на 6, то и $a^3+b^3+c^3$ делится нацело на 6, где a, b, c — целые числа.

1060 (*мех-мат, 1998, устный*). Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ число $p^4 - 50p^2 + 49$ делится на 2880.

1061 (*ВМК, 1999, устный*). Доказать, что число $n^3 - n + 3$ составное для любого натурального $n > 1$.

1062 (*ВМК, 1999, устный*). Доказать, что для любого простого $p > 3$ число $10p^2 - 3p + 2$ составное.

1063 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что если p и $8p^2 + 1$ — простые числа, то $8p^2 - 1$ — тоже простое число.

1064 (*ВМК, 1998, устный*). Существует ли такое натуральное число n, что $n^2 + 2n + 3$ делится нацело на 2005?

ОТВЕТ: нет.

1065 (*ВМК, 2002, 2005, устный*). Существует ли такое натуральное число n, что $2n^2 + 3n + 4$ делится нацело на 2005?

ОТВЕТ: нет.

1066 (*ВМК, 1998, устный*). Существуют ли целые m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1998 = n^2$?

ОТВЕТ: нет (докажите, что число $m^2 - n^2$ либо нечетное, либо делится на 4).

1067 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком целом n.

1068 (*ВМК, 2001, устный*). Найти все простые числа p, q, r, удовлетворяющие равенству

$$p^q + q^p = r.$$

ОТВЕТ: $(2; 3; 17)$, $\quad (3; 2; 17)$.

1069 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 3$ не имеет решений в целых числах.

1070 (*ВМК, 1998, устный*). Известно, что $p, p + 10, p + 14$ — простые числа. Найти все такие p.

ОТВЕТ: $p = 3$.

1071 (*ВМК, 2002, устный*). Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится нацело на 120 для всех целых $n > 1$.

1072 (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть полным квадратом целого числа.

1073 (*ВМК, 2005, устный*). Существуют ли пятерки последовательных целых чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа?

ОТВЕТ: таких последовательных целых чисел нет.

1074 (*ВМК, 2002, 2005, устный*). Доказать, что если p и $8p - 1$ — простые числа, то $8p + 1$ — составное число.

1075 (*ВМК, 2003, устный*). k, l, и m — целые числа. Сумма $k^2 + l^2 + m^2$ делится на 4. Доказать, что k, l, и m — четные.

1076 (*ВМК, 2003, устный*). Натуральное число является полным квадратом и оканчивается на 5. Доказать, что его третья справа цифра четная (подразумевается, что число по крайней мере трехзначное).

1077 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что ни при каком натуральном n число $3^n + 2 \cdot 17^n$ не является квадратом натурального числа.

1078 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что ни при каком натуральном n число $1 + 2 + \cdots + n$ не может заканчиваться цифрой 7.

1079 (*ВМК, 2003, устный*). Доказать, что во всех целочисленных точках x функция

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 10$$

принимает целые значения.

1080 (*ВМК, 2001, устный*). Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - 7y^2 = 5.$$

Ответ: $\varnothing$.

1081 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение в целых числах:

$$2^x + 1 = 3^y.$$

Ответ: $\{(1;1),(3;2)\}$.

1082 (*геолог., 2000, устный*). Решите в целых числах уравнение:

$$2^x - 1 = y^2.$$

Ответ: $\{(0;0),(1;1),(1;-1)\}$.

7.7. Использование оценок

1083* (*мех-мат, 2000, устный*). Найти все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых выполняется равенство

$$3xy + 3yz + 3xz = 5xyz + 3.$$

Ответ: $(1;2;3),(1;3;2),(2;3;1),(2;1;3),(3;1;2),(3;2;1)$.

1084 (*ВМК, 2005, устный*). Найти все упорядоченные тройки $(x;y;z)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{13}.$$

Ответ: $(2;3;4)$.

1085 (*ВМК, 2005, устный*). Сумма обратных величин трех натуральных чисел равна 1. Найти эти числа.

ОТВЕТ: $(2;4;4),(2;3;6),(3;3;3)$.

1086 (*ВМК, 2005, устный*). Можно ли представить единицу в виде суммы 2005 попарно различных чисел, обратных натуральным?

ОТВЕТ: можно: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{2003}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{2003}}$.

1087 (*ВМК, 2005, апрель, № 3*). Найти все целые x и y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0.$$

ОТВЕТ: $x = 0; \quad y = -1$.

1088 (*ВМК, 2002, устный*). Найдите все целочисленные решения неравенства

$$3^{\frac{5}{2}\log_3(12-3x)} - 3^{\log_4 x} > 83.$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1; \quad x_2 = 2$.

1089 (*ВМК, 2001, устный*). Может ли сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел быть равна сумме четвертых степеней двух других последовательных натуральных чисел?

ОТВЕТ: нет.

1090 (*ВМК, 2000, устный*). Решить в целых числах уравнение

$$x^2 = 2(xy - y^2 - y).$$

ОТВЕТ: $\{(0;0),(-2;-2),(0;-1),(-2;-1)\}$.

1091 (*мех-мат, 2000, устный*). Найти все пары (m,n) натуральных чисел, для которых выполняется равенство

$$\log_m(n-7) + \log_n(5m-17) = 1.$$

ОТВЕТ: $(4;9), \quad (5;8)$.

1092 (*мех-мат, 1990, № 5*). Найти все тройки целых чисел (x,y,z), удовлетворяющие неравенству

$$\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) + \\ + \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

ОТВЕТ: $(5;4;4)$.

1093 (*мех-мат, 2002, май, № 6*). При каких x оба числа, $\dfrac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\dfrac{1-x}{1+x}$, целые?

Ответ: $1; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{4}$.

1094 (*мех-мат, 2003, устный*). При каких целых n выражение

$$\frac{n^3+n^2/5-n+115}{5n^2-4n-1}$$

принимает целочисленные значения?

Ответ: $n_1 = 0; \quad n_2 = -5$.

1095 (*ВМК, 1999, устный*). Найти все натуральные числа x, y, z, для которых

$$xyz = x + y.$$

Ответ: $(1;1;2), \quad (2;2;1)$.

1096 (*ВМК, 2002, устный*). Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz?$$

Ответ: единственное решение $(0;0;0)$.

1097 (*ВМК, 2004, устный*). Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

Ответ: $(1;1;1)$, $(-1;-1;1)$, $(1;-1;-1)$, $(-1;1;-1)$.

1098 (*ВМК, 2001, устный*). Решить в натуральных числах уравнение

$$k^3 - l^3 = kl + 61.$$

Ответ: $k = 6; l = 5$.

1099 (*ВМК, 2001, устный*). Решить в целых числах уравнение

$$\sqrt{x-\frac{1}{5}} + \sqrt{y-\frac{1}{5}} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $(2;1), (1;2)$.

7.8. Прочие задачи

1100 (*ВМК, 2005, устный*). Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

ОТВЕТ: 686.

1101 (*ВМК, 2003, устный*). Найти все натуральные числа k, l, m, n, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} k^2 + l = m^2, \\ k + l^2 = n^2. \end{cases}$$

ОТВЕТ: таких натуральных чисел нет.

1102 (*ВМК, 2002, устный*). Доказать, что если функция $y = ax^2+bx+c$ при всех целых x принимает целые значения, то $2a$, $a + b$ и c — целые числа. Обратно, если $2a$, $a + b$ и c — целые, то функция $y = ax^2 + bx + c$ при всех целых x принимает целые значения.

1103 (*ВМК, 2002, устный*). Пусть A, B, C — три натуральных числа, записанных по десятичной системе: A — единицами, число которых $2m$, B — единицами, число которых $m + 1$, C — шестерками, число которых m. Доказать, что число $A + B + C + 8$ — точный квадрат.

ОТВЕТ: $A+B+C+8 = \left(\dfrac{10^m+8}{3}\right)^2$. Число $10^m + 8$ в десятичной системе счисления записывается с помощью одной цифры 1, m цифр 0 и одной цифры 8; сумма цифр равна 9, так что это число делится на 3 (частное равно $\underbrace{3\ldots3}_{m \text{ цифр}}6$).

1104 (*ВМК, 2002, устный*). Найти все натуральные n, при которых числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ делятся на 7.

ОТВЕТ: $2^n - 1$ делится на 7 при $n = 3k$; $2^n + 1$ не делится на 7 ни при одном натуральном n.

1105 (*ВМК, 2002, устный*). Является ли число $100007 \cdot 100013 \cdot 100001 + 55$ простым? Ответ обосновать.

ОТВЕТ: нет; если $100001 = a$, то данное число есть

$$(a+6)(a+12)a+55 = a^3+18a^2+72a+55 = (a+1)(a^2+17a+55).$$

1106 (*ВМК, 2001, устный*). Найти все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

ОТВЕТ: 27.

1107 (*ВМК, 1997, устный*). Доказать, что уравнение $x^2 + 4x = 6y^2 + 1$ не имеет целочисленных решений.

1108 (*мех-мат, 2001, № 4*). Найти все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр ровно на 517.

ОТВЕТ: 618, 659, 698.

1109 (*эконом., отд. менеджмента, 2005, № 6*). Найти все целые значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$\sqrt[3]{x^6} - \left(\frac{1}{a} - 2\right) \cdot \sqrt[4]{x^4} + 1 - \frac{2}{a} = 0$$

являются целыми числами.

ОТВЕТ: $a = 2$.

1110 (*эконом., 2005, № 6*). Найти все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{x \cdot (y-1)^2 + 1 - 3y^2} + \log^2_{\left(\frac{|x+3|}{26}\right)} \cos 2\pi x = 0.$$

ОТВЕТ: $\left(3; \frac{2}{3}\right)$; $\left(2n^2 + 2n - 1; 1 - \frac{1}{n+2}\right)$;
$\left(2n^2 + 2n - 1; 1 + \frac{1}{n-1}\right)$; $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -4; -2; 1; 3$.

1111 (*эконом., 1998, № 7*). Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и Б общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида Б. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определить цену продажи одной акции видов А и Б.

ОТВЕТ: 426 и 142 рублей.

1112 (*фил., 2003, № 5*). Найти все значения параметра b, при каждом из которых для любого a неравенство

$$(x - a - 2b)^2 + (y - 3a - b)^2 < \frac{1}{2}$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение (x, y).

ОТВЕТ: $b \neq \frac{k}{5}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

1113 (*ФФМ, 2003, май, № 7*). Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за 6 лет увеличилось на 20 615 человек. Найти первоначальную численность сотрудников корпорации.

ОТВЕТ: 1984.

1114 (*мех-мат, 1997, март, № 3*). Считая x и y целыми числами, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x^2+2xy+1} = (z+2)\cdot 7^{|y|-1}, \\ \sin\dfrac{3\pi x}{2} = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;-1;-1), \quad (-1;1;-1)\}$.

1115 (*ФГУ, 2004, № 6*). Каково минимальное число гирь, необходимое для того, чтобы взвесить любой груз массой от 1 до 39 килограммов на рычажных (чашечных) весах, если известно, что этот груз может весить только целое число килограммов?

Ответ: 4.

Глава 8

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

8.1. Простые задачи на составление уравнений

1116 (*соц., 2002, № 4*). Куплен товар двух сортов: первого на 1200 руб. и второго на 1500 руб. Товара второго сорта куплено на 10 кг больше, чем первого, и по цене на 20 руб. за 1 кг меньше. Сколько куплено товара первого сорта?

Ответ: 15 кг.

1117* (*фил., 1972, № 1*). Известно, что 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 2 руб. 38 коп., а 2 кг лука и 4 кг огурцов стоят 8 руб. 20 коп. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе?

Ответ: 4 руб. 32 коп.

1118 (*фил., 1971, № 1*). Четыре школьника сделали в магазине канцелярских товаров следующие покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 коп.; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 коп.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 коп.; четвертый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвертый школьник?

Ответ: 39 коп.

1119 (*ФГП, 2005, № 1*). В турнире борцов участвуют 127 спортсменов. Борец выбывает из соревнований сразу после поражения в поединке. Сколько поединков требуется провести, чтобы выявить победителя турнира?

Ответ: 126.

1120 (*ФГУ, 2004, № 1*). Тест, который должен пройти испытуемый, состоит из 26 вопросов. За каждый неверный ответ у испытуемого вычитается пять очков, а за каждый правильный — начисляется восемь очков. Испытуемый дал ответы на все вопросы. На сколько вопросов он ответил правильно, если в итоге сумма полученных им очков оказалась равной нулю?

Ответ: 10.

1121 (*ВШБ, 2004, № 5*). Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 3?

Ответ: 8 час. 15 мин.

1122 (*эконом., отд. полит. экономии, 1972, № 3*). Один учебник алгебры, два учебника геометрии и два учебника тригонометрии стоят вместе 2 руб. 10 коп., а три учебника алгебры, один учебник геометрии и один учебник тригонометрии стоят вместе 2 руб. 30 коп. Сколько стоят учебник геометрии и учебник тригонометрии вместе?

Ответ: 80 коп.

1123 (*эконом., отд. полит. экономии, 1978, № 4*). Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагон вместимостью 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Ответ: 1750 т.

1124 (*эконом., 1987, № 2*). В магазине продано 12 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

Ответ: 5,5 т., 4 т., 2,5 т.

1125 (*геолог., 1986, № 4*). Студенческий строительный отряд оборудовал прямоугольную спортплощадку площадью 0,1 га, установив с противоположных более длинных сторон трибуны, а с двух других сторон — проволочную сетку. Стоимость установки одного погонного метра трибун и сетки равна соответственно 7 руб. и 3 руб. На установку трибун и сетки израсходовано 820 рублей. Найти длины сторон спортплощадки.

Ответ: 50 м, 20 м.

1126 (*почвовед., 1984, № 1*). Площади трех участков земли относятся как 4:3:5. Средняя урожайность всех трех участков одинакова и составляет 28 ц с 1 га. Известно, что с третьего участка собрано на 84 ц зерна больше, чем с первого. Определить, какова площадь каждого из трех участков.

Ответ: 12 га, 9 га, 15 га.

1127 (*почвовед., 1992, № 2*). Шофер грузовика, занятого на строительстве, при постоянной продолжительности рабочего дня перевозит грузы трех типов: щебень, песок и кирпич, соответственно по-разному расходуя горючее. В первый день половину рабочего дня он возил щебень, а половину — песок; во второй день $1/7$ времени возил щебень, $4/7$ времени — песок и $2/7$ времени — кирпич; в третий день $1/4$ времени — щебень, $3/8$ времени — песок и столько же времени — кирпич. На сколько процентов израсходует шофер дневной норматив горючего, возя целый день щебень, если в первый день он израсходовал его на 95%, во второй — на $101\frac{3}{7}$%, а в третий — на 101,25%?

Ответ: 90%

1128 (*мех-мат, 2003, март, тест перед олимпиадой, № 4*). Ваня хотел купить на рынке 2 яблока, 3 апельсина и 5 бананов. Однако он перепутал и купил 2 банана, 3 яблока и 5 апельсинов, потратив в точности запланированную сумму. Расположить яблоко, апельсин и банан в порядке возрастания цены, если известно, что яблоко дороже банана.

Ответ: апельсин, банан, яблоко.

8.2. Задачи на многозначные целые числа

1129* (*почвовед., 2003, май, № 3*). Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8.

Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность между цифрами десятков и единиц исходного числа, то в частном получится 15, а в остатке 2. Найти это число.

Ответ: 74.

1130 (*психолог., 1984, № 6*). Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами:

а) первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр;

б) разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

Ответ: 233, 390,466, 699.

1131 (*ИСАА, 1991, № 4*). При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 10, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 2. При делении полученного (неверного) произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найти множители.

Ответ: 35 и 45.

1132 (*ИСАА, 1998, № 6*). При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.

Ответ: 49 и 83.

1133 (*геолог., 1999, май, № 4*). Найти такое натуральное двузначное число, что сумма квадрата числа его десятков и ушестеренного квадрата числа единиц равна умноженной на пять сумме произведения цифр этого числа и 1.

Ответ: 74.

1134 (*физ., 1983, № 4*). После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

Ответ: 83.

1135 (*ВМК, 2003, устный*). Пусть $n = \overline{abc}$ — трехзначное число и $f(n) = a + b + c + ab + ac + bc + abc$. Найти все n, для которых $\frac{n}{f(n)} = 1$.

Ответ: $n = \overline{a99}$.

1136 (*ВМК, 2003, устный*). Найти все четырехзначные числа, являющиеся квадратом целого числа, у которых первая цифра совпадает со второй, а третья цифра совпадает с четвертой.

Ответ: 7744.

1137 (*мех-мат, 2001, № 4*). Найти все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр ровно на 517.

Ответ: 618, 659, 698.

8.3. Задачи на проценты

1138 (*МШЭ, 2005, № 3*). Цена товара изменяется два раза в год: в апреле она повышается на 20%, а в сентябре снижается на 20%. Какова будет цена товара в декабре 2005 г., если в январе 2004 г. она составляла 6250 руб.?

ОТВЕТ: 5760 руб.

1139* (*соц., 2004, № 3*). Популярность продукта А за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта Б. Популярность продукта Б в 2002 году снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменилась, а за 2004 год выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта А за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{2}{3}$ от популярности продукта Б?

ОТВЕТ: популярность продукта А за 2004 год выросла на $55\frac{5}{9}$%.

1140 (*соц., 2004, апрель, № 3*). На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — лишь 4%. Найти средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете Y учится на 50% больше студентов, чем на факультете X, а на факультете Z — вдвое меньше, чем на факультете X.

ОТВЕТ: 14%.

1141 (*соц., 2003, № 4*). В городе N на должность мэра на выборах баллотировались 3 кандидата: Акулов, Баранов и Воробьев. В начале предвыборной компании предпочтения избирателей распределялись как $1 : 2 : 1$. По окончании предвыборной гонки 40% избирателей города N отказались участвовать в выборах, у остальных же предпочтения не изменились. Сколько процентов сторонников каждого кандидата отказались от голосования, если по окончании предвыборной гонки соотношение голосов стало $3 : 3 : 3{,}6$?

ОТВЕТ: 25%, 62,5%, 10%.

1142 (*соц., 2001, № 3*). В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%?

ОТВЕТ: $8\frac{3}{4}$%.

1143 (*соц., 2000, № 2*). В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

Ответ: 4%.

1144 (*соц., 1998, № 3*). В городе N 9% коренного населения в зимний период занято народным промыслом. Летом 36% коренного населения уезжает из города, но общая численность населения за счет приезжающих туристов составляет $4/5$ от численности в зимний период. Определить, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

Ответ: 7,2%.

1145 (*соц., 1998, № 3*). В университете города М 6% студентов обучались на платной основе, причем эта доля была одинакова на всех курсах. Летом 22% студентов были выпущены из стен университета, но за счет приема абитуриентов численность студентов составила $6/5$ от прежней. Определить, какая доля студентов будет обучаться на платной основе, если новый набор осуществлялся только на места, финансируемые из госбюджета.

Ответ: 3,9%.

1146 (*фил., 2005, № 2*). На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе, как $5:3$. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

Ответ: 240 человек.

1147 (*фил., 2002, апрель, № 3*). Автор и редактор вносят исправления в рукопись. При каждом прочтении автор увеличивает объем рукописи на 10 страниц, а редактор каждый раз сокращает ее на 20%.

а) Каким был первоначальный объем рукописи, если после того, как ее один раз прочитал автор, а потом дважды прочитал редактор, ее объем составил 800 страниц?

б) Каким был первоначальный объем рукописи, если после прочтения автором, а затем редактором, и опять автором и редактором, ее объем остался прежним?

Ответ: а) 1240 стр.; б) 40 стр.

1148 (*фил., 2001, № 4*). Писатель-западник (З) и писатель-славянофил (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву «ф» в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем С. Тираж книги писателя С на 5% больше, чем тираж книги писателя З. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв «ф» больше или меньше, чем в текстах С?

Ответ: 50%.

1149 (*ФГП, 2005, № 6*). Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех магазинах, расположенных в разных районах города, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй — 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором — 25%?

Ответ: 20%.

1150 (*ФГУ, 2003, № 3*). Три предприятия A, B и C на паритетных (равных) началах прокладывают необходимую им шоссейную дорогу длиной 16 км. Предприятие A взяло на себя прокладку 10 км дороги, предприятие B — остальных 6 км, а предприятие C внесло всю свою долю деньгами, уплатив 16 миллионов условных денежных единиц. Как эти деньги должны быть распределены между предприятиями A и B?

Ответ: A — 14 млн, B — 2 млн.

1151 (*ФГУ, 2001, № 3*). В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи — со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.

Ответ: 5400 рублей и 8100 рублей.

1152 (*ИСАА, 2005, № 4*). Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 20% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 15% с тем, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара.

ОТВЕТ: 2%.

1153 (*ИСАА, 1994, № 1*). Суммарный доход двух предприятий возрастет втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в четыре раза. Найти отношение первоначальных доходов этих предприятий и выяснить, во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя первоначальный доход второго, чтобы их суммарный доход возрос в четыре раза.

ОТВЕТ: 1 : 2; 10.

1154 (*ВШБ, 2005, № 5*). На ферме средняя урожайность зерновых с гектара в 2003 году выросла на некое число процентов по сравнению с 2002 годом. В 2004 году средняя урожайность сократилась по сравнению с 2003 годом на такое же число процентов, на которое она выросла в 2003 году. В результате в 2004 году средняя урожайность составила 1980 килограммов с гектара. Если бы в 2004 году средняя урожайность продолжала расти тем же темпом, как и в 2003 году, то она составила бы в 2004 году 2420 килограммов с гектара. Определите, какова была средняя урожайность зерновых с гектара в 2002 году, и каким был темп роста средней урожайности с гектара в 2003 году.

ОТВЕТ: 2000 кг; 10%.

1155 (*ВШБ, 2003, № 2*). В банке общая сумма кредитов, выданных населению, составляет 25% от суммы кредитов, выданных предприятиям. Какой процент от общего объема кредитования в этом банке приходится на долю предприятий?

ОТВЕТ: 80%.

1156 (*ВШБ, 2003, апрель, № 2*). После того как 1500 новых вкладчиков открыли в банке счета на общую сумму в 7 млн 800 тыс. руб., средний размер вклада, составлявший 6 тыс. руб., уменьшился на 10%. Определить число старых вкладчиков банка.

ОТВЕТ: 500.

1157 (*эконом., отд. менеджмента, 2003, апрель, № 2*). Для заготовки сена фермер три раза с интервалом в неделю скашивал на заливном лугу одно и то же количество травы. После трех покосов масса травы на лугу уменьшилась на 78,3% по сравнению с ее первоначальным значением до начала покосов. Определить, сколько процентов от первоначальной массы травы на лугу составляет масса всей скошенной травы, если еженедельный прирост травы составляет 10%.

ОТВЕТ: 90%.

1158 (*эконом., 2001, № 2*). Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумма 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго — 20%?

ОТВЕТ: 2 млн 400 тыс. рублей и 3 млн 600 тыс. рублей.

1159 (*эконом., отд. кибернетики, 1979, № 3*). Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равна 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

ОТВЕТ: 726.

1160 (*эконом., отд. полит. экономии, 1971, № 1*). Выработка продукции за год работы предприятия возросла на $P\%$, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

ОТВЕТ: 17%.

1161 (*геолог., 1998, № 4*). Из цистерны в бассейн сначала перелили 50% имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 л, затем еще 5% от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31%. Сколько воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 л воды?

ОТВЕТ: 1000 л.

1162 (*геолог., 1997, май, № 5*). В свежих грибах влага составляет 9/10 от общей массы, а в сушеных — 1/10. Сколько нужно собрать грибов, чтобы заготовить 1 пуд сушеных грибов?

ОТВЕТ: 9 пудов.

1163 (*геолог., 1996, № 6*). В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке — 50% к текущей сумме на счете, во втором — 75% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги — во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах утроилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

ОТВЕТ: $\frac{1}{13}$.

1164 (*геолог., 1994, № 7*). Геологическая информационная система поставляется на четырех дискетах. При установке их на компьютер каждая из дискет увеличивает объем этой системы на определенное количество процентов по отношению к предыдущему объему: первая дискета — на 10%, вторая дискета — на 12%, третья дискета — на 25%, четвертая дискета — на 30%. На сколько процентов в результате увеличится объем этой системы?

ОТВЕТ: 100,2%.

1165 (*геолог., отд. общей геологии, 1980, № 4*). Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

ОТВЕТ: месячный план был перевыполнен на 42,3

1166 (*Севастополь, 2002, № 3*). В банк кладется 1000 руб. В каком случае вкладчик получит через год больше денег: если банк начисляет 6% годовых от имеющей суммы один раз в год, или если вклад через каждые три месяца увеличивается на 1,5%?

ОТВЕТ: второй вариант выгоднее.

1167 (*Севастополь, 2001, № 1*). В коробке находятся красные и синие шары, причем синие шары составляют 1% от общего числа шаров. После того как из коробки взяли часть красных шаров, доля синих от общего числа оставшихся в коробке шаров составила 2%. Найдите отношение числа взятых красных шаров к первоначальному общему числу шаров в коробке.

Ответ: 1 : 2.

1168 (*почвовед., 1993, № 1*). Разделите число 128 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй как 2 : 3, вторая к третьей — как 3 : 5, а третья к четвертой — как 5 : 6.

Ответ: 16, 24, 40, 48.

1169 (*почвовед., 1992, № 2*). Самолет, осуществляя полет по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях А, Б и В с одной и той же скоростью, но по-разному расходуя горючее. В первый раз самолет находился в метеоусловиях А половину полетного времени, в метеоусловиях Б — треть времени, в метеоусловиях В — 1/6 полетного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях А и 3/4 — в метеоусловиях В. В третий раз — по четверти полетного времени в метеоусловиях А и Б, а половину времени — в метеоусловиях В. На сколько процентов израсходует самолет полетный норматив горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях В, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\%$, во второй — на 92,5, а в третий — на 97,5%.

Ответ: 90%.

1170 (*биолог., 2003, апрель, № 3*). В симпозиуме по математическим проблемам в биологии, проходившем в течение трех дней, участвовали биологи и математики. В первый день работы симпозиума в нем приняли участие ученые обеих специальностей. На второй день на симпозиум прибыли дополнительно специалисты по математике; при этом доля числа биологов в общем числе участников симпозиума изменилась, и разность ее значений в первый и во второй день составила $\frac{1}{20}$. На третий день к работе симпозиума присоединились специалисты-биологи, в результате чего доля числа математиков в общем количестве математиков изменилась, и разность ее значений во второй и в третий день составила $\frac{7}{100}$. По окончании симпозиума оказалось, что первоначальная доля числа биологов больше окончательной доли числа математиков, причем разность их значений равна $\frac{1}{25}$. Найти долю числа биологов среди участников симпозиума в первый день.

Ответ: 51%.

1171 (*мех-мат, 2001, март, тест перед олимпиадой, № 1*). Толя полил удобрением помидоры на участке из расчета 2 лейки на 5 кустов, а надо было — 3 лейки на 7 кустов. Из какого расчета ему нужно дополнительно полить кусты, чтобы исправить ошибку?

ОТВЕТ: 1 лейка на 35 кустов.

8.4. Задачи на смеси и сплавы

1172* (*физ., 1978, № 2.С*). Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?

ОТВЕТ: 15 тонн.

1173 (*геолог., 1997, май, № 5*). В свежих грибах влага составляет $\frac{9}{10}$ от общей массы, а в сушеных — $\frac{1}{10}$. Сколько нужно собрать грибов, чтобы заготовить 1 пуд сушеных грибов?

ОТВЕТ: 9 пудов.

1174 (*почвовед., 1999, № 5*). Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-ного водного раствора спирта, чтобы получить 6%-ный раствор?

ОТВЕТ: 2/3 л.

1175 (*фил., 2000, № 1*). Имеется 40 литров 0,5%-ного раствора и 50 литров 2%-ного раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5%-ного раствора уксусной кислоты?

ОТВЕТ: 10 и 20 л.

1176 (*эконом., 1965, № 1*). Один сплав содержит медь и олово в отношении 2 : 1, а другой — в отношении 3 : 2. По скольку частей нужно взять каждого из этих сплавов, чтобы получить третий сплав, в котором медь и олово содержатся в отношении 27 : 17?

ОТВЕТ: 9 и 35.

1177 (*ВМК, 1996, № 2*). Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой.

Ответ: 5 литров.

1178 (*почвовед., 1978, № 3.С*). Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

Ответ: первый слиток в 2 раза тяжелее второго.

1179 (*экон., отд. полит. экономии, 1980, № 4*). Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.

Ответ: 170 кг.

1180 (*геолог., 2001, май, № 6*). При проведении опыта раствор A был получен растворением ненулевого объема кислоты в воде. Раствор B был получен из раствора A добавлением некоторого объема воды, при этом концентрация раствора (отношение объема кислоты к общему объему раствора) уменьшилась на 40%. Раствор C получен из раствора B добавлением нового количества воды, в два раза большего по объему, чем было добавлено к раствору A при получении B. Во сколько раз концентрация раствора B больше концентрации раствора C?

Ответ: 1,8 раза.

1181* (*геолог., 1995, № 6*). Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке — 10%, во втором — 40%. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором — 30%. Определите массу полученного слитка.

Ответ: 9 кг.

1182 (*географ., 1981, № 3*). Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый — 40%, второй — 60%. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20% раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80% раствора, то получился бы 70% раствор. Сколько было 40% и 60% растворов?

ОТВЕТ: 1 кг 40-процентного и 2 кг 60-процентного раствора.

1183 (*ФНМ, 2004, апрель, № 1*). Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 литра 40%-ного и 6 литров 60%-ного растворов кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество чистой воды, в результате чего получился 39%-ный раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено?

ОТВЕТ: 2,5 литра.

1184* (*МК-МГУ, 2006, № 1*). Чашка до краев наполнена черным кофе в количестве 100 мл, а в кувшин налито 300 мл молока. Какое количество кофе надо перелить из чашки в кувшин и, перемешав, снова наполнить ее до краев полученной смесью, чтобы молока и кофе в чашке оказалось поровну?

ОТВЕТ: 60 мл.

1185 (*геолог., отд. геофизики, 1981, № 5*). Для составления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда: первый емкостью 10 литров, второй — 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости A. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько было в него ее налито сначала, отношения количества жидкости A ко всему объему имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд?

ОТВЕТ: 3 литра.

1186 (*ВМК, 2000, № 2*). Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора 1 л воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора 39 л воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найти концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

ОТВЕТ: 90%.

1187 (*биолог., 1966, № 1*). Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора вдвое больше по весу, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго раствора испарилось по 200 г воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по весу, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?

Ответ: 5 г и 20 г.

1188 (*геолог., 1996, май, № 5*). В одном декалитре кислотного раствора 96% объема составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40%?

Ответ: не менее 1,4 декалитров.

1189 (*биолог., 1976, № 3*). Имеются две смеси N1 и N2, составленные из одних и тех же веществ А, Б, В, но взятых в различных весовых соотношениях. В смеси N1 вещества В в 9 раз меньше, чем вещества А, и в 2 раза меньше, чем вещества Б. Соединив 6 кг смеси N1 с 3 кг смеси N2 и добавив 1 кг вещества А, получили новую смесь, в которой вещества А в 6 раз больше, чем вещества Б, а вещества В столько же, сколько вещества Б. Требуется определить весовое соотношение веществ А, Б, В в смеси N2.

Ответ: 8:1:3.

1190 (*психолог., 1986, № 4*). В три сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятых в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?

Ответ: 200 г.

1191 (*фил., 1990, № 4*). От двух сплавов массой 7 кг и 3 кг с различным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава. Кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

ОТВЕТ: 2,1 кг.

1192 (*почвовед., 1997, № 4*). В сосуде находится 10%-ный раствор спирта. Из сосуда отлили 1/3 содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на 5/6 первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в воде?

ОТВЕТ: концентрация спирта — 8%.

1193 (*геолог., 1989, № 5*). В баке находилось 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объему количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством ее в исходной смеси. Определить количество воды в исходной смеси.

ОТВЕТ: 60 литров.

1194* (*геолог., 1989, № 5*). В сосуде находилось 9 кг раствора соли в воде. Из сосуда отлили часть раствора и добавили количество воды, равное по весу отлитой части раствора. Затем опять вылили столько же по весу раствора, сколько в первый раз. После этого количество соли в сосуде уменьшилось в 9/4 раз по сравнению с исходным количеством. Определить первоначальное количество соли в сосуде, если известно, что вес добавленной воды вдвое меньше первоначального веса соли в растворе.

ОТВЕТ: первоначально в сосуде находилось 6 кг соли.

1195 (*эконом., отд. полит. экономии, 1979, № 3*). Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

ОТВЕТ: глицерина — 0,5 литра, воды — 3,5 литра.

1196 (*почвовед., 1988, № 4*). Два вида удобрений А и Б отличаются весовым содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении А азота содержится в три раза, а фосфора в два раза больше по весу, чем калия. В удобрении Б соответственно азота в $5/3$ раза больше, а фосфора в 1,5 раза меньше, чем калия. Можно ли за счет смешивания удобрений А и Б приготовить удобрение, в котором азота в два раза, а фосфора в три раза больше, чем калия?

ОТВЕТ: нельзя.

8.5. Задачи на совместную работу

1197* (*ФГУ, 2002, № 5*). Одна труба наполняет бассейн на 2 часа дольше, а другая на 4 часа 30 минут дольше, чем наполняют этот бассейн обе трубы, открытые одновременно. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

ОТВЕТ: 5 часов и 7 часов 30 минут.

1198 (*соц., 2003, № 5*). Двое рабочих изготовили 316 деталей, причем вторым сделано на 4 детали меньше первого. Известно, что первый рабочий работал на три дня дольше второго, при этом в день изготовлял на 2 детали меньше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?

ОТВЕТ: первый рабочий делал 10 деталей в день, второй — 12.

1199 (*фил., 2004, № 5*). Криптографическая лаборатория получила задание расшифровать три текста одинакового объема. Капитан Иванов на расшифровку первого и второго текстов в сумме затратил 40,5 минут, а на расшифровку второго и третьего — 37,5 минут. Оказалось также, что второй текст он расшифровывал с такой же скоростью, как в среднем первый и третий. За какое время капитан Иванов выполнил задание?

ОТВЕТ: 58,5 мин.

1200 (*фил., 1981, № 4*). Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $1/3$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

ОТВЕТ: первый рабочий изготовлял в час 20 деталей, второй рабочий — 18 деталей.

1201 (*фил., 1979, № 4*). Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

ОТВЕТ: 8 ч.

1202 (*фил., 1969, № 1*). В бассейн проведено три трубы, по которым в него течет вода. Первая и вторая трубы вместе наполняют бассейн на $\frac{35}{18}$ часа быстрее, чем первая и третья трубы вместе, а вторая и третья трубы вместе наполняют его за 10 часов. Какую часть бассейна в час наполняет вторая труба, если она одна наполняет его в $\frac{7}{5}$ раза дольше, чем одна первая труба?

ОТВЕТ: $\frac{1}{14}$.

1203 (*эконом., 1984, № 4*). Пятьдесят два землекопа, работающие с одинаковой производительностью, были разбиты на две бригады, каждая из которых вырыла по одинаковому котловану. Обе бригады работали с перерывами на отдых. Первая бригада, закончив работу на 1 час позже второй, отдыхала не менее полутора часов. Вторая бригада отдыхала не более 1 часа 20 минут. Если бы обе бригады работали без перерывов, то первая могла бы вырыть котлован в 1,5 раза больше, а вторая — в 1,4 раза больше. Определить число землекопов в каждой бригаде.

ОТВЕТ: 24 и 28.

1204 (*экон., отд. полит. экономии, 1977, № 1*). Для разгрузки парохода выделено две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое может самостоятельно разгрузить пароход первая бригада, прибавить время, за которое может самостоятельно разгрузить пароход вторая бригада, то получится 12 часов. Определить эти времена, если их разность составляет 45% времени, за которое обе бригады могут разгрузить пароход совместно.

Ответ: $6\frac{2}{3}$ ч; $5\frac{1}{3}$ ч.

1205 (*геолог., 1998, май, № 4*). Первая бригада выполняет работу на 2 часа быстрее второй бригады и на 7 часов медленнее, чем обе бригады, работающие одновременно. Выполнят ли бригады, работающие одновременно, эту работу быстрее, чем за 7 ч 57 мин?

Ответ: Время выполнения работы составляет $\sqrt{63}$ ч, что меньше, чем 7 ч 57 мин.

1206 (*геолог., 1997, № 5*). В момент, когда два бассейна были пустыми, 5 труб одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на 1/3 его объема, 2 трубы переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на 1/2 его объема, еще одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найти отношение объемов бассейнов. (Временем на переключение пренебречь.)

Ответ: $V_2 : V_1 = 31 : 36$.

1207 (*геолог., 1994, № 9*). Четыре бригады разрабатывали месторождение нефти в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. В течение пяти последних месяцев второго года и первых трех месяцев третьего года работа не проводилась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношения времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

а) в первый год 4 : 5 : 2 : 1 и 17 млн т.

б) во второй год 2 : 3 : 1 : 1 и 10 млн т.

в) в третий год 1 : 2 : 2 : 4 и 11 млн т.

Сколько миллионов тонн нефти выработали бы за 2 месяца четыре бригады, работая вместе?

Ответ: 10 млн т.

1208 (*геолог., 1985, № 3*). Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если работая вместе, они изготовили за один час 30 деталей?

Ответ: 9 часов.

1209 (*геолог., отд. общей геологии, 1979, № 4*). Экскаваторщик получил задание выкопать две траншеи одинаковой глубины на различных участках строительной площадки. Экскаватор сначала вырыл первую траншею длиной 5 метров, потом доехал до второго участка и вырыл вторую траншею длиной 3 метра. Время, затраченное на прокладку первой траншеи, на 1 час 12 минут меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора и рытье второй траншеи. Если бы производительность экскаватора была в 4 раза меньше, то время, затраченное на прокладку первой траншеи, равнялось бы времени переезда экскаватора с одного места работы на другое. Определить длину траншеи, выкапываемой экскаватором за один час.

ОТВЕТ: 15 м.

1210 (*геолог., отд. геофизики, 1977, № 1*). В бак может поступать вода через одну из двух труб. Через первую трубу бак можно наполнить на час быстрее, чем через вторую трубу. Если бы емкость бака была больше на 2 м^3, а пропускная способность второй трубы была бы больше на $4/3$ м^3, то для наполнения бака через вторую трубу понадобилось бы столько же времени, сколько требуется для пропуска 2 м^3 воды через первую трубу. Какова емкость бака, если известно, что за время его наполнения через вторую трубу через первую трубу могло бы поступить 3 м^3 воды?

ОТВЕТ: 2 м^3.

1211 (*Севастополь, 2003, май, № 2*). Бассейны A и B одинаковой емкости заполняются водой через несколько труб. Через каждую трубу в бассейне A поступает воды на 20% меньше, чем через каждую трубу в бассейне B. Количество труб, заполняющих бассейн A, на 20% больше числа труб, заполняющих бассейн B. Какой бассейн заполнится быстрее?

ОТВЕТ: бассейн B.

1212 (*психолог., 2005, № 5*). По вечерам Солоха зазывала Пацюка к себе на ужин и угощала варениками. Вареники у Солохи были вкусны и всегда на удивление одинаковы: в какой день ни возьми — все точь-в-точь как один. Ужинали они только вдвоем, да так уважительно, что уж если кто-то из них кушал вареники, то другой в это время не кушал, а нахваливал, и наоборот, если кто-то не кушал вареников, то другой в это самое время обязательно их кушал. Каждый из них кушал размеренно, поглощая вареники со своей постоянной скоростью, одною и той же в разные вечера, причем Пацюк поглощал вареники втрое быстрее Солохи.

В первый вечер они съели полную миску вареников за 3 часа, причем 2 часа кушал вареники Пацюк, а один час кушала Солоха. Во второй вечер к радости хозяйки не дольше, чем за 3 часа, была поглощена вся другая миска вареников, а в третий вечер — целая третья миска, причем не быстрее, чем за 1 час. Больше Пацюк в гости к Солохе почему-то не ходил.

А миски у Солохи были таковы, что коли сложить бы все вареники, приготовленные и съеденные в первый вечер, с двумя такими мисками, какая в третий вечер была съедена, то получилась бы как раз миска вареников, выкушанных во второй вечер. Какую долю всех приготовленных к этим трем ужинам вареников съел Пацюк?

ОТВЕТ: $\frac{15}{17}$.

1213 (*географ., биоинж., 2003, май, № 4*). Двум тракторам $T1$ и $T2$ необходимо вспахать два поля A и $Б$. Если $T1$ начнет вспахивать поле A и в это же время $T2$ начнет вспахивать поле $Б$, то к моменту, когда $T1$ закончит работу на A, трактору $T2$ останется вспахать a гектар на поле $Б$. Если же, наоборот, одновременно $T1$ начнет работать на $Б$, а $T2$ на A, то к моменту, когда $T1$ закончит вспахивать $Б$, трактору $T2$ останется b гектар на A. Известно, что числа a и b различны, а разность $b-a$, уменьшенная на 25%, равна разности площадей полей A и $Б$, выраженной в гектарах. Какова производительность трактора $T2$, если производительность $T1$ равна 9300м^2/день?

ОТВЕТ: 3100м^2/день.

1214 (*географ., 1986, № 3*). Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 100 л воды в минуту, во вторую 60 л и в третью 80 л. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья частично заполнены, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

ОТВЕТ: в 2 раза.

1215 (*почвовед., 2005, № 4*). Грузовики трех типов: A, B и C возили кирпич. В первый день работали по пять грузовиков каждого типа и выполнили весь объем работы за 3 часа 12 минут. Во второй день за 6 часов 40 минут этот же объем работы выполнили по два грузовика типов A и B и четыре грузовика типа C. За сколько часов был бы выполнен весь объем работы, если бы кирпич возили два грузовика типа A и два грузовика типа B?

ОТВЕТ: 10 часов.

1216 (*почвовед., 1986, № 3*). Два трактора разной мощности, работая одновременно, вспахали поле за 2 часа 40 минут. Если бы первый трактор увеличил скорость вспашки в два раза, а второй — в полтора раза, то поле было бы вспахано за 1 час 36 минут. За какое время вспахал бы поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью?

ОТВЕТ: 8 часов.

1217 (*почвовед., 1981, № 1*). Три бригады работают с постоянной производительностью, прокладывая рельсовые пути. Первая и третья бригады, работая совместно, прокладывают 15 км путей в месяц. Три бригады вместе укладывают в месяц путей в два раза больше, чем первая и вторая бригады при их совместной работе. Найти, сколько километров путей укладывает в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада.

ОТВЕТ: третья бригада укладывает в месяц 9 км пути.

1218 (*биолог., 2003, № 4*). Три пустых бассейна D, F и G одинакового объема заполняли водой из труб с постоянными производительностями. Бассейны D и G начали заполнять одновременно, а бассейн F позднее. Первым был заполнен бассейн D. Через 20 минут после начала заполнения бассейна F объем воды в нем сравнялся с объемом воды в бассейне G. Бассейн F был заполнен через 80 минут после начала заполнения бассейнов D и G и за 40 минут до окончания заполнения бассейна G. Определить, на сколько минут позже начали заполнять бассейн F, чем бассейны D и G, если известно, что бассейн F заполнялся в $\frac{5}{3}$ раза быстрее бассейна D.

ОТВЕТ: 40 минут.

1219 (*биолог., 1977, № 3*). Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада в 1 час на 1 деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая уже к 13 часам. Сколько деталей в 1 час делала каждая бригада?

ОТВЕТ: первая бригада делала в один час 13 деталей, а вторая — 11 деталей.

1220 (*хим., 1986, № 2*). Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

ОТВЕТ: 8 часов.

1221 (*ВМК, 1989, № 3*). Для вспашки трех совершенно одинаковых полей выделено три трактора различной производительности. Каждое поле вспахивается одним трактором. Первый трактор начал работу на $\frac{1}{2}$ часа раньше второго, а третий — на $\frac{1}{3}$ часа позже второго. Вспашка полей велась тракторами равномерно и без остановок. Через некоторое время после начала работы третьего трактора оказалось, что к этому моменту каждый из тракторов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы второго трактора закончил работу первый, если третий выполнил всю работу на 12 минут раньше, чем второй?

ОТВЕТ: 18 мин.

1222 (*ВМК, 1981, № 1*). Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За один час первая сенокосилка скашивает 3 га, вторая — на b га меньше первой, а третья — на $2b$ га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определить значение b $(0 < b < 1)$, при котором все поле скошено за 4 часа, если работа велась без перерыва.

ОТВЕТ: $b = \frac{1}{2}$.

1223 (*ВМК, 1975, № 4*). Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из них доставлял сначала кирпич, а затем цемент, перевозя за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 минут раньше, а закончил на 40 минут позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 минут.

Если бы первый грузовик начал работу на 1 час 5 минут раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 минут раньше первого, а интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 25 минут.

Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 тонны в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича. Сколько всего цемента было доставлено на стройку?

Ответ: 42 т.

8.6. Задачи на движение

1224 (*фил., 1999, № 1*). Расстояние в 160 км между пунктами А и Б автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, — со скоростью 20 км/ч. Какое расстояние автомобиль проехал по ровной дороге?

Ответ: $106\frac{2}{3}$ км.

1225 (*ФГУ, 2002, № 1*). Из деревни в город вышел турист. Первую половину пути он шел пешком со скоростью 5 км/ч, а затем оставшуюся часть пути ехал на автобусе. Найдите среднюю скорость движения туриста на всем маршруте, если скорость автобуса равна 45 км/ч.

Ответ: 9 км/ч.

1226 (*ИСАА, 2001, № 3*). Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 10 км, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из А вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из А на 50 минут позже пешехода. В пункт Б пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из А на

1 час 15 минут позже пешехода. Определите скорости участников маршрута.

ОТВЕТ: 4 км/ч; 8 км/ч; 12 км/ч.

1227 (*эконом., отд. полит. экономии, 1985, № 5*). Из пункта А в пункт Б вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут, вслед за ним вышел второй. В пункт Б сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг Б не ранее, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт Б с интервалом не более, чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь из А в Б, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

ОТВЕТ: 40 минут первому и 1 час второму.

1228 (*эконом., отд. кибернетики, 1985, № 4*). В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

ОТВЕТ: 16 часов.

1229 (*эконом., 1980, № 5*). На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D. Расстояния от пункта A до пунктов B,C и D находятся в отношении $1:2:4$. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт C обогнали 4 автобуса; известно, что когда он выходил из пункта A, через пункт A не проезжал очередной автобус. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D?

ОТВЕТ: 8 автобусов.

1230 (*эконом., отд. кибернетики, 1977, № 2*). Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал $1/4$ пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

ОТВЕТ: скорость мотоциклиста при движении из A в B в 4 раза больше скорости велосипедиста.

1231 (*геолог., 2004, № 6*). Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта A через пункт B до пункта C. Первая группа проходит весь маршрут за 2, а вторая — за 3 дня. Расстояние между A и B вдвое меньше расстояния между B и C. Скорости движения групп на участках AB и BC постоянны, но на участке AB скорости обеих групп в m раз меньше, чем их скорости на участке BC. Группы выходят одновременно из A и C навстречу друг другу. Если первая группа выходит из A, а вторая из C, то они встречаются в B. Если же первая выходит из C, а вторая из A, то они встречаются в пункте D. Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между B и D? Чему равно значение m?

ОТВЕТ: $\frac{1}{9}$, $m = 3$.

1232 (*геолог., 2003, № 3*). Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и, встретившись через 45 минут, без остановки продолжили движение, каждый в своем направлении. За какое время проходит путь между A и B каждый из пешеходов, если известно, что первый пришел в B на 2 часа позже, чем второй пришел в A?

ОТВЕТ: 3 часа (первый), 1 час (второй).

1233 (*геолог., 2002, № 4*). Пункт C расположен между пунктами A и B, $AC = 2 \cdot BC$. Из пунктов C и B одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Время, затраченное вторым поездом на путь от B до A, не менее чем в 6 раз превосходит время, затраченное первым поездом на путь от C до B. Третий поезд, скорость которого равна разности скоростей первых двух, затратил на путь от A до B не менее, чем в 9 раз больше времени, чем первый поезд затратил на путь от C до места встречи со вторым. Чему равно отношение скоростей первого и второго поездов?

ОТВЕТ: 2.

1234 (*геолог., 2000, № 3*). От причала A к причалу B отплыли катер и лодка, причем скорость катера в 5 раз больше скорости лодки.

Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала B за 2 часа, а лодка за 4 часа?

ОТВЕТ: 1 час 12 минут.

1235 (*геолог., 1993, № 3*). На берегу озера расположены пункты A и B. Из пункта A в пункт B отправился катер, а через 1 час после этого из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Еще через 1 час они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение. Катер прибыл в пункт B через 2 часа 20 минут после того, как в пункт A прибыла моторная лодка. Через какое время после начала движения произошла бы их встреча, если бы они одновременно отправились навстречу друг другу?

ОТВЕТ: 5/4 часа.

1236 (*геолог., 1988, № 5*). Путь из A в B проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км — по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую. Автобус совершил более четырех рейсов по маршруту из A в B и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т. е. менее 168 часов). За время, которое он был при этом в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, средней арифметической между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найти скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

ОТВЕТ: 40 км/ч — скорость по шоссе; 30 км/ч — скорость по грунтовой дороге.

1237 (*геолог., 1987, № 5*). В 7 часов утра от первого причала отплыли две лодки. Сначала они плыли 8 км по озеру, каждая с постоянной скоростью, а затем 5 км по течению реки до второго причала. Первая лодка прибыла на место не позднее 9 час. 50 мин., а вторая — не ранее 10 час. 40 мин. того же дня. Чему равна скорость каждой лодки в стоячей воде, если скорость течения реки — 2 км/ч, а скорость второй лодки в стоячей воде составляет 75% от скорости первой лодки в стоячей воде?

ОТВЕТ: 4 км/ч; 3 км/ч.

1238 (*геолог., отд. геофизики, 1980, № 4*). В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

ОТВЕТ: 20 м.

1239 (*геолог., отд. геофизики, 1979, № 4*). Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет 5/8 скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.

ОТВЕТ: скорости товарного и скорого поездов равны соответственно 50 км/ч и 100 км/ч.

1240 (*геолог., отд. геофизики, 1978, № 5*). Пункт A стоит в поле на расстоянии 8 км от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A по прямой до некоторой находящейся на дороге точки C, отличной от B, а затем по дороге до B, то при любом выборе точки C на это уйдет не меньше, чем потребуется, если ехать из A в B напрямик по полю. Чему равно расстояние от A до B?

ОТВЕТ: $8\text{ км} \leqslant |AB| \leqslant \dfrac{16}{\sqrt{3}}$ км.

1241 (*геолог., отд. общей геологии, 1978, № 2*). Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B, велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B, если известно, что скорости велосипедиста и автомобиля постоянны на всем пути от пункта A до пункта B?

ОТВЕТ: 45 минут.

1242 (*геолог., отд. общей геологии, 1977, № 2*). Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найти скорость второго бегуна.

ОТВЕТ: скорость второго бегуна равна 20 км/ч.

1243 (*Севастополь, 2003, № 3*). Команда бегунов, состоящая из Тани и Миши, участвовала в эстафете. Таня и Миша пробежали этапы равной длины, Миша со скоростью 8 м/с, а Таня — 6 м/с. Какова была средняя скорость команды?

ОТВЕТ: $\frac{48}{7}$ м/с.

1244 (*Севастополь, 2002, май, № 3*). Самолет летает по маршруту Москва — Симферополь — Москва. Скорость самолета 450 км/ч. На сколько процентов изменится длительность полета по маршруту Москва — Симферополь — Москва в безветренную погоду по сравнению с полетом при наличии ветра, когда на участке Симферополь — Москва скорость самолета уменьшается на 50 км/ч, а на участке Москва — Симферополь увеличивается на 50 км/ч?

ОТВЕТ: полет при ветре продолжительнее на 1,25%.

1245 (*психолог., 1988, № 4*). Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два товарных поезда. Они двигались без остановок, встретились через 24 часа после начала движения и продолжили свой путь, причем первый поезд прибыл в пункт B на 20 часов позднее, чем второй поезд прибыл в A. Сколько времени был в пути первый поезд?

ОТВЕТ: 60 часов.

1246 (*психолог., 1984, № 2*). Подъем в гору турист прошел за 2 часа. На спуск с горы, который на 18 км длиннее подъема, турист затратил вдвое больше времени, чем на подъем в гору. Найти общую длину пройденного туристом пути, если каждый километр при спуске турист проходил на 10 минут быстрее, чем при подъеме.

ОТВЕТ: 30 км.

1247* (*психолог., 1982, № 5*). Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда и беспрепятственно добрался. Во сколько раз больше времени мотоциклист затратил на дорогу до пункта A по сравнению с тем временем, за которое он проехал бы путь от B до A, не подвозя пешехода, если известно, что пешеход в четыре раза быстрее добрался до пункта B по сравнению с тем временем, которое ему понадобилось бы, чтобы пройти весь путь от A до B пешком?

ОТВЕТ: $\frac{11}{4}$.

1248 (*психолог., 1978, № 3*). Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

Ответ: 2 км.

1249 (*географ., 2004, № 3*). Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога разделена паромной переправой с одним паромом. На второй дороге препятствий нет. Переправа на пароме занимает $\frac{1}{2}$ часа. Паром работает без перерывов. Из пункта A по первой дороге выезжает автомобиль, скорость движения которого по дороге равна 60 км/ч. Одновременно с ним из пункта B по той же дороге выезжает трактор со скоростью 20 км/ч. Автомобиль без задержки переправляется паромом и встречает трактор, ожидающий паром. После прибытия в пункт B автомобиль без остановки возвращается по второй дороге и прибывает в пункт A на 15 минут раньше трактора, затратив на обратный путь на $\frac{1}{2}$ часа больше, чем на путь из A в B. Найти:

а) разность между длинами второй и первой дорог, не учитывая длину переправы;

б) длину второй дороги, если известно, что поехав обратно по первой дороге автомобиль прибыл в пункт A одновременно с трактором.

Ответ: а) 60 км; б) 97,5 км.

1250 (*географ., 2002, май, № 4*). Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога в два раза короче второй и проходит через пункт C. Одновременно по короткой дороге из пункта A в пункт B выехали соответственно грузовик и мотоцикл, каждый из которых, доехав до пункта C, вернулся в свой исходный пункт и продолжил движение по другой дороге. В итоге грузовик и мотоцикл одновременно прибыли соответственно в пункты B и A. Скорости грузовика и мотоцикла постоянные. Если бы грузовик двигался со скоростью мотоцикла, а мотоцикл — со скоростью грузовика, то в момент возвращения мотоцикла в пункт B грузовик также прибыл в этот пункт. Найти:

а) отношение скоростей грузовика и мотоцикла;

б) время движения грузовика с момента начала движения до встречи с мотоциклом на второй дороге, если известно, что в пункт C он добрался на 35 минут раньше мотоцикла.

Ответ: а) 2 : 3; б) 2 ч 48 мин.

1251 (*географ, 2001, май, № 3*). Из пункта A в пункт B одновременно выехали велосипедист со скоростью 25 км/ч и мотоциклист. Доехав до пункта B, мотоциклист развернулся и сразу направился к пункту A, через некоторое время встретив велосипедиста. Если бы скорость мотоциклиста была на 37,5% меньше, расстояние от места встречи до пункта B уменьшилось бы в 3 раза. Найти скорость мотоциклиста.

Ответ: 50 км/ч.

1252 (*географ., 2000, № 5*). Из пункта А в пункт Б вниз по течению притока отправляется катер, скорость которого в стоячей воде равна v. В пункте Б, где приток впадает в реку, катер поворачивает к пункту В, расположенному вверх по течению реки. Расстояния от А до Б и от Б до В равны. Скорости течения притока и реки равны u_1 и u_2 соответственно. На координатной плоскости (u_1, u_2) укажите область, для всех точек которой время движения по маршруту А $\to$ Б $\to$ В меньше, чем время, которое затратил бы катер на прохождение такого же расстояния в стоячей воде.

1253 (*географ., 1999, № 3*). По реке из пункта A в пункт B выплыл катер. Одновременно из пункта B в пункт A выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

Ответ: 9/7.

1254 (*географ., 1989, № 2*). Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от пункта A, по горной дороге со скоростью 6 км/ч поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения из пункта B.

Найти скорость автобуса на подъеме, если известно, что она в 2 раза меньше его скорости на спуске.

Ответ: 15 км/ч.

1255 (*географ., 1988, № 3*). Из пункта A в пункт C, находящийся на расстоянии 20 км от A, выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B, расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A, в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом.

Ответ: 45 минут.

1256 (*географ., 1985, № 3*). Из пунктов A и B, находящихся друг от друга на расстоянии 120 км, по прямолинейным дорогам, сходящимся в пункте C под углом, величина которого равна $60°$, одновременно выехали грузовик и автобус соответственно со скоростями 40 км/ч и 60 км/ч. Автобус прибыл в пункт C на 1 час раньше грузовика. Найти время движения автобуса.

Ответ: 2 часа.

1257 (*географ., 1978, № 1*). Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода. (Собственная скорость — скорость в неподвижной воде.)

Ответ: собственная скорость парохода 11 км/ч.

1258 (*географ., 1977, № 4*). Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль проехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 минут позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

ОТВЕТ: 60 км/ч.

1259 (*почвовед., 1989, № 2*). Из пункта A в пункт B автомобиль доехал за 5 часов, двигаясь в пределах населенных пунктов со скоростью 60 км/ч, а по шоссе вне населенных пунктов — со скоростью 80 км/ч. Обратный путь из B в A занял 4 часа 36 минут. При этом в пределах населенных пунктов автомобиль двигался со скоростью 50 км/ч, а по шоссе — 90 км/ч. Каково расстояние между пунктами A и B?

ОТВЕТ: 390 км.

1260 (*почвовед., 1987, № 3*). Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найти скорость второго туриста.

ОТВЕТ: 4 км/ч.

1261 (*почвовед., 1982, № 1*). Легковой и грузовой автомобили движутся по шоссе навстречу друг другу с постоянными скоростями. За $\frac{1}{2}$ ч до того, как они встретились, расстояние по шоссе между ними равнялось 75 км. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что для того, чтобы проехать 90 км, ему потребовалось бы на 20 мин больше, чем грузовому автомобилю, чтобы проехать 40 км.

ОТВЕТ: 90 км/ч.

1262 (*биолог., 1988, № 3*). Из двух пунктов одновременно выехали навстречу друг другу с постоянными скоростями мотоциклист и велосипедист. Они встретились через 45 минут после начала движения. Определить, сколько времени затратит на путь между исходными пунктами мотоциклист, если известно, что ему для этого потребуется на 2 часа меньше, чем велосипедисту.

ОТВЕТ: 1 час.

1263 (*биолог., 1987, № 2*). Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Найти, какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

Ответ: $\frac{2}{5}$ пути от A до B.

1264 (*биолог., 1986, № 3*). Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $\frac{6}{5}$ скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/ч. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на один час раньше, чем легковой автомобиль.

Ответ: 72 км/ч.

1265 (*биолог., 1979, № 2*). Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на пять часов позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

Ответ: скорость пассажирского поезда равна 60 км/ч, скорость скорого 100 км/ч.

1266 (*биолог., 1978, № 2.С*). В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B к A по тому же пути равно 15 часам. Собственная скорость парохода, т. е. скорость парохода в стоячей воде, равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

Ответ: расстояние от пристани A до пристани B равно 290 км; скорость притока 2 км/ч.

1267 (*ФНМ, 1999, май, № 3*). Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход Π_1, а в тот же момент из деревни в город вышел пешеход Π_2. Скорости пешеходов были равны. Встретившись, Б и Π_2 некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью, равной

12 км/ч, а $П_2$ уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и $П_2$, одновременно пришли оба пешехода. Найти скорость пешехода $П_1$.

ОТВЕТ: 6 км/ч.

1268 (*хим., 1984, № 2*). Из пункта A в пункт B выходит поезд. В момент прибытия этого поезда в B оттуда выходит другой поезд, который следует в A. Время, которое прошло от выхода первого поезда из A до прибытия туда второго поезда, в $4\frac{1}{6}$ раза превышает время, которое затратили бы поезда до момента встречи, если бы вышли одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорости обоих поездов постоянны, причем скорость второго поезда на 20 км/ч превышает скорость первого поезда. Чему равна скорость каждого поезда?

ОТВЕТ: 40 км/ч, 60 км/ч.

1269 (*хим., 1981, № 3*). Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый — остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найти расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

ОТВЕТ: 20 км.

1270 (*хим., 1979, № 3*). От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 часов и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший от A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянная, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.

ОТВЕТ: скорости пароходов 15 км/ч, скорость реки 3 км/ч.

1271 (*хим., 1978, № 2*). Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

Ответ: 3 часа.

1272 (*хим., 1977, № 1*). Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав $2/3$ расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

Ответ: 80 км/ч.

1273 (*хим., 1967, № 1*). Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми равно 78 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста (соответственно P_A и P_B) и встретились через 3,9 часа. Через сколько часов встретятся эти же велосипедисты, если они выедут из тех же пунктов одновременно навстречу друг другу и если скорость велосипедиста P_A увеличится вдвое, а скорость велосипедиста P_B уменьшится на 2 км/ч. Известно, что скорость велосипедиста P_A меньше 9 км/ч, а точка второй встречи велосипедистов отстоит от точки первой встречи на 16,8 км в сторону пункта B.

Ответ: 3 часа.

1274 (*ВМК, 2002, № 4*). Из пункта A в пункт B в 8 часов утра вышел пешеход. Спустя два часа из пункта A вслед за пешеходом по той же дороге выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Не позднее чем через 15 минут после своего выезда из пункта A мотоциклист обогнал пешехода и продолжил путь в пункт B. Велосипедист обогнал пешехода спустя не менее 45 минут после обгона пешехода мотоциклистом. Пешеход прибыл в пункт B в 14 часов того же дня. Найдите время прибытия мотоциклиста в пункт B.

ОТВЕТ: 10 часов 40 минут того же дня.

1275 (*ВМК, 2001, апрель, № 3*). Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 час. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

ОТВЕТ: 10 км/ч.

1276 (*ВМК, 1999, апрель, № 1*). Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 часов. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 часа, а расстояние между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти расстояние между B и C.

ОТВЕТ: 5 км.

1277 (*ВМК, эконом., физ., подгот. отд., 1999, № 3*). Шоссе, соединяющее пункты A и C, проходит через пункт B. В 10^{00} из A в C выехал автомобиль, а в 12^{00} из B в C выехал колесный трактор. Автомобиль и трактор двигались с постоянными скоростями, причем скорость трактора равнялась 18 км/ч. В 13^{30} расстояние между автомобилем и трактором равнялось 195 км, а в 16^{00} оба они одновременно прибыли в пункт C. Найти расстояние между пунктами A и C.

ОТВЕТ: 576 км.

1278 (*ВМК, 1997, № 1*). Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C — 14 км. В 12 час. из пункта B отплыла лодка и направилась в пункт A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в 14 час. прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде.

ОТВЕТ: 10 км/ч.

1279 (*ВМК, 1992, № 4*). Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянные, и они движутся по одному шоссе. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 80 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут. Найти время отправления мотоцикла из города B.

ОТВЕТ: 11 часов.

1280 (*ВМК, 1989, № 3*). Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут — мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

ОТВЕТ: 48 минут.

1281 (*ВМК, 1977, № 4*). Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD, AC. Их длины соответственно равны 6, 14, 5, 15 и 15 км. Из одного из этих городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на $1/2$ км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч.

ОТВЕТ: $v_1 = 7$ км/ч, $v_2 = 6\frac{1}{3}$ км/ч, $v_3 = 6\frac{1}{2}$ км/ч.

1282 (*ВМК, 1974, № 4*). На дороге, ведущей из пункта A в пункт B, находится пункт C. Из пункта A в пункт B по этой дороге с постоянными скоростями вышли два пешехода. Второй пешеход вышел из пункта A на 12 минут позже первого, но прибыл в пункт B на 18 минут раньше него. При этом через пункт C пешеходы прошли с интервалом не более 6 минут. Если бы второй пешеход вышел из пункта A через 15 минут после первого, увеличив свою скорость на 20%, а скорость первого пешехода не изменилась, то второй пешеход прибыл бы в пункт B на 35 минут раньше первого, а через пункт C пешеходы прошли с интервалом не менее 5 минут. Если бы первый пешеход уменьшил свою скорость на 1 км/ч, а скорость второго пешехода осталась бы первоначальной, то первый пешеход потратил бы на путь от A до C в 3 раза меньше времени, чем второй пешеход на весь путь от A до B. Найти длину пути от A до C.

Ответ: 2 км.

1283 (*ВМК, 1970, № 3*). Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.

Ответ: $30 < v \leqslant 33{,}6$.

1284 (*мех-мат, 2005, № 1*). Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

Ответ: 28 мин.

1285 (*мех-мат, 2004, № 5*). Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от A до B равно 24 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обгонял их на 6 км. В пункте C автомобиль догнал мотоциклиста и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с велосипедистом во второй раз в C. Найти расстояние между B и C, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал мотоциклиста.

Ответ: 16 км.

1286 (*мех-мат, 2002, № 3*). Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и, увеличив скорость в пункте B, продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C. Приехав в C, велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найти расстояние между пунктами A и B, если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

Ответ: 300/13 км.

1287 (*мех-мат, 2000, № 3*). Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй — со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов движения автобусы а) встретятся в пункте B; б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B, если известно, что первый стартует из пункта A, а второй — из пункта B?

Ответ: а) 6; б) 192.

1288 (*мех-мат, 1997, № 3*). Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 мин в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад и через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу. Найти расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если $AB = 480$ км и в момент прибытия первого автомобиля в B расстояние между автомобилями было равно 120 км.

Ответ: 160 км.

1289 (*мех-мат, 1993, № 6*). Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 60 км/ч. Через 45 минут расстояние между первым и вторым мотоциклистами было в два раза больше, чем между первым и третьим. Через 1 час после старта расстояние между первым и вторым мотоциклистами было равно расстоянию между первым и третьим, а расстояние, которое осталось проехать третьему мотоциклисту до A, было равно расстоянию между первым и вторым мотоциклистами через 1 час 30 мин после старта, а также было равно $2/5$ расстояния между первым и третьим мотоциклистами через 1 час 30 мин после старта. Найдите расстояние между пунктами A и B.

ОТВЕТ: 90 км.

1290 (*мех-мат, 1987, № 4*). Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то они прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.

ОТВЕТ: 50 км/ч, 40 км/ч.

1291 (*мех-мат, 1986, № 4*). Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 часов утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в $1\frac{2}{3}$ раза, а автомобилист — в $1\frac{1}{2}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 9 часов 15 минут, автомобилист приехал в город в 11 часов, а мотоциклист приехал в село в 12 часов 15 минут. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 часов 15 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

ОТВЕТ: нет.

1292 (*мех-мат, 1972, № 2*). Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел пешеход, и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через два часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 км от пункта B.

ОТВЕТ: скорость пешехода — 3 км/ч, скорость велосипедиста — 15 км/ч.

1293 (*мех-мат, 1969, № 1*). Деревня расположена на берегу реки, а школа — на шоссе, пересекающем реку под прямым углом. Зимой школьник ходит из деревни в школу напрямик на лыжах и тратит на дорогу 40 минут. Весной, в распутицу, он идет берегом реки до шоссе, а дальше — по шоссе до школы, и тратит на дорогу 1 час 10 минут. Наконец, осенью он проходит вдоль реки половину расстояния, отделяющего деревню от шоссе, а дальше идет напрямик. При этом он доходит до школы быстрее чем за 57 минут. Установить, что дальше: деревня от шоссе или школа от реки, если известно, что пешком школьник ходит всегда с одной и той же скоростью, а на лыжах — со скоростью, на 25% большей (реку и шоссе считать прямыми линиями).

ОТВЕТ: деревня от шоссе дальше, чем школа от реки.

1294 (*мех-мат, 1969, № 1*). Пункты A и B находятся на дорогах, пересекающихся под углом $ABC = 60°$. Из пункта A в B можно доехать на автобусе — сначала по одной дороге до перекрестка C, потом по другой, — затратив 11 минут. Если пойти из A в B пешком напрямик, то это займет 1 час 10 минут, а если сначала дойти кратчайшим путем до дороги, на которой стоит пункт B, а затем подъехать на автобусе, — то еще больше времени, даже если на автобус сесть сразу.

Каково расстояние от пункта A до перекрестка, если скорость пешехода равна 3 км/ч, а скорость автобуса — 30 км/ч? (Дороги считать прямыми.)

ОТВЕТ: 4 км.

1295 (*мех-мат, 1968, № 5*). Из пункта A в пункт C в 9 часов утра отправляется скорый поезд. В это же время из пункта B, расположенного между пунктами A и C, выходят два пассажирских поезда, первый из которых следует в пункт A, а второй — в пункт C, причем скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже, чем через 3 часа после его отправления, потом проходит пункт B не ранее 14 часов того же дня и, наконец, прибывает в пункт C одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 часов после встречи с первым пассажирским поездом. Найти время прибытия в пункт A первого пассажирского поезда.

ОТВЕТ: 16 ч 30 мин.

1296 (*мех-мат, 1965*). Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 часов утра из города A в город B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом.

Успели ли лодка и плот приплыть в город к 9 часам вечера (того же дня)?

Ответ: нет.

1297 (*мех-мат, 1963, № 3*). Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B; первый пошел из A в B, второй — из B в A. Каждый идет с постоянной скоростью без остановок и, придя в свой конечный пункт, немедленно поворачивает обратно. Когда они встретились во второй раз, то оказалось, что первый пешеход прошел на 4 км больше, чем второй. Продолжая идти дальше, первый пешеход прибыл в A через 1 час после второй встречи, а второй в B — через два с половиной часа после этой встречи. Определить скорость первого пешехода.

Ответ: 4 км/ч.

1298 (*МК-МГУ, 2005, I тур, № 1*). Три брата возвращались с совместной рыбалки домой, где их ожидал бочонок холодного кваса. Старший брат шел втрое медленнее младшего и вдвое медленнее среднего. Придя домой, младший сразу принялся за бочонок и выпил 7-ю его часть к приходу среднего брата, который присоединился к младшему и стал поглощать квас с такой же скоростью. Досталось ли кваса старшему брату?

Ответ: нет.

8.6.1. Движение по окружности

1299 (*ФГУ, 2005, № 7*). Для того чтобы сделать полный круг по кольцевому маршруту, автомобилю требуется 150 л бензина. На маршруте расположены пять промежуточных пунктов, в каждом из которых имеется запас в 30 л бензина. Покажите, что найдется пункт, в котором автомашина с пустыми баками и достаточным запасом пустых канистр может заправиться, стартовать и, пополняя запас бензина в четырех встречных пунктах, сделать полный круг.

1300* (*географ., 1965, № 1*). Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 с. За какое время каждое тело проходит окружность?

Ответ: 4 с и 6 с соответственно.

1301 (*почвовед., 2002, май, № 1*). Определить величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающими 1 ч 10 мин, при условии, что обе стрелки движутся с одинаковыми скоростями.

Ответ: 25 градусов.

1302 (*биолог., 2005, № 5*). На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начинают забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежит со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен приходит на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько всего раз первый спортсмен обгонял второго на дистанции после старта?

Ответ: четыре раза.

1303 (*биолог., ФФМ, биоинж., 2003, № 4*). Три мотоциклиста A, B и C участвовали в показательном заезде, двигаясь по трассе от старта до финиша с постоянными скоростями. Мотоциклисты A и C стартовали одновременно, а мотоциклист B спустя некоторое время. Первым к финишу пришел мотоциклист A. Мотоциклист B через 1 час после своего старта догнал мотоциклиста C на трассе и прибыл на финиш через 4 часа после старта мотоциклистов A и C, и за 2 часа до финиша мотоциклиста C. Найти отношение скорости мотоциклиста A к скорости мотоциклиста C, если известно, что мотоциклист A двигался в $\frac{8}{5}$ раза медленнее мотоциклиста B.

Ответ: $\frac{15}{8}$.

1304 (*биолог., 2001, № 4*). Из аэропорта одновременно вылетают два самолета и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый — по окружности радиуса R, а второй — по окружности радиуса r. Предполагается, что самолеты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями, и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее чем через 43 часа и не позднее чем через 49 часов после вылета произошли следующие события:

первый самолет облетел свою окружность 4 раза, а второй облетел свою окружность 5 раз, — и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 2 часов. Найти $\frac{r}{R}$.

Ответ: 3/4.

1305 (*биолог., 1999, № 6*). Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы: первый из точки A, а второй из точки B — и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только третья из пятнадцати состоялась в точке B. Найти отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

Ответ: 7:5.

1306 (*ВМК, 1980, № 5*). Две точки движутся с постоянными скоростями по разным окружностям, которые лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Направление движения одной точки — по часовой стрелке, другой — против часовой стрелки. В момент начала движения обе точки и центр окружностей лежат на одной прямой, а расстояние между точками 16/7 см. После старта расстояние между точками сначала уменьшалось, а через 11 с составило $\sqrt{207}/7$ см. Кроме того, с интервалом в 11 с было зафиксировано два момента, когда расстояние равнялось $\sqrt{158}/7$ см, а в промежутке между этими моментами расстояние ни разу не принимало значение $\sqrt{158}/7$ см. Найти минимальное расстояние между точками.

Ответ: $\frac{12}{7}$.

1307 (*мех-мат, 2003, март, тест перед олимпиадой, № 8*). Между пунктами A и B организовано движение автобусов, следующих друг за другом с интервалом ровно в 7 мин. Каждый из них проезжает путь в одну сторону без остановок ровно за 25 мин и, постояв некоторое время на конечной остановке, едет в другую сторону. Сколько автобусов обслуживает маршрут, если на стоянке в пункте A или B никогда не бывает более одного автобуса?

Ответ: 8 или 9.

1308 (*мех-мат, 2001, март, тест перед олимпиадой, № 7*). Какое точное время между 3 и 4 часами ночи показывают часы в момент, когда положения их часовой и минутной стрелок совпадают?

Ответ: 3 час $16\frac{4}{11}$ мин.

1309 (*мех-мат, 1988, № 5*). Два мотоциклиста стартовали раздельно в одной точке стадиона в гонке на 30 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом. Когда через 4 минуты он вернулся, мотоциклисты снова были рядом. Если бы первый мотоциклист после 14 кругов увеличил скорость в 4 раза, то они финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 5 кругов.

ОТВЕТ: 0,9 минут.

1310 (*мех-мат, 1970, № 3*). Три гонщика (A, потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более двух минут. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через три минуты он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A?

ОТВЕТ: 3 минуты.

8.7. Задачи с целочисленными переменными

1311 (*фил., 1978, № 1*). Двум бригадам, общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше девяти часов. Сколько человек в каждой бригаде?

ОТВЕТ: в бригадах было по 9 человек.

1312 (*фил., 1977, № 1*). В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

ОТВЕТ: в первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.

1313 (*эконом., отд. кибернетики, 1986, № 5*). В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальных детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127 \leqslant k \leqslant 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил бы на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка у каждого из них?

ОТВЕТ: 11 дней, 19 деталей и 31 деталь.

1314 (*эконом., 1986, № 5*). Линию, связывающую города A и B, обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

ОТВЕТ: 2; 2; 2.

1315 (*геолог., 1984, № 5*). Трое мальчиков хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, дети не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 копеек. Когда третьему мальчику добавили денег в размере, в два раза большем, чем у него было, то после покупки игрушек у детей оставалось 6 копеек. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 копеек больше, чем у первого?

ОТВЕТ: 70 копеек.

1316* (*психолог., 1977, № 3*). Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

Ответ: 900 и 855.

1317 (*хим., 1998, май, № 4*). Определить число студентов, сдавших экзамен, если известно, что шестая часть из них получили оценку «удовлетворительно», 56% получили оценку «хорошо», а 14 человек получили оценку «отлично», причем эти отличники составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов.

Ответ: 300.

1318 (*ВМК, 1986, № 3*). В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

Ответ: 6.

8.8. Прочие задачи

1319 (*фил., 1998, № 4*). А, И, Б сидели на трубе. К ним стали по очереди подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. Оказалось, что начиная с некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

а) Какая буква (из числа циклически повторяющихся) встречается наиболее часто?

б) Может ли циклически повторяющийся набор состоять из одной буквы? Если да, указать эту букву.

Ответ: а) И, б) Р.

1320 (*фил., 1986, № 5*). Имеются два ящика с яблоками, причем в первом ящике 15 яблок, а во втором 16 яблок. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:

а) увеличить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 2 их число во втором;

б) увеличить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 2 их число во втором;

в) уменьшить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 2 их число во втором;

г) уменьшить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 1 их число во втором.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы одновременно в первом ящике оказалось 50 яблок, а во втором — 25 яблок? Ответ обосновать.

ОТВЕТ: нет.

1321 (*ФГУ, 2003, № 7*). Для того чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее чем за 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Анна может перейти мост за 2 минуты, Василий — за 4 минуты, Игорек — за 10 минут, Марья Ивановна — за 16 минут, а фонарик только один?

ОТВЕТ: успеют.

1322 (*ФГУ, 2002, № 7*). Пять пиратов делят 10 слитков золота. Процедура дележа устроена так: сначала старший пират предлагает дележ по своему выбору. Если больше половины пиратов его отвергает, второй по старшинству пират предлагает новый дележ добычи среди оставшихся четырех (старший пират никакого участия в дальнейшем дележе не принимает). Если новый дележ отвергается большинством голосов, то предлагавший его пират от дальнейшего участия в дележе отстраняется, и процедура повторяется для трех пиратов. Как будут распределены слитки золота, если каждый пират из двух данных дележей предпочитает тот, в котором его доля золотых слитков больше?

ОТВЕТ: (8,0,1,0,1).

1323 (*почвовед., 2001, № 6*). Дано задание: на прямоугольном участке земли размером 1 м на 4 м посадить три дерева, одно из которых должно быть в углу участка. Расстояние между любыми двумя деревьями не должно быть меньше 2,5 м. Можно ли выполнить это задание? Ответ обосновать.

ОТВЕТ: нельзя.

Глава 9

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

9.1. Прямой метод решения

1324* (*ВМК, отд. прикладной информатики, 2001, № 3*). При всех значениях параметра b решить неравенство

$$|b - 2x| \leqslant x + 3.$$

Ответ: если $b > -6$, то $\frac{b-3}{3} \leqslant x \leqslant b + 3$; если $b = -6$, то $x = -3$; если $b < -6$, то $\varnothing$.

1325* (*психолог., 2001, № 5*). При каждом значении параметра a решить неравенство

$$ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$$

Ответ: если $a \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $\varnothing$;
если $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}; 0\right)$, то $\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-a^4}}{2a}\right)$;
если $a = 0$, то $(0; +\infty)$;
если $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right)$, то $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-a^4}}{2a}; +\infty\right)$;
если $a = \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $(-\infty; +\infty) \backslash \left\{-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right\}$;
если $a > \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $(-\infty; +\infty)$.

1326 (*экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, № 4*). При каждом значении параметра a решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8a^2, \\ xy = 2a^2. \end{cases}$$

Ответ: если $a = 0$, то единственное решение $(0, 0)$; если $a \neq 0$, то два решения: $(2a, a)$ и $(-2a, -a)$.

1327 (*геолог., 1999, устный*). Для всех значений a решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = a.$$

Ответ: если $a = 1$, то $x = 0$; если $a = -1$, то $x = 1$; если $a \neq \pm 1$, то $\varnothing$.

1328 (*физ., 2005, № 7*). Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$\log_{ax}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \log_{a^2-2}(a-1) < 0.$$

Ответ: если $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$, то $x > \frac{1}{a}$; если $\sqrt{3} < a < 2$ или $a > 2$, то $0 < x < \frac{1}{a}$.

1329 (*физ., 2004, март, № 7*). Для каждого значения a решить уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x - 3a}{x}\right) + 4\left[\log_4(x - 3a)\right]\log_2 x - 8\log_4^2 x = 0.$$

Ответ: если $a = 0$, то $x > 0$; если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{3a + \sqrt{9a^2 + 4}}{2}$.

1330 (*Севастополь, 2003, № 9*). Для всех значений параметра $a \in (2; 4)$ найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$x^2 + 5xy + 6y^2 = a.$$

Ответ: если $a \neq 3$, то уравнение не имеет решений в целых числах; если $a = 3$, то уравнение имеет четыре решения: $(3; -2)$, $(-3; 2)$, $(-7; 2)$, $(7; -2)$.

1331 (*ВМК, 2002, устный*). Для всех значений параметра $a \in (0; 1)$ решить уравнение

$$\left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1 + a^2}\right)^x = 1.$$

Ответ: для всех $a \in (0; 1)$ уравнение имеет один корень $x = 2$.

1332 (*ФГУ, 2003, № 5*). Для каждой пары чисел a и b найдите все решения неравенства

$$b \cdot x^2 + a \leqslant 0.$$

Ответ: множество решений неравенства есть:
$\varnothing$, если $a > 0$, $b \geqslant 0$;
$(-\infty; +\infty)$, если $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$;

$\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{a}{b}}\right] \cup \left[\sqrt{-\frac{a}{b}}; +\infty\right)$, если $a > 0$, $b < 0$;

$\left[-\sqrt{-\frac{a}{b}}; \sqrt{-\frac{a}{b}}\right]$, если $a \leqslant 0$, $b > 0$.

1333 (*эконом., отд. кибернетики, 1983, № 6*). Для каждого неотрицательного a решить неравенство

$$16a^3x^4 + 8a^2x^2 + 16x + a + 4 \geqslant 0.$$

ОТВЕТ: если $a = 0$, то $x \geqslant -\frac{1}{4}$; если $a \in (0;1)$, то $x \leqslant \frac{-1-\sqrt{1-a}}{2a}$ или $x \geqslant \frac{-1+\sqrt{1-a}}{2a}$; если $a \geqslant 1$, то $x \in \mathbb{R}$.

1334 (*ФГУ, 2005, № 6*). Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение

$$a \log_{\left(\frac{1}{x}-2\right)} 4 = \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) - b$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее 1/3.

ОТВЕТ: $a \geqslant 0$.

1335 (*физ., 2003, май, № 7*). Для каждого допустимого значения параметра a решить неравенство

$$\sqrt{7 - \log_a x^2} > (\log_a x) \cdot (1 - 2\log_{|x|} a).$$

ОТВЕТ: если $0 < a < 1$, то $a^3 < x < 1$, $x > 1$; если $a > 1$, то $0 < x < 1, 1 < x < a^3$.

1336 (*мех-мат, 1994, № 6*). При всех значениях параметра a решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

ОТВЕТ: если $a = 0$, то $x_1 = 0; x_2 = 1$;
если $a \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, то $x = \frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$;
если $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$, то $x_1 = \frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$,
$x_2 = \frac{-1-a-\sqrt{3a^2-3}}{2}$.

1337 (*Севастополь, 2005, № 10*). Пусть числа x и y удовлетворяют неравенствам

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} y$$

и

$$\log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqslant \log_2 5.$$

Найдите все a, для которых максимальное значение выражения $ax+y$ равно 4.

ОТВЕТ: $a = 2\sqrt{10}-6$.

1338 (*мех-мат, 1999, устный*). Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$|ax+2y-5| + a|x = 2ay - 2| \leqslant 3a$$

задает на координатной плоскости параллелограмм с внутренностью.

ОТВЕТ: $0 < a < 1$; $a > 1$.

1339 (*географ., 1997, май, № 6*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество точек пространства с координатами $(x; y; z)$, удовлетворяющих уравнению

$$|x-2a| + |x+2a| + |y-2a| + |y+2a| + |z-a| + |z+a| = a^2+9,$$

1) содержит шар радиуса $r = \dfrac{\pi}{2}$,

2) имеет ненулевой объем и содержится в шаре радиуса $R = \pi$.

ОТВЕТ: 1) $a = \pm 9$; 2) $a = \pm 1$.

1340 (*мех-мат, 1997, № 5*). Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\left|x^4 + \frac{2a-1}{3}x^2 + \frac{2a^2+a+2}{12}\right| = \frac{a}{2}\cdot\left|x^2+\frac{a}{3}-\frac{1}{6}\right| + \frac{a+1}{6}.$$

ОТВЕТ: если $a < -1$, то $\varnothing$;

если $-1 \leqslant a \leqslant 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2-a}{6}}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{-a}{2}}$;

если $0 < a < \dfrac{1}{2}$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2-a}{6}}$;

если $\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2-a}{6}}$; $x_3 = 0$;

если $a > 2$, то $x = 0$.

1341 (*ВМК, отд. бакалавров, 2003, № 4*). При всех значениях параметра c решите уравнение

$$4^x + c\cdot 25^x = 3\cdot 10^x.$$

Ответ: если $c \leqslant 0$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3+\sqrt{9-4c}}{2}$;
если $0 < c < \frac{9}{4}$, то $x_1 = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3-\sqrt{9-4c}}{2}$, $x_2 = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3+\sqrt{9-4c}}{2}$;
если $c = \frac{9}{4}$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3}{2}$;
если $c > \frac{9}{4}$, то корней нет.

1342 (*ВМК, отд. бакалавров, 2004, № 4*). При всех значениях параметра d решите неравенство

$$4^x - d \leqslant 2^{x+2}.$$

Ответ: если $d < -4$, то $\varnothing$;
если $d = -4$, то $\{1\}$;
если $-4 < d < 0$, то $\left[\log_2(2-\sqrt{d+4}); \log_2(2+\sqrt{d+4})\right]$;
если $d \geqslant 0$, то $\left(-\infty; \log_2(2+\sqrt{d+4})\right]$.

1343 (*ФНМ, 2004, апрель, № 6*). При каких значениях параметра a неравенство

$$(3+2\sqrt{2})^x + (a^4+6-4a^2)(3-2\sqrt{2})^x + 2^{2y} - a\cdot 2^{y+1} + a^2 - \sqrt{8} \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение (x, y)?

Ответ: $a = \sqrt{2}$.

1344 (*Севастополь, 2003, май, № 8*). При всех натуральных значениях n решите неравенство

$$\sqrt[n]{(1+2^x)^2} - \sqrt[n]{1-4^x} \geqslant \sqrt[n]{(1-2^x)^2}.$$

Ответ: если число n — нечетное, то

$$x \geqslant \log_2\left(\frac{2^n - (\sqrt{5}-1)^n}{2^n + (\sqrt{5}-1)^n}\right);$$

если число n — четное, то

$$\log_2\left(\frac{2^n - (\sqrt{5}-1)^n}{2^n + (\sqrt{5}-1)^n}\right) \leqslant x \leqslant 0.$$

1345 (*хим., 2000, май, № 6*). При каждом значении параметра a решить неравенство

$$\sqrt{x+2a} > x + \sqrt{2a}.$$

ОТВЕТ: если $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{8}$, то $x \in \left(0; 1 - 2\sqrt{2a}\right)$;

если $\frac{1}{8} < a \leqslant \frac{1}{2}$, то $x \in \left(1 - 2\sqrt{2a}; 0\right)$;

если $a > \frac{1}{2}$, то $x \in [-2a; 0)$.

1346 (*эконом., отд. менеджмента, 1996, № 6*). При каких значениях параметра p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости уравнением

$$|2x + y| + |x - y + 3| \leqslant p,$$

будет равна 24?

ОТВЕТ: $p = 6$.

1347 (*физ., 2002, март, № 7*). Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \leqslant 4(a^2 + a), \\ \log_2^2 xy \geqslant 8(a^2 + a). \end{cases}$$

ОТВЕТ: Если $a < -1$ или $a > 0$, то $\left(2^{\sqrt{2(a^2+a)}}; 2^{\sqrt{2(a^2+a)}}\right)$ или $\left(2^{-\sqrt{2(a^2+a)}}; 2^{-\sqrt{2(a^2+a)}}\right)$;
если $a = -1$ или $a = 0$, то $\{(1; 1)\}$;
если $-1 < a < 0$, то $\varnothing$.

1348 (*ВМК, 1981, № 4*). Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие равенству

$$[1 + (a+2)^2]\log_3(2x - x^2) + [1 + (3a-1)^2]\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

ОТВЕТ: если $a = \frac{1}{3}$, то $x = 1$; если $a \neq \frac{1}{3}$, то $\varnothing$.

1349 (*мех-мат, 2003, май, № 6*). Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_x \frac{x-a}{1-ax} + \log_{x-1} \frac{x-a-1}{a+1-ax} \geqslant 0$$

имеет хотя бы три целочисленных решения.

ОТВЕТ: $-1 \leqslant a < \frac{1}{5}$.

1350 (*ВМК, 2005, устный*). Найти все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 4x \leqslant a, \\ y^2 - 4y - 2x + 8 \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

ОТВЕТ: $a = 0$.

1351 (*ВМК, 2003, № 5*). Найти все значения параметра α, при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leqslant \dfrac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3}, \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \geqslant 54 \end{cases}$$
имеет решение.

ОТВЕТ: $\dfrac{3}{2} < \alpha < +\infty$.

1352 (*геолог., 2003, № 7*). Найдите все значения a, для каждого из которых существует целое четное n, удовлетворяющее равенству
$$5^a n^2 - 5^a + n^2 5^{2-a} = 40n + 5^{2-a}.$$
ОТВЕТ: $a_1 = 1 + \log_5 \dfrac{8+\sqrt{55}}{3}$, $a_2 = 1 + \log_5 \dfrac{8-\sqrt{55}}{3}$,
$a_3 = \log_5 \dfrac{16+\sqrt{31}}{3}$, $a_4 = \log_5 \dfrac{16-\sqrt{31}}{3}$.

1353 (*геолог., 2000, устный*). Найти наибольшее целое значение a, при котором уравнение
$$(3-x)^5 = |x+a|^5$$
не имеет решений.

ОТВЕТ: $a = -4$.

1354 (*ИСАА, 2002, № 7*). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leqslant 17, \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

ОТВЕТ: $-6 \leqslant a \leqslant 1 - \sqrt{13}$; $\sqrt{13} - 1 \leqslant a \leqslant 6$.

1355 (*психолог., 2004, № 5*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$\left|x^2 - 5|x|\right| = a(x+4)$$
имеет ровно три различных корня.

ОТВЕТ: $a_1 = 0$; $a_2 = 1$.

1356 (*фил., 2004, № 6*). Дана система уравнений

$$\begin{cases} y = a|x - 3a|, \\ |x| = b - |y|. \end{cases}$$

а) При каких значениях параметров a и b эта система относительно неизвестных x и y имеет бесконечно много решений?

б) На плоскости (x, y) изобразить множество точек, координаты которых таковы, что система относительно неизвестных a и b имеет ровно три решения.

Ответ: а) $a = 1, b = 3$ или $a = -1, b = 3$;

б) искомое множество состоит из двух частей: первая часть расположена в первой четверти и ограничена снизу осью Ox, а сверху — параболой $y = \frac{x^2}{12}$; вторая часть расположена в третьей четверти и ограничена сверху осью Ox, а снизу — параболой $y = -\frac{x^2}{12}$.

1357 (*ФГУ, 2002, № 6*). Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(3\sqrt{x|x|} + |y| - 3\right)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: -4; 4; 6.

1358 (*мех-мат, 1998, устный*). Найти количество корней уравнения

$$\{x\} - \frac{1}{2} = \log_2 \frac{a}{x}$$

для каждого значения $a \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2}\right]$.

Ответ: 2.

1359 (*ВШБ, 2003, апрель, № 8*). Найти все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| + |y| - p) \cdot (|x| + |y| + |x + y| - 2p) = 0, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{p^2} \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Ответ: $p = 2^{\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}} < p \leqslant 1$.

1360 (*географ., 2000, № 6*). Даны функции $f(x, y) = |y| + 3|x| - 3$ и $g(x, y, a) = y^2 + (x - a) \cdot (x + a)$.

а) При каком наименьшем положительном значении параметра a система уравнений
$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y,a) = 0 \end{cases}$$
имеет ровно четыре различных решения?

б) При этом значении параметра a найдите площадь фигуры, координаты (x, y) всех точек которой удовлетворяют неравенству
$$\frac{f(x,y)}{g(x,y,a)} \leqslant 0.$$

ОТВЕТ: $a = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\quad S = \dfrac{60 - 9\pi}{10}$.

1361 (*почвовед., 1995, № 5*). При каких значениях параметра b система уравнений
$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$
имеет два действительных решения?

ОТВЕТ: $-2 < b < 0$.

1362 (*хим., 1986, № 5*). Найти все значения a, при которых система
$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$
имеет ровно четыре различных решения.

ОТВЕТ: $a_1 = -\dfrac{1}{4}$; $\quad a_2 = -\dfrac{1}{32}$.

1363 (*географ., 1994, № 5*). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$
имеет ровно одно решение.

ОТВЕТ: $2 \leqslant a < 3$ или $3 < a \leqslant 4$.

1364 (*ФФМ, 2003, май, № 6*). Найти все действительные значения параметра a, при которых не найдется ни одной такой пары чисел (u, v), чтобы функция
$$f(x) = vx^4 + a(au - 1)x^3 - 2u - 2$$
удовлетворяла одновременно двум условиям $f(-1) \geqslant -2u$ и $f(1) \leqslant -2$.

ОТВЕТ: -1.

9.2. Геометрический метод решения

1365* (*ВМК, 1982, № 5*). При всех a решить уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4$$

и определить, при каких a оно имеет ровно два решения.

ОТВЕТ: при $|a|>1$ $x=1$; при $a=1$ $x\geqslant 1$; при $|a|<1$ $x_1=1$, $x_2=\dfrac{a+7}{a-1}$; при $a=-1$ $-3\leqslant x\leqslant 1$. Два решения — при $|a|<1$.

1366 (*геолог., 1991, № 6*). При всех значениях параметра a решить уравнение

$$|x+2|+a|x-4|=6.$$

ОТВЕТ: при $a<-1$ $x=4$; при $a=-1$ $x\geqslant 4$; при $-1<a<1$ $x_1=4$, $x_2=\dfrac{4a-8}{a+1}$; при $a=1$ $-2\leqslant x\leqslant 4$; при $a>1$ $x=4$.

1367 (*геолог., 2001, май, № 7*). При каких значениях y уравнение

$$|3x+6|+|3x-8|=yx+12$$

имеет единственное решение x?

ОТВЕТ: $y=-\dfrac{3}{2}$; $y=1$; $y\leqslant -6$; $y\geqslant 6$.

1368 (*ВШБ, 2004, № 8*). Найти все значения параметра $p\in[-4;4]$, при которых неравенство

$$(p-2)\cdot((x+1)(p-3)+2x)>0$$

выполняется при любых $x\geqslant 0$.

ОТВЕТ: $p\in[-4;1]\cup(3;4]$.

1369 (*геолог., 2005, устный*). При каких значениях параметра a уравнение

$$|x-a|=\frac{x}{2}+1$$

имеет не более одного корня?

ОТВЕТ: $a\leqslant 2$.

1370 (*почвовед., 2003, № 6*). Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x-3b}{b-2x}<0.$$

ОТВЕТ: $b<-6$; $b>-\dfrac{1}{3}$.

1371 (*ИСАА, 2000, № 5*). Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$|x^2 - 2x + a| > 5$$

не имеет решений на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: $-4 \leqslant a \leqslant 2$.

1372 (*психолог., 2003, № 5*). При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$?

Ответ: $-\frac{5}{2} < a < 7$; $\frac{9 - \sqrt{211}}{2} \leqslant a \leqslant -\frac{5}{2}$, $a = 7$.

1373 (*ВМК, эконом., физ., подгот. отд., 2000, № 6*). При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{|x - 2|(x - 3)}{x^2 - 2x - 3} = a$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a < -1$; $a = 0$; $a = \frac{1}{4}$; $a \geqslant 1$.

1374 (*географ., 2004, № 5*). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x - a| + |y - a| + |a + 1 - x| + |a + 1 - y| = 2, \\ y + 2|x - 5| = 6 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a_1 = 2$; $a_2 = \frac{16}{3}$.

1375 (*почвовед., 1999, май, № 6*). Найти все значения параметра β, при которых уравнение

$$(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = \beta$$

относительно x имеет ровно три корня.

Ответ: $\beta = \frac{9}{16}$.

1376 (*геолог., 2002, май, № 7*). При каких положительных значениях параметра a неравенство

$$\frac{a + 2x}{ax - 4} \geqslant \frac{5}{x}$$

выполнено для всех $x > 10$?

Ответ: $\frac{2}{5} \leqslant a \leqslant \frac{11}{2}$.

1377 (*олимпиада «Ломоносов-2005», апрель, № 8*). Найти все значения a, при которых уравнение

$$||x+a|-2x|-3x=7|x-1|$$

имеет не более одного корня.

ОТВЕТ: $-6 \leqslant a \leqslant 4$.

1378 (*хим., 2005, № 6*). При каких значениях параметра a уравнение

$$|x|+\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=a$$

имеет ровно три решения?

ОТВЕТ: $a=2$.

1379 (*эконом., отд. полит. экономии, 1983, № 6*). Определить, при каких значениях a уравнение

$$x-\frac{a}{2}=4\left|4|x|-a^2\right|$$

имеет ровно три корня. Найти эти корни.

ОТВЕТ: $a=-\frac{1}{8}$; $a=-2$,

если $a=-\frac{1}{8}$, то $x=0$; $-\frac{1}{136}$; $\frac{1}{120}$,

если $a=-2$, то $x=-1$; $\frac{15}{17}$; $\frac{17}{15}$.

1380 (*эконом., отд. полит. экономии, 1977, № 5*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

ОТВЕТ: $-\frac{13}{4}<a<3$.

1381 (*почвовед., 1996, № 6*). Определить, при каких значениях a решения неравенства

$$\sqrt{x+a}\geqslant x$$

образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

ОТВЕТ: $a_1=2; a_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

1382 (*ВМК, 2004, № 5*). Для каждого значения параметра a найти число решений уравнения

$$\frac{2}{16^x}-\frac{1}{8^x}-\frac{a+8}{4^x}+\frac{4-2a}{2^x}-a^2+4a+5=0.$$

Ответ: если $a<-\frac{5}{4}$ или $a\geqslant 5$, то один корень; если $a=-\frac{5}{4}$ или $-1\leqslant a<5$, то два корня; если $-\frac{5}{4}<a<-1$, то три корня.

1383 (*ВМК, 1995, апрель, № 4*). Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\left|\frac{1}{x}+2a\right|>x.$$

Ответ: при $a\geqslant -1$ $(-\infty;0)\cup(0;a+\sqrt{a^2+1})$;
при $a<-1$ $(-\infty;0)\cup(0;a+\sqrt{a^2+1})\cup(-a-\sqrt{a^2-1};-a+\sqrt{a^2-1})$.

1384 (*ВМК, 2003, апрель, № 5*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}5^{2x^2+3y^2-4x+8y+16}+5^{y^2+8x-5}\leqslant 126\cdot 5^{x^2+2y^2+2x+4y+4},\\ x^2+y^2+12x-8y=a\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $2x+3y=0$.

Ответ: $66-2\sqrt{117}<a<66+2\sqrt{117}$.

1385 (*биолог., 2003, апрель, № 6*). Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{a-f(x)}=0,\\ y^2+\left(a-5\cdot 10^6\right)y+25\cdot 10^{10}=0,\\ z^2+5\cdot 10^3\cdot z+a=0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x)=\left|x-1^2\right|+\left|x-2^2\right|+\dots+\left|x-203^2\right|.$$

Ответ: $2\,101\,608\leqslant a\leqslant 4\,000\,000$; $6\,000\,000\leqslant a\leqslant 6\,250\,000$.

1386 (*эконом., 1992, № 6*). Найти все значения параметра p, при каждом из которых количество целочисленных решений неравенства

$$x^2+5(x+1)+3|x-p|+p\leqslant 0$$

максимально.

Ответ: $p=-5$, $-\frac{7}{2}\leqslant p\leqslant -\frac{13}{4}$.

9.3. Использование свойств инвариантности

1387* (*хим., 1999, № 6*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x\,(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$

имеет нечетное число решений.

ОТВЕТ: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

1388 (*эконом., отд. кибернетики, 1987, № 6*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

ОТВЕТ: $a = \frac{4}{3}$.

1389 (*хим., 1986, № 5*). Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases}1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|},\\ 49y^2+x^2+4a=2x-1\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

ОТВЕТ: $a_1 = -\frac{1}{4}$; $\quad a_2 = -\frac{1}{32}$.

1390 (*мех-мат, 1966, № 5*). Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2+a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет только одно решение (a, x, y — действительные числа).

ОТВЕТ: $a = 0$.

1391 (*мех-мат, 1966, № 5*). Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases}xyz+z=a,\\ xyz^2+z=b,\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z — действительные числа).

ОТВЕТ: $a = b = -2$.

9.4. Использование свойств квадратного трехчлена

1392* (*хим., 2003, № 1*). Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x-a} > 0$$

содержит точку $x = 1$.

Ответ: $(0; 1)$.

1393* (*ВМК, отд. бакалавров, 2002, № 2*). При каких значениях параметра b уравнение

$$9x + b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2(b + \sqrt{3})$$

не имеет корней?

Ответ: $b = \sqrt{3}$.

1394 (*ВМК, 2002, № 1*). При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4 x + b^2 + (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b + \sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

Ответ: $b = -\sqrt{2}$.

1395* (*фил., 2004, № 1*). При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a-1}{a+5} = 0$$

не имеет решений?

Ответ: $a < -5, \quad a > \frac{9}{7}$.

1396 (*ВМК, 1994, устный*). Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней и $9a + 3b + c > 0$. Определите знак a.

Ответ: $a > 0$.

1397* (*почвовед., 1974, № 4*). Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполняется для всех таких x, что $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $\frac{1}{2} < a < 1$.

1398 (*фил., 2005, № 7*). При каких целых a неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x\log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0$$

верно для любого значения x?

ОТВЕТ: $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$.

1399 (*хим., 2003, май, № 1*). Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$(b+1)x^2 + (b+2)x + 1 = 0$$

имеет единственное решение?

ОТВЕТ: $0; -1$.

1400 (*соц., 2005, апрель, № 5*). При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(a+4)x^2 + 6x - 1}{x+3} = 0$$

имеет единственное решение?

ОТВЕТ: $-4; -13; -\frac{17}{9}$.

1401 (*географ., 1980, № 1*). Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0$$

имеет два различных действительных решения.

ОТВЕТ: $k < \frac{1}{2}$.

1402 (*ВМК, 1980, № 4*). При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$$

имеет два действительных решения?

ОТВЕТ: $\frac{9-\sqrt{17}}{16} < a < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} < a < \frac{9+\sqrt{17}}{16}$.

1403 (*ВМК, 2004, устный*). Найти a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (2+a)x - (2+a) = 0$$

была наименьшей.

ОТВЕТ: $a = -2$.

1404 (*соц., 2004, № 6*). Для каждого положительного значения параметра c изобразить множество тех пар (b, a), для каждой из которых уравнение

$$bx^2 + ax - \frac{b}{4} + c = 0$$

имеет два различных отрицательных корня, и указать все значения параметра a, при каждом из которых множество соответствующих значений b состоит из двух непересекающихся интервалов.

ОТВЕТ: множество соответствующих значений b состоит из двух непересекающихся интервалов при $a \in (0; 2c]$.

1405 (*почвовед., 2004, май, № 6*). Шарик радиуса r брошен в стакан, образованный вращением параболы $y = 3x^2$ вокруг оси Oy. При каком наибольшем значении r шарик достигнет дна стакана (точки $O = (0, 0)$)?

ОТВЕТ: $r_{\max} = \frac{1}{6}$.

1406 (*соц., 2003, № 6*). Определить все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

ОТВЕТ: $a = 7, \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 8.$

1407 (*МШЭ, 2005, № 8*). При каких значениях параметра b уравнение

$$(b - 2) \cdot 4^x + (2b - 5) \cdot 10^x = (3b - 7) \cdot 25^x$$

имеет единственное решение?

ОТВЕТ: $b \leqslant 2; \quad b = \frac{9}{4}, \quad b \geqslant \frac{7}{3}.$

1408 (*мех-мат, 1993, № 2*). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4^x + (a^2 + 5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$$

не имеет решений.

ОТВЕТ: $-3 \leqslant a \leqslant 3.$

1409 (*эконом., 1977, № 4*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_2 (4^x - a) = x$$

имеет два решения.

ОТВЕТ: $-\frac{1}{4} < a < 0.$

1410 (*ВШБ, 2005, № 8*). Найдите все значения параметра a, при которых наибольшее значение квадратного трехчлена $2x^2 - 2ax + a^2 - 2a - 4$ на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 3$ не превосходит 2.

Ответ: $2 \leqslant a \leqslant 2 + 2\sqrt{2}$.

1411 (*мех-мат, 1992, № 6*). Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-2; 1]$.

Ответ: $x < -1$, $\quad -1 < x < 0$, $\quad x > 2$.

1412 (*мех-мат, 1991, № 5*). Найти все пары чисел p и q, при которых неравенство

$$|x^2 + px + q| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

Ответ: $p = -6$; $\quad q = 7$.

1413 (*биолог., ФФМ, 1999, № 5*). Найти все значения y, удовлетворяющие условию $y > \frac{1}{2}$, такие, что неравенство

$$16y^3 + 6y^3x - 4y^3x^2 - 50y^2 - 11y^2x + 10y^2x^2 + \\ + 52y + 4yx - 8yx^2 - 18 + x + 2x^2 > 0$$

выполняется при всех x из интервала $1 < x < 2y$.

Ответ: $\frac{5}{6} \leqslant y < 1$, $\quad 1 < y \leqslant \frac{3}{2}$.

1414 (*мех-мат, 1989, № 6*). Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

Ответ: $z_{\max} = \sqrt{5}$.

1415 (*ИСАА, 1992, № 6*). При каких значениях параметра a сумма s квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Ответ: $a = -3$; $\quad s = 18$.

1416 (*ВМК, 1988, № 5*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a\right)\cdot \lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

ОТВЕТ: $a=\frac{5}{3}$; $a=\frac{3}{2}$; $a\in[2;4)$.

1417 (*мех-мат, 2002, май, № 4*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1}x+\log_x(19-8a)=2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше 0,01?

ОТВЕТ: $-\frac{9}{10}\leqslant a<0$, $2<a<\frac{9}{4}$, $\frac{9}{4}<a<\frac{19}{8}$.

1418 (*ВМК, 2004, устный*). Найти минимальное и максимальное значения параметра a, при которых неравенство

$$3a+\frac{1}{4}-ax+a^2x^2\leqslant 0$$

выполняется для всех $x\in[-1{,}0]$.

ОТВЕТ: $a_{\min}=-2-\frac{15}{2}$, $a_{\max}=-\frac{1}{12}$.

1419 (*ВШБ, 2003, № 8*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5+25(a-1)x^3-4(a-7)x=0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

ОТВЕТ: $a=-2$.

1420 (*мех-мат, 2003, май, № 4*). Числа p и q подобраны так, что уравнение

$$2^{1+x}+p+q2^{1-x}=0$$

имеет ровно два различных корня, а их сумма равна 4. Найти произведение различных корней уравнения

$$(x^2-5x-300)(x^2-px-q)=0.$$

ОТВЕТ: 4800.

1421 (*эконом., отд. менеджмента, 2003, № 6*). Найти все значения b, при которых уравнение

$$3 \cdot \sqrt{5}[]x + 4 - 7b^2 \cdot \sqrt[5]{32x + 96} = \sqrt[10]{x^2 + 7x + 12}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2/7}] \cup [-\sqrt{1/7}; \sqrt{1/7}] \cup [\sqrt{2/7}; +\infty)$.

1422 (*эконом., 2003, № 6*). Найти все значения a, при которых уравнение

$$5 \cdot {}^3\sqrt{x + 3} - 3a^2 \cdot {}^3\sqrt{8x - 16} = {}^6\sqrt{x^2 + x - 6}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $-1 < a < -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}} < a < 1$.

Глава 10

ФУНКЦИИ

10.1. Графики

1423* (*геолог., 1998, устный*). Построить график функции
$$y = \left(x^2\right)^{\log_{\sqrt{x}} 2}.$$

1424 (*геолог., 1999, устный*). Построить график функции
$$y = x^{|\log_x 2|}.$$

1425 (*геолог., 2000, устный*). Построить график функции
$$y = 2\,\frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{|x| - x}.$$

1426 (*геолог., 2000, устный*). Построить график функции
$$y = \log_{1-x} x \cdot \lg(1 - x).$$

1427 (*геолог., 2001, устный*). Постройте график функции
$$y = \lg\left(\frac{x^2}{|x|}\right).$$

1428 (*геолог., 2001, устный*). Постройте график функции
$$y = \frac{|\log_2 x| + \log_2 x}{\log_2 x}.$$

1429 (*геолог., 2002, устный*). Постройте график функции
$$y = \frac{\log_x 3 - \log_3 x}{\log_x 3x}.$$

1430 (*ВМК, 2003, устный*). Постройте график функции
$$y = 2^{\log_4 x^2} \cdot 3^{\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)}.$$

1431 (*ВМК, 2004, устный*). Построить график функции
$$y = 1 + x^2 - x^4.$$

1432 (*ВМК, 2004, устный*). Построить график функции
$$y = \frac{|x|}{1 - x}.$$

1433 (*психолог., 1966, № 5*). Построить график функции
$$y = \frac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}.$$

1434 (*мех-мат, 1994, устный*). Для каждого $a > 0$ найти уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих ровно две общие точки с графиком функции
$$y = x|x+2a| + a^2.$$

ОТВЕТ: $y = kx$ при $k = 0; -\frac{a}{2}; 4a$.

10.2. Четность/нечетность

1435* (*почвовед., 2004, № 7*). Доказать, что график функции
$$y = 4x + \log_2\left(\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4}\right)$$
имеет центр симметрии, и найти координаты (x, y) этого центра симметрии.

ОТВЕТ: координаты центра симметрии: $(-2, -8)$.

1436* (*мех-мат, 1998, устный*). При каких значениях a график функции
$$y(x) = (x+a)(|x+1-a| + |x-3|) - 2x + 4a$$
имеет центр симметрии?

ОТВЕТ: $a = -\frac{2}{3}$.

10.3. Монотонность

1437 (*ВМК, 2005, устный*). Пусть $(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$ и
$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$
Существуют ли такие значения a, b и c, при которых из неравенства $x_1 > x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$? Ответ обосновать.

ОТВЕТ: не существует, так как $f(x) = 1$ при всех x.

1438 (*ВМК, 2004, устный*). Доказать, что любой многочлен 2-й степени можно представить в виде разности двух многочленов, возрастающих на всей числовой оси.

10.4. Область значений

1439* (*Севастополь, 2005, № 2*). Найдите область значений функции

$$y = \sqrt{2x - x^2 + 4}.$$

Ответ: $[0; \sqrt{5}]$.

1440 (*геолог., 2003, устный*). Найдите область значений функции

$$y = -\sqrt{55 - 6x - x^2}.$$

Ответ: $[-8; 0]$.

1441 (*геолог., 2000, устный*). Найти множество значений функции

$$y(x) = -\sqrt{55 - 6x - x^2}$$

на отрезке $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

Ответ: $[-8; -\sqrt{15}]$.

1442 (*эконом., 2005, № 2*). Найти произведение всех целых значений, которые принимает функция

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{\sqrt{3}} + 3$$

на отрезке $\left[1; \frac{9}{2}\right]$.

Ответ: 24.

1443 (*ИСАА, 2003, № 1*). Числа x, y изменяются в пределах: $3 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant 2$. В каких пределах изменяется выражение $A = 4^{x-2y-1} - 4y + 4x - 4$?

Ответ: $\frac{1}{16} \leqslant A \leqslant 12$.

1444 (*ВМК, 2000, 2003, устный*). Доказать, что функция

$$f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

принимает только положительные значения.

1445* (*ВМК, 2004, устный*). Найти множество значений функции

$$y = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

1446 (*ВМК, 2003, № 3*). Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x.$$

Ответ: $[-2; -3/2) \cup [-1; +\infty)$.

1447 (*ФФМ, 2003, май, № 5*). Найти область значений функции

$$y = \log_{(16x-12-4x^2)}\left(\frac{|x+1| + |x-5|}{3}\right).$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

1448 (*психолог., 1999, № 4*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции

$$f(x) = \frac{4x - a}{x^2 - 4x + 7}$$

содержит полуинтервал $\left[-\frac{4}{3}; 1\right)$. Определить при каждом таком a множество значений функции $f(x)$.

Ответ: $a = 9$, $\left[-\frac{4}{3}; 1\right]$.

1449 (*эконом., 1998, № 5*). Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

Ответ: $3 - 2\sqrt{3} < c < -6 + 2\sqrt{15}$.

1450 (*ИСАА, 2003, № 6*). Функция $y(x) = x^2 + 2(c-d)x + 3c - d$ такова, что $y(1) \cdot y(-1) \leqslant 0$ и $|c - d| \geqslant 1$. Найти значения c и d, при которых множество значений функции $f(x) = |y(x)|$ на отрезке $[-1{,}1]$ будет наименьшим; указать это множество.

Ответ: $(c, d) = (-1, -2)$ или $(0, 1)$, множество значений $[0{,}2]$.

1451 (*геолог., 2005, № 7*). Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + a$ при условии

$$|2x + 4 - 2a| + |x - 2 + a| \leqslant 3.$$

Ответ: $[-1; 5]$.

1452 (*ВМК, 2005, устный*). Какие значения может принимать выражение $x + 2y^2$, если $2x^2 + y^2 \leqslant 1$?

Ответ: из отрезка $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{33}{16}\right]$.

10.5. Экстремумы функций одной переменной

1453 (*почвовед., 2004, № 1*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 3x$ при $x \in [-1; 3]$.

ОТВЕТ: $y_{\max} = 9$, это значение достигается при $x = 3$; $y_{\min} = -\frac{9}{8}$, это значение достигается при $x = \frac{3}{4}$.

1454* (*почвовед., 2003, № 4*). Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{3x^2 + 5} - \sqrt{3x^2}$$

на отрезке $[0; 3]$.

ОТВЕТ: $y_{\min} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$; это значение достигается при $x = 3$.

1455 (*соц., 2004, апрель, № 2*). Дана функция

$$y(x) = |x - 3| + |2x - 4| + 1.$$

а) Найти наименьшее значение функции $y(x)$.
б) Решить неравенство $y(x) > 8$.

ОТВЕТ: а) $y_{\min} = 2$, это значение достигается при $x = 2$;
б) $x < 0, \quad x > \frac{14}{3}$.

1456 (*ВМК, 2004, устный*). Найти максимальное значение на отрезке $[0; 1]$ функции

$$y = \min\left(1 - x, 2x - 1, \frac{x}{3}\right).$$

ОТВЕТ: $y_{\max} = \frac{1}{4}$, это значение достигается при $x = \frac{3}{4}$.

1457 (*физ., 1978, № 2*). Исследовать на экстремум функцию

$$y(x) = \sqrt{2x^2 - x + 2}.$$

ОТВЕТ: $y_{\min} = \frac{15}{8}$; это значение достигается при $x = \frac{1}{4}$ и является единственным экстремумом.

1458 (*ВМК, 2005, устный*). Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$$

на отрезке $[1; 64]$.

ОТВЕТ: 81; это значение достигается при $x = 8$.

1459 (*ВМК, 2004, устный*). Найти наибольшее значение функции

$$y = x\sqrt{1-3x^2}.$$

ОТВЕТ: $y_{\max} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

1460 (*ВМК, 2005, устный*). Действительные x, y, a таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ x \cdot y = a^2 - 7a + 14, \end{cases}$$

При каких a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

ОТВЕТ: $a = 5$.

1461 (*хим., 2000, заочный тур, № 1*). Найти наименьшее значение функции

$$y = |x-3| + |x| + |x+3| + |x+5|.$$

ОТВЕТ: $f_{\min} = 11$; это значение достигается при $x \in [-3; 0]$.

1462 (*ВМК, 2000, устный*). Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 10.$$

ОТВЕТ: $f_{\min} = 9$; это значение достигается при $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

1463 (*ВМК, 2001, устный*). Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 11.$$

ОТВЕТ: $f_{\max} = 12$; это значение достигается при $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

1464 (*эконом., 1991, № 4*). Определить наименьшее значение функции

$$F(r) = (r-2) \cdot (4 + (r-1)(r-4)) \cdot (r-3), \quad r \in \mathbb{R}.$$

ОТВЕТ: $F_{\min} = -\dfrac{7}{16}$; это значение достигается при $r = \dfrac{5}{2}$.

1465 (*геолог., 2000, устный*). Найти значение a, при котором минимально расстояние между корнями уравнения

$$x^2 + (a-34)x - 35a - 36 = 0.$$

ОТВЕТ: $a = -36$.

1466 (*геолог., 2003, устный*). Найдите минимальное значение функции

$$y = 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}.$$

ОТВЕТ: 0; это значение достигается при $x = 0$.

1467 (*ВМК, 2004, устный*). Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

ОТВЕТ: 2; это значение достигается при $x = -1$ и $x = 0$.

1468 (*ВМК, 2003, устный*). Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{3}} + \sqrt[6]{1 + x}.$$

ОТВЕТ: $f_{\max} = 2$; это значение достигается при $x = 0$.

1469 (*фил., 1984, № 3*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = -x^2 + 3|x - 1| + 2$$

на отрезке $[-2; 2]$.

ОТВЕТ: $y_{\max} = \frac{29}{4}$; $y_{\min} = 1$.

1470 (*психолог., 1985, № 4*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \left|x^2 + x\right| + \left|x^2 - 3x + 2\right|$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

ОТВЕТ: $y_{\max} = 4$; $y_{\min} = \frac{3}{2}$.

1471 (*эконом., отд. полит. экономии, 1969, № 5*). При каком действительном x выражение $\frac{2x - 1}{2x - x^2 - 4}$ принимает наименьшее значение?

ОТВЕТ: $y_{\min} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$; это значение достигается при $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

1472 (*ВМК, 1991, № 5*). Проверить справедливость неравенства $y \leqslant 3{,}17$, где y — наименьшее на интервале $(0; 1)$ значение функции

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+0{,}003)^{0{,}45}} + \frac{3}{(1-x)^{0{,}48}}\right) + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{(x+0{,}003)^{0{,}45}} - \frac{3}{(1-x)^{0{,}48}}\right|.$$

1473 (*ВМК, 2004, устный*). Найти наибольшее значение функции

$$y = (1 - x)^5(1 + 2x)^2(1 + x)$$

на отрезке $[-0.5; 1]$.

ОТВЕТ: 1; это значение достигается при $x = 0$.

1474 (*мех-мат, 1994, устный*). Для каждого $a > 0$ найти наименьшее значение величины

$$x^2 - |x+a| + x - a$$

на отрезке $[-3;3]$.

ОТВЕТ: -1, если $0 < a < \frac{1}{2}$; $-2a$, если $a \geqslant \frac{1}{2}$.

10.6. Экстремумы функций нескольких переменных

1475 (*мех-мат, 2004, устный*). Найти наименьшее значение выражения

$$(x-y)^2 + 3(y-z)^2 - 5(z-x)^2,$$

если $x, y, z \in [-1;1]$.

ОТВЕТ: -17; это значение достигается в точках $(-1; 0{,}5; 1)$ и $(1; -0{,}5; -1)$.

1476 (*ВМК, 2001, устный*). Найти наименьшее значение выражения

$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 + 4xy + 6y + 10.$$

ОТВЕТ: 1; это значение достигается в точке $(6; -3)$.

1477 (*эконом., отд. кибернетики, 1982, № 5*). Построить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$y = 2\left|1 + \frac{1}{x}\right| + \frac{2}{x} - |y+4|,$$

и среди точек этого множества найти все те, в каждой из которых координата y принимает наименьшее значение.

ОТВЕТ: $y_{\min} = -3$ для $-1 \leqslant x < 0$.

1478 (*ВМК, 2001, № 3*). Среди всех решений системы

$$\begin{cases} 3y + 2x \geqslant 2, \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y \leqslant 4 \end{cases}$$

найти такое, при котором выражение

$$f = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13$$

принимает наименьшее значение.

ОТВЕТ: $\left\{\left(\frac{4}{13}; \frac{6}{13}\right)\right\}$.

1479* (*ВШБ, 2004, № 7*). Найти наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16$.

ОТВЕТ: 10.

1480 (*ВМК, 2003, устный*). Найдите наибольшее значение выражения
$$x^2y - y^2x,$$
где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

ОТВЕТ: $\frac{1}{4}$; это значение достигается при $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$.

1481 (*ВМК, 2003, устный*). Найдите минимальное значение выражения
$$(x + y)(y + z),$$
если x, y, z — положительные числа и $xyz(x + y + z) = 9$.

ОТВЕТ: 6.

1482 (*ВМК, 2003, устный*). Найдите наименьшее значение выражения
$$x^2 + 5y^2 + 8z^2,$$
если $xy + xz + yz = -1$.

ОТВЕТ: 4.

1483 (*мех-мат, 2002, № 6*). Найти минимальное значение выражения $(x + y - z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств
$$1 \leqslant (x + y)^2 \leqslant \frac{4}{3},$$
$$8 \leqslant (y + z)^2 \leqslant 9,$$
$$10 \leqslant (z + x)^2 \leqslant 11.$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{4}(3 + \sqrt{8} - \sqrt{11})^2$.

1484 (*МК-МГУ, 2005, I тур, № 8; мех-мат, 2004, олимпиада, 9 кл., № 5*). Найти наименьшее значение выражения
$$\sqrt{(x-9)^2 + 4} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(y-3)^2 + 9}.$$

ОТВЕТ: 13; это значение достигается в точке $(x_0, y_0) = \left(\frac{21}{5}, \frac{7}{4}\right)$.

1485 (*психолог., 1986, № 6*). Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x + 3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \leqslant 3$.

ОТВЕТ: $\max = 2\sqrt{2}$.

1486 (*биолог., 1989, № 5*). Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать сумма $2x + y - z$?

ОТВЕТ: $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

1487 (*ВМК, 2004, устный*). Числа a, b, c таковы, что $3a^2+b^2+c^2=4$. Какое наименьшее значение может принимать сумма $a-2b+c$?

ОТВЕТ: $\dfrac{-8\sqrt{3}}{3}$.

1488 (*хим., 1997, № 6*). Найти наибольшее и наименьшее значения выражения x^2+2y^2, если $x^2-xy+2y^2=1$.

ОТВЕТ: $\min=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$, $\max=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$.

1489 (*ВМК, 2000, № 5*). Найти наибольшее значение выражения

$$4x^2+80x+y+43$$

при условии, что

$$6x^2+32x+y+283\leqslant 0 \text{ и } x^2+86x+y+202\geqslant 0.$$

ОТВЕТ: $\max=30$.

1490 (*ФГП, 2005, № 8*). Переменные x, y связаны соотношением $x^2+y^2-6x+4y+10=0$. Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значением выражения $2ax-3y-10$ больше 12.

ОТВЕТ: $|a|>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

10.6.1. Тригонометрические подстановки

1491 (*эконом., отд. кибернетики, 1985, № 5*). Среди всех решений (x,y,z,v) системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=4,\\ z^2+v^2=9,\\ xv+yz\geqslant 6 \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

ОТВЕТ: $x=\dfrac{4}{\sqrt{13}}$, $y=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$, $z=\dfrac{9}{\sqrt{13}}$, $v=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

1492 (*географ., заочный тур олимпиады «Абитуриент-2000», № 10*). Переменные x, y, u, v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=9,\\ u^2+v^2=25. \end{cases}$$

При условии, что сумма $xu+yv$ минимальна, найти: а) максимальное значение суммы $x+v$; б) минимальное значение суммы $y+u$.

ОТВЕТ: а) $\sqrt{34}$; б) $-\sqrt{34}$.

1493 (*ИСАА, 2004, № 6*). Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{w^2}{144}$, если величины x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-20=0, \\ z^2+w^2-2w-143=0, \\ xw+yz-x+w+2z-61\geqslant 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\dfrac{4201+120\sqrt{601}}{3600}$ и $\dfrac{4201-120\sqrt{601}}{3600}$ соответственно.

1494 (*ВМК, 2001, устный*). Пусть $f(t)=\sqrt{1+t^2}-t$. Какие значения может принимать выражение

$$f(x)\cdot f(y)+f(x)\cdot f(z)+f(y)\cdot f(z)$$

при следующих ограничениях:

$$xy+xz+yz=1,\quad x>0,\quad y>0,\quad z>0?$$

ОТВЕТ: это выражение равно 1.

10.7. Экстремумы функций целочисленных переменных

1495 (*ВМК, 2004, устный*). Пусть x, y — целые числа. Найти наименьшее положительное число N, если $N=6x+3y$.

ОТВЕТ: $N_{\min}=3$.

1496 (*ВМК, 2001, 2003, 2005, устный*). Найти минимальное значение величины $x+y$, если x, y — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} |y-2x+1|\leqslant 3, \\ y>-4. \end{cases}$$

ОТВЕТ: -5 (оно достигается при $x=-2$, $y=-3$).

1497* (*мех-мат, 2005, устный*). Пусть q и d — наименьшее общее кратное и, соответственно, наибольший общий делитель натуральных чисел x и y. Найти наименьшее значение величины $q:d$ при условии $3x=8y-29$.

ОТВЕТ: 4.

10.8. Текстовые задачи на экстремумы

1498* (*географ., 2001, № 3*). Числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a - c, c - b, 2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$?

ОТВЕТ: -9.

1499* (*хим., 1997, май*). Из сосуда, содержащего чистый спирт, отлили $1/3$ часть и добавили такое же количество воды. Потом отлили $1/3$ часть смеси и добавили такое же количество воды. Так проделали k раз (включая первое переливание). Каково наименьшее значение k, при котором процентное содержание спирта в сосуде после сделанных переливаний станет меньше 10%?

ОТВЕТ: $k = 6$.

1500 (*мех-мат, 1981, № 3*). В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в 1-й сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. О числах p и q известно только, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

ОТВЕТ: $18\frac{1}{3}$ кг.

1501 (*эконом., отд. кибернетики, 1978, № 4*). Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

ОТВЕТ: 40% (составлен из первого и третьего сплавов) и $43\frac{1}{3}$% (составлен из первого и второго сплавов).

1502* (*хим., 1992, № 4*). Даны три сплава. Состав первого сплава: 55% хрома и 45% никеля. Состав второго сплава: 60% никеля, 25% хрома и 15% кобальта. Состав третьего сплава: 70% хрома и 30% кобальта. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 20% кобальта. Какие значения может принимать процентное содержание никеля в этом новом сплаве?

ОТВЕТ: процентное содержание никеля в новом сплаве меняется от 15% (новый сплав составлен только из первого и третьего сплавов) до 40% (новый сплав составлен только из второго и третьего сплавов).

1503* (*ФНМ, 2000, май, № 4*). Имеется три сплава, в состав которых входят металлы A, B и C. Первый сплав содержит 20% металла A, 30% металла B, 50% металла C. Второй сплав содержит 50% металла A, 20% металла B, 30% металла C. Третий сплав содержит 30% металла A, 40% металла B, 30% металла C. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, который содержал бы 25% металла A, а процентное содержание металла B было бы минимально возможным?

Ответ: $\frac{25}{3}$, $\frac{5}{3}$ и 0 кг.

1504 (*фил., 1988, № 5*). Через некоторое время после начала работы первая бригада собрала на два автомобиля больше, чем вторая бригада. Затем вторая бригада увеличила производительность труда в 1,1 раза и, собрав на втором этапе работы целое число автомобилей n, догнала первую, работавшую все время с постоянной производительностью. Найти наименьшее возможное целое число n.

Ответ: 23.

1505 (*эконом., 2002, № 4*). Бригада рабочих выполняет задание за 42 дня. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на 1 час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более чем за 30 дней. При увеличении бригады еще на 6 человек и рабочего дня еще на 1 час все задание было бы закончено не ранее чем через 21 день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня.

Ответ: 20 рабочих, 6 часов.

1506 (*эконом., 1999, № 3*). Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимально возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

Ответ: 24 дня.

1507 (*эконом., вечерн. отд., 1999, № 4*). Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание за 12 дней. За какое минимальное количество дней может выполнить задание одна третья бригада?

ОТВЕТ: 72 дня.

1508 (*эконом., 1992, № 3*). Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей первого типа и 2010 деталей второго типа. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он может изготовить 1 деталь второго типа. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

ОТВЕТ: 39 и 153 человека.

1509 (*психолог., 2000, № 3*). Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспашет одно поле втрое быстрее, чем второй, а третьему трактору на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за 7 часов 12 минут. Найти наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все тракторы начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется 40 минут.

ОТВЕТ: 14 ч 30 мин.

1510 (*психолог., 1987, № 3*). Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причем площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, еще работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

ОТВЕТ: 10.

1511 (*хим., 2000, № 3*). Две бригады рабочих мостили два участка дороги (первая бригада — первый участок, вторая — второй), причем объем работ на втором участке вдвое больше, чем на первом, а в первой бригаде на 10 рабочих меньше, чем во второй. Производительность труда всех рабочих одинакова. Бригады одновременно начали работу, и когда первая бригада закончила работу, вторая еще работала. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде?

ОТВЕТ: 11.

1512 (*геолог., 2001, № 6*). Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C. Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта A по направлению к C, а второй из B по направлению к C. Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/ч, второго — 33 км/ч, а каждое из расстояний от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равно 275 км?

ОТВЕТ: 7 ч, 55 км.

1513 (*географ., 2000, май, № 5*). Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и $3\frac{1}{3}$ км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

ОТВЕТ: $\frac{60}{13}$ км.

1514 (*географ., 2002, № 4*). Тележка с передними колесами диаметром 30 см и задними колесами диаметром 40 см движется по прямой дороге, проходящей через точки A и B. Между точками A и B ровно 100 метров. Точка A покрашена. Через точку A проезжают правые колеса тележки и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки на дороге, кроме точки A, колеса не окрашивают. Тележка движется по направлению от точки A в сторону точки B. Найти: а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками; б) количество окрашенных точек на отрезке AB.

ОТВЕТ: а) 10π; б) 160.

1515 (*фил., 2003, № 4*). В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 человек во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

Ответ: 28.

1516 (*географ., 1979, № 4*). В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

Ответ: 33.

1517 (*фил., 2003, март, № 5*). Вовочка написал домашнее сочинение и допустил орфографические и пунктуационные ошибки. Затем его сестра проверила сочинение и исправила часть ошибок. В новом тексте количество пунктуационных ошибок оказалось в пределах от 15,5% до 18% от числа пунктуационных ошибок в старом тексте. Количество орфографических ошибок уменьшилось втрое и составило 25% от числа пунктуационных ошибок в первоначальном тексте.

а) Может ли в новом тексте содержаться ровно 6 ошибок?

б) Какое наименьшее число ошибок могло содержаться в первоначальном тексте?

Ответ: а) нет; б) 21.

1518 (*эконом., 1997, № 4*). Имеются три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс. руб., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

Ответ: 12,5% и 15%.

1519 (*соц., 1999, № 4*). Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает число голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определить количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

ОТВЕТ: сначала следует выступить в газете, а затем в любом порядке 2 раза по радио и 1 раз по телевидению.

1520 (*эконом., 1994, № 5*). Предприятие производит детскую обувь и является убыточным. Известно, что при изготовлении m пар обуви в месяц расходы предприятия на выпуск одной пары обуви составляют не менее $\frac{126000}{m} + 9 - \left|3 - \frac{5400}{m}\right|$ тыс. руб., а цена реализации каждой пары обуви при этом не превосходит $18 - \frac{1}{4000}m$ тыс. руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключен.

ОТВЕТ: 12 000 или 24 000 пар обуви.

1521 (*эконом., вечерн. отд., 1997, № 4*). Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% — в проект Y. В зависимости от обстоятельств проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y — от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможный уровень процентной ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

ОТВЕТ: 10% и 20%.

1522 (*геолог., 2002, май, № 6*). На полевых работах геологу нужно собрать образцы типов А и Б. Вес одного образца типа А равен 3 кг, а типа Б — 4 кг. По каждому из образцов типа А требуется провести 5 видов анализов, а по каждому из образцов типа Б — 7 видов. Известно, что вес всех собранных образцов не должен превышать 149 кг, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее чем 249. Какое минимальное и максимальное суммарное количество образцов обоих типов можно собрать при указанных условиях?

ОТВЕТ: 36 и 49.

1523 (*ВМК, 1987, № 5*). С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока — 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

ОТВЕТ: 20 рейсов.

1524 (*ФГУ, 2003, № 1*). Автозаправочные станции E и F расположены на расстоянии 3 км одна от другой. Где наиболее выгодно разместить бензосклад, если на АЗС E ежедневно поставляется 8 тонн бензина, а на АЗС F — 4 тонны?

ОТВЕТ: в пункте E.

1525 (*ВМК, 2004, устный*). Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч составляет $90 + 0{,}4v^2$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость одного километра пути была наименьшей?

ОТВЕТ: 15 км/ч.

1526 (*олимпиада «Ломоносов-2005», апрель, № 9*). Группа отдыхающих в течение 2 ч 15 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 45 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 5 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость ее течения?

ОТВЕТ: от A к B; 4,5 км/ч.

1527 (*геолог., 1997, май, № 7*). Стоимость изготовления m коробок пропорциональна $17+5m+m^2$. Определить количество коробок, при котором стоимость изготовления одной коробки минимальна.

ОТВЕТ: 4.

1528 (*географ., 2003, № 3*). Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Четных чисел в X меньше двух третей от N, а нечетных не больше 36% от N. Какое минимальное значение может принимать число N?

ОТВЕТ: 14.

1529 (*эконом., отд. менеджмента, 1998, № 6*). Множество F состоит из всех точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых принимают целочисленные значения и удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^{\log_{\left(\frac{2x}{3y}\right)}(|x|+|y|-14)} < 3.$$

Определить точки множества F, наименее удаленные от точки $M(2;-2)$.

Ответ: $(-6;-9), (-5;-10), (10;5)$.

1530 (*ФГУ, 2004, № 7*). На плоскости Oxy найдите наибольшее расстояние между такими двумя точками с координатами (x, y), что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$4 \cdot \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{xy}.$$

Ответ: $2\sqrt{65}$.

1531* (*эконом., отд. менеджмента, 1996, № 4*). В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес изделий равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

Ответ: 11 000 тыс. руб. и 12 600 тыс. руб.

1532 (*эконом., отд. менеджмента, 2004, № 5*). Баржа грузоподъемности 96 тонн перевозит контейнеры типов А и Б при условии полной загрузки. Количество загруженных на баржу контейнеров типа Б не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляют 3 тонны и 5 тысяч рублей, контейнера типа Б — 4 тонны и 2 тысячи рублей соответственно. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Ответ: 90 тыс. руб.

1533 (*эконом., отд. кибернетики, 1975, № 4*). Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду — 14 кг, льву — 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда — 160, у каждой лисы — 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Ответ: 3 лисы, 6 леопардов, 1 лев.

1534 (*Севастополь, 1999, № 7*). Детский сад хочет приобрести наборы цветных карандашей трех видов на сумму 111 рублей, при этом должны быть куплены наборы всех трех видов и истрачена вся сумма. Набор из 2 карандашей стоит 2 рубля, набор из 16 карандашей — 14 рублей, набор из 23 карандашей — 21 рубль. Сколько наборов каждого вида следует купить, чтобы общее количество купленных карандашей было наибольшим при заданных условиях?

ОТВЕТ: 3 набора за 2 рубля, 6 наборов за 14 рублей, 1 набор за 21 рубль.

1535 (*эконом., 1996, № 4*). В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

ОТВЕТ: 10 500 тыс. руб. и 12 600 тыс. руб.

1536 (*эконом., отд. кибернетики, 1968, № 3*). Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, один ящик второго типа вмещает 40 деталей, один ящик третьего типа вмещает 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа 20 руб., стоимость пересылки одного ящика второго типа 10 руб., стоимость пересылки одного ящика третьего типа 7 руб. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

ОТВЕТ: 25 ящиков второго типа и 4 ящика третьего типа.

1537 (*эконом., отд. кибернетики., 1984, № 5*). Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12 квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16 квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

ОТВЕТ: 11 домов на 12 квартир и 1 дом на 16 квартир.

1538 (*эконом., 2004, № 5*). Баржа грузоподъемности 98 тонн перевозит контейнеры типов А и Б. Количество загруженных на баржу контейнеров типа Б не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляют 2 тонны и 5 тысяч рублей, контейнера типа Б — 5 тонн и 7 тысяч рублей соответственно. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

ОТВЕТ: 160 тыс. руб.

1539 (*фил., 2002, № 6*). ...Словарь людоеда из племени «Мумбо-Юмбо» составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью...

Однажды людоед начал посещать проповеди миссионера, поэтому его словарный запас стал, оставаясь целочисленным, увеличиваться на некоторое число процентов за каждые полгода. Эллочка поступила в вечернюю школу и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия. Однако через несколько месяцев Эллочка бросила школу.

Какое наибольшее целое число месяцев могла проучиться Эллочка в школе, чтобы при этих условиях словарь людоеда после одного года посещения проповедей остался богаче словаря Эллочки?

ОТВЕТ: 2.

1540 (*мех-мат, 1967, № 2*). Требуется построить некоторое количество одинаковых жилых домов с общей жилой площадью 40 тыс. кв. м. Затраты на постройку одного дома, имеющего N кв. м жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительство дома на 1600 кв. м обходится в 184,8 тыс. руб., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей, и найти эту сумму.

ОТВЕТ: 8 домов, сумма затрат равна $2800\sqrt{2}$ тыс. руб.

РЕШЕНИЯ

Решения к главе 1

□ **1.** Будем проводить вычисления по действиям.

1. $0{,}125 : 1\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$
2. $\frac{17}{90} - \frac{1}{9} = \frac{17-10}{90} = \frac{7}{90}$
3. $3 \cdot \frac{7}{90} = \frac{7}{30}$
4. $\frac{7}{30} \cdot \frac{1}{480} = \frac{7}{30 \cdot 480}$
5. $7 : 1{,}8 = 7 : \frac{18}{10} = 7 \cdot \frac{5}{9} = \frac{35}{9}$
6. $2\frac{1}{3} : 1{,}5 = \frac{7}{3} : \frac{3}{2} = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{9}$
7. $\frac{35}{9} - \frac{14}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$
8. $\frac{7}{3} : \frac{8}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$
9. $\frac{7}{30 \cdot 480} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{1800}$
10. $\left(\frac{1}{1800}\right)^{-1} = 1800$
11. $\frac{679 \cdot 10^{-2}}{0{,}7} = \frac{679}{70} = \frac{97}{10}$
12. $9{,}7 + 0{,}3 = 10$
13. $1800 : 10 = 180$

Ответ: 180. ■

□ **5.** Для любого многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ сумма коэффициентов $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ равна $P(1)$. В нашем случае

$$P(1) = (1 - 3 + 3)^{34} \cdot (1 + 5 - 5)^{249} = 1.$$

ОТВЕТ: 1. ■

□ **7.** Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$. Поэтому остаток от деления многочлена $x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 2$ на двучлен $x + 4$ равен

$$(-4)^5 - 3 \cdot (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 - 2 = -1024 + 192 + 96 - 2 = -738.$$

ОТВЕТ: нет. ■

□ **10.** Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим, что при всех значениях x верно равенство

$$(5 + a - b)x^2 + (15 + 5a)x + (6a + 9b) = 0.$$

Это равносильно тому, что все коэффициенты при неизвестных равны нулю:

$$\begin{cases} 5 + a - b = 0, \\ 15 + 5a = 0, \\ 6a + 9b = 0. \end{cases}$$

Последняя система легко решается:

$$\begin{cases} a = -3, \\ b = 2, \end{cases}$$

ОТВЕТ: $a = -3, b = 2$. ■

□ **16.** Выражение $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$ симметрично относительно x и y. Поэтому его можно выразить через элементарные симметрические многочлены $a = x + y$ и $b = xy$:

$$A = \frac{x^3 + y^3}{x^3y^3} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(xy)^3} =$$
$$= \frac{(x + y)((x + y)^2 - 3xy)}{(xy)^3} = \frac{a(a^2 - 3b)}{b^3}.$$

Подставляя числовые значения $a = 12$, $b = 6$, получим

$$A = \frac{12 \cdot (144 - 18)}{216} = 7.$$

ОТВЕТ: 7. ■

□ **21.** Разложим числители всех дробей на множители и сократим общие множители. После этого все действия легко выполняются:

$$\left(\frac{(3a-4b)(3a+4b)}{3a+4b} - \frac{ab(a-3b)}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2}{2a-b}\right) =$$

$$= (3a-4b-a+3b)^2 : (6ab-4a^2-2ab-b^2) =$$

$$= (2a-b)^2 : (-4a^2+4ab-b^2) = -(2a-b)^2 : (2a-b)^2 = -1.$$

Ответ: -1. ■

По поводу этой и других подобных задач на упрощение следует иметь в виду следующее.

В современной алгебре принято рассматривать многочлены и алгебраические дроби с двух точек зрения. В соответствии с первой из них многочлены и алгебраические дроби понимаются как формальные символы, над которыми определены некоторые операции. Например, многочлен x^2-x-2 — это просто набор его коэффициентов $(1;-1;-2)$, а дробь $\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ — это пара $(x^2-x-2; x+1)$ (на самом деле аккуратное определение дроби требует понятия фактор-множества). При такой точке зрения равенство $\dfrac{x^2-x-2}{x+1} = x-2$ верно без всяких условий; левая и правая части задают один и тот же элемент поля рациональных дробей над полем действительных чисел (хотя точный смысл этому равенству можно придать только с помощью понятия изоморфизма — опять не обойтись без сложных понятий высшей алгебры). Соответственно, в нашей задаче -1 — абсолютно правильный ответ.

В соответствии со второй точкой зрения, многочлен или другое выражение — это функция числового аргумента, заданная соответствующей формулой. В школьной математике обычно (а в случае выражений с радикалами, логарифмами и т. п. — всегда) подразумевается именно она.

Строго говоря, определение функции включает в себя область определения в качестве составной части. Поэтому, например, $y = x^2$, где $0 < x < 1$, и $y = x^2$, где $-1 < x < 1$, — это совершенно разные функции. Однако обычно в случае функций, заданных формулами, область определения не указывают, подразумевая, что функция рассматривается на так называемой естественной области определения, т. е. на множестве тех значений переменной, при которых можно выполнить все предписанные формулой действия. Иначе говоря, естественная область определения — это область допустимых значений (область существования выражения — стандартной терминологии здесь нет). При таком взгляде выражение $\frac{x^2-x-2}{x+1}$ — это функция $y = \frac{x^2-x-2}{x+1}$, $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, а выражение $x-2$ — это функция $y = x-2$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Поэтому выражения $\frac{x^2-x-2}{x+1}$ и $x-2$ различны, так как различны их (неявно подразумеваемые) области определения. Однако если второе выражение рассматривать только при $x \neq -1$, то эти выражения будут равны (так как они задают одну и ту же функцию):

$$\frac{x^2-x-2}{x+1} = x-2, \ x \neq -1.$$

Для сложных выражений найти естественную область определения иногда гораздо сложнее, чем выполнить упрощения. Поэтому часто это не делают, а проводят формальное упрощение выражения, указывая в конце, что равенство рассматривается на пересечении естественных областей определения выражений (т. е. на их общей области определения). Обычно, впрочем, не делают и этого, подразумевая соответствующие оговорки неявно. Это обычное соглашение в школьной математике (см., например, *Виленкин Н. Я.* и др. Алгебра и математический анализ для 10 кл. М.: Просвещение, 1995, с. 59, или *Макарычев Ю. Н.* и др. Алгебра: учебник для 9 кл. М.: Просвещение, 1999, с. 241).

На экзамене лучше делать хоть какие-нибудь пояснения на этот счет (в идеале нужно указать то множество, на котором установлено равенство выражений — это особенно важно при решении задач на построение графиков функций в разд. 10.1).

В нашей задаче, в частности, исходное выражение равно -1 на множестве $\{(a,b) | a, b, 3a+4b, 2a-b \neq 0\}$.

Следует отметить, что все сказанное выше о важности области определения (ОДЗ) относится к упрощению изолированных выражений. При решении уравнений, систем, неравенств ключевыми являются понятия равносильных преобразований и следствий. Для этих задач понятие ОДЗ иногда полезно, но, как правило, не нужно (а иногда и вредно, так как может привести школьника к ошибочным выводам). Понятие области определения нужно использовать лишь тогда, когда этого требует логика равносильных преобразований (если задача решается равносильными преобразованиями, а не задачами-следствиями с последующей проверкой).

Таким образом, в данной задаче можно дать несколько абсолютно верных вариантов ответа:

-1 — неявно подразумевается, что утверждается равенство элементов поля рациональных дробей;

-1 на множестве $\{(a,b)|a,b,3a+4b,2a-b\neq 0\}$ — подразумевается совпадение двух функций с явно указанной общей областью определения;

-1 при условии $a,b,3a+4b,2a-b\neq 0$ — это просто менее формальный («старомодный») вариант предыдущего ответа;

-1 — неявно подразумевается, что утверждается равенство функций, при этом в качестве общей области определения рассматривается пересечение их естественных областей определения.

Эта неоднозначность связана с неоднозначностью условия задачи. Ее можно исключить, если точнее и аккуратнее формулировать вопрос задачи. Но это может привести к тому, что условие станет настолько громоздким, что школьник не сможет его понять. Кроме того, как мы отмечали, точные формулировки требуют в ряде случаев понятий и результатов, выходящих за рамки школьной программы. Поэтому вполне допустимы вольные («жаргонные») формулировки. Экзаменаторы прекрасно понимают это и не придираются по формальным поводам.

Более того, каждый год в ходе вступительных экзаменов то на одном, то на другом факультете появляются задачи не просто с неаккуратными, а с небрежными формулировками (соответственно, условия задач, которые публикуются, например, в справочнике для поступающих в Московский университет иногда отличаются от тех, что предлагались абитуриентам). Часто необходимые уточнения вносятся в ходе устных объявлений во время экзамена. Если это выясняется после экзамена, то обычно экзаменаторы принимают любой разумный вариант ответа.

□ **26.** Перепишем неравенство в виде

$$\frac{|2b|^2+(b+1)}{2}\geqslant\sqrt{|2b|^2\cdot(b+1)},$$

так что оно сводится к неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для неотрицательных чисел $x=4b^2$ и $y=b+1$. ■

□ **36.**

1 способ. Раскрывая скобки в левой части, мы преобразуем наше неравенство к виду

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geqslant 6.$$

Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух взаимно обратных чисел, можно утверждать, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2,$$

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2,$$

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2.$$

Складывая эти неравенства почленно, мы получим желаемое неравенство.

2 способ. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}.$$

Выражение в левой части — это среднее арифметическое чисел a, b и c. Выражение в правой части называется средним гармоническим чисел a, b и c. Таким образом, наше неравенство утверждает, что среднее арифметическое больше среднего гармонического или равно ему.

Мы установим этот результат для произвольного набора положительных чисел. Прежде всего введем понятие среднего гармонического положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$; это число

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Иначе говоря, среднее гармоническое — это такое число, что обратное к нему является средним арифметическим чисел, обратных к исходным:

$$\frac{1}{h(x_1, \ldots, x_n)} = a\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right),$$

где

$$a(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

— среднее арифметическое чисел $x_1, \ldots, x_n$.

Обозначим через $g(x_1, \ldots, x_n)$ среднее геометрическое положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Поскольку

$$g\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{g(x_1, \ldots, x_n)},$$

из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\dfrac{1}{x_1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$ следует, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) \leqslant g(x_1, \ldots, x_n),$$

так что тем более верно неравенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) \leqslant a(x_1, \ldots, x_n). \quad \blacksquare$$

□ **40.** Перепишем заданные неравенства в виде $b_1 \leqslant 2\sqrt{a_1c_1}$, $b_2 \leqslant 2\sqrt{a_2c_2}$ и введем переменные $b_3 = 1$, $a_3 = 7$, $c_3 = 2$, так что верно неравенство $b_3 < 2\sqrt{a_3c_3}$. Складывая эти неравенства, получим

$$b_1 + b_2 + b_3 < 2\left(\sqrt{a_1}\sqrt{c_1} + \sqrt{a_2}\sqrt{c_2} + \sqrt{a_3}\sqrt{c_3}\right).$$

Для завершения доказательства достаточно применить неравенство Коши—Буняковского

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

к наборам

$$(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}),$$
$$(y_1, y_2, y_3) = (\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \sqrt{c_3}). \quad \blacksquare$$

□ **46.** Выделим полные квадраты в выражениях под знаками радикалов:

$$\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}}+\sqrt{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}} \geqslant \sqrt{\left(-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}+\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2}$$

и рассмотрим точки $A = (x, 0)$, $B = \left(-\frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}y}{2}\right)$, $C = \left(-\frac{z}{2}, -\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)$. Тогда доказываемое неравенство можно записать в виде

$$AB + AC \geqslant BC,$$

Если точка A не лежит на прямой BC, то в силу неравенства треугольника

$$AB + AC > BC.$$

Если точка A лежит на отрезке BC, то

$$AB + AC = BC.$$

Если точка A лежит на прямой BC, но вне отрезка BC, то одно из расстояний AB или AC больше, чем BC, так что

$$AB + AC > BC. \quad \blacksquare$$

□ **49.** Неравенство Бернулли утверждает, что

$$\sqrt{1+t} \leqslant 1 + \frac{t}{2}, \text{ если } t \geqslant -1, \tag{1}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $t = 0$. Доказательство этого неравенства элементарно — нужно возвести обе части в квадрат.

Справедливо и общее неравенство Бернулли:

$$(1+t)^\alpha \leqslant 1 + \alpha t, \text{ если } 0 < \alpha < 1, t > -1,$$

$$(1+t)^\alpha \geqslant 1 + \alpha t, \text{ если } \alpha > 1 \text{ или } \alpha < 0,\ t > -1,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $t = 0$. Его доказательство требует более сложных рассуждений (впрочем, применение производных позволяет дать относительно простое доказательство).

Запишем неравенство Бернулли (1) для $t = 4a, 4b, 4c$ и сложим эти неравенства почленно:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant 3 + 2(a+b+c) = 5. \tag{2}$$

Равенство в неравенстве Бернулли достигается только при $t = 0$. Поскольку $a + b + c = 1$, числа $4a$, $4b$, $4c$ не могут быть одновременно равны 0. Поэтому можно гарантировать, что неравенство в (2) — строгое. ■

□ **52.** Условие $x^2+y^2+z^2 > 0$ означает, что хотя бы одна из переменных отлична от нуля. Допустим, например, что $z \neq 0$.

Рассмотрим доказываемое неравенство как квадратное относительно x:

$$x^2 - 4(2y+z)x + 19y^2 + 12yz + 6z^2 > 0.$$

Оно будет выполнено при всех x (и при всех y и z), если $D < 0$ (при всех y и z). Подсчитаем дискриминант:

$$\frac{D}{4} = 4(2y+z)^2 - (19y^2 + 12yz + 6z^2) = -3y^2 + 4yz - 2z^2.$$

Этот дискриминант можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно y. Этот трехчлен будет отрицателен при всех y, если его дискриминант отрицателен (при всех z). Подсчитаем этот дискриминант:

$$\frac{D}{4} = 4z^2 - 6z^2 = -2z^2 < 0$$

(поскольку $z \neq 0$). ■

☐ **71.** Будем упрощать выражение по действиям.

1. $\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}=\dfrac{(2a-2\sqrt{2ab}+b)-(2a+2\sqrt{2ab}+b)}{2a-b}=\dfrac{4\sqrt{2ab}}{b-2a}$,

2. $\sqrt{\dfrac{b}{4a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{b-2a}{2\sqrt{ab}}$,

3. $\dfrac{4\sqrt{2ab}}{b-2a}\cdot\dfrac{b-2a}{2\sqrt{ab}}=2\sqrt{2}.$

Ответ: $2\sqrt{2}$. ■

☐ **78.** Нетрудно проверить, что

$$4+\sqrt{12}=4+2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2.$$

Поэтому

$$\sqrt{4+\sqrt{12}}=1+\sqrt{3}.$$

Аналогично,

$$\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{3}-1.$$

Значит, искомое число равно

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\Big)=\sqrt{6}.$$

Ответ: нет; это число равно $\sqrt{6}$. ■

☐ **98.**

$$31^{11}<32^{11}=\left(2^5\right)^{11}=2^{55},$$
$$17^{14}>16^{14}=\left(2^4\right)^{14}=2^{56}>2^{55}.$$

Ответ: второе число больше. ■

☐ **103.** Прежде всего с помощью формулы $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ слагаемые 1 и 2 в показателях превратим в множители 7^1 и 2^2 соответственно, так что искомое число равно

$$A\equiv 28\cdot 7^{-\sqrt[5]{\log_7^3 2}}\cdot 2^{\sqrt[5]{\log_2^2 7}}.$$

Для дальнейших упрощений перейдем к одному основанию, например 2, в степенях и логарифмах, т. е. заменим во втором множителе основание степени 7 выражением $2^{\log_2 7}$, а $\log_7 2$, стоящий в показателе, выражением $\frac{1}{\log_2 7}$. Кроме того, вместо радикалов будем использовать степени с дробными показателями:

$$A = 28 \cdot \left(2^{\log_2 7}\right)^{-\frac{1}{\log_2^{3/5} 7}} \cdot 2^{\log_2^{2/5} 7} =$$

$$= 28 \cdot 2^{-\frac{\log_2^1 7}{\log_2^{3/5} 7}} \cdot 2^{\log_2^{2/5} 7} =$$

$$= 28 \cdot 2^{-\log_2^{2/5} 7} \cdot 2^{\log_2^{2/5} 7} = 28.$$

Практически дословное повторение этих рассуждений позволяет доказать следующие логарифмические тождества:

$$a^{\log_a^x b} = b^{\log_b^y a}, \text{ если } x + y = 1,\ a, b > 1 \text{ или } 0 < a, b < 1,$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \text{ если } a, b, c > 0 \text{ и } b \neq 1,$$

которые полезно иметь в виду при решении сложных задач с логарифмами (см., например, задачи 124, 362, 637 и 125, 126, 127, 363, 364, 638).

Ответ: 28. ■

□ **105.** Перейдем во всех логарифмах к одному основанию, например 5, и обратим внимание на то, что $30 = 5 \cdot 6$, $150 = 5^2 \cdot 6$:

$$\log_5 30 \cdot \log_5 30 - \log_5 150 \cdot \log_5 6 =$$
$$= (\log_5(5 \cdot 6))^2 - \log_5(25 \cdot 6) \cdot \log_5 6 =$$
$$= (1 + \log_5 6)^2 - (2 + \log_5 6) \cdot \log_5 6 =$$
$$= 1 + 2\log_5 6 + \log_5^2 6 - 2\log_5 6 - \log_5^2 6 = 1.$$

Ответ: 1. ■

□ **142.** Применим к неравным положительным числам $a = \lg 7$ и $b = \lg 13$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом $\left(\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}\right)$:

$$\sqrt{\lg 7 \cdot \lg 13} < \frac{\lg 7 + \lg 13}{2}.$$

Правую часть этого неравенства можно оценить сверху следующим образом:

$$\frac{\lg 7 + \lg 13}{2} = \frac{\lg(7 \cdot 13)}{2} = \frac{\lg 91}{2} < \frac{1}{2} \cdot \lg 100 = \lg\sqrt{100} = \lg 10 = 1.$$

Ответ: 1 больше. ■

Решения к главе 2

□ **148.** Упростим числовые выражения, фигурирующие в уравнении:

1. $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$.

2. $\cos\left(\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})\right) \equiv \cos\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Используя тождество $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, получим: $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{9}$. В силу неравенства $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ выполнено условие $\cos\alpha > 0$. Значит, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

3. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}-1$.

4. $2^{\log_{\sqrt{2}} 3} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{\log_{\sqrt{2}} 3} = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 9} = 9$.

Теперь уравнение можно переписать в виде

$$0\cdot x = 0,$$

так что его решением является любое действительное число.

Ответ: $\mathbb{R}$. ■

□ **149.** Извлекая корни седьмой степени из обеих частей уравнения, получим

$$6x-15 = (x-1)^2.$$

Раскроем скобки, перенесем все члены в одну часть и приведем подобные члены:

$$x^2-8x+16=0.$$

Левая часть является полным квадратом:

$$x^2-8x+16=(x-4)^2,$$

так что уравнение имеет один корень $x=4$.

Ответ: $x=4$. ■

□ **150.** Рассмотрим уравнение как квадратное относительно неизвестной x; неизвестную y будем считать параметром. Это, в частности, означает, что уравнение нужно переписать в виде

$$2x^2-2(5y+1)x+(13y^2+4y+1)=0. \tag{1}$$

Для решения этого квадратного уравнения подсчитаем $\frac{D}{4}$:

$$\frac{D}{4} = (5y+1)^2 - 2\cdot(13y^2+4y+1) = -(y-1)^2. \qquad (2)$$

Если уравнение (1) имеет решение, то дискриминант должен быть неотрицателен. В силу соотношения (2) это означает, что $y = 1$.

Иначе говоря, из уравнения (1) следует, что $y = 1$:

$$2x^2 - 2(5y+1)x + (13y^2+4y+1) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$y = 1.$$

Чтобы это преобразование было равносильным, можно просто сохранить исходное уравнение:

$$2x^2 - 2(5y+1)x + (13y^2+4y+1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y = 1, \\ 2x^2 - 2(5y+1)x + (13y^2+4y+1) = 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y = 1, \\ 2x^2 - 12x + 18 = 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

Итак, наше уравнение с *двумя* неизвестными имеет *единственное* решение.

ОТВЕТ: $(3;1)$. ■

□ **153.** Самый распространенный метод решения уравнения высокой степени вида $P(x) = 0$ ($P(x)$ — многочлен) заключается в разложении многочлена $P(x)$ на два множителя меньшей степени с последующим расщеплением уравнения $P(x) = 0$ на два уравнения.

Разложение многочлена на множители обычно основано на следующей **теореме (Безу)**.

Если уравнение $P(x) = 0$ имеет корень x_0, то многочлен $P(x)$ можно разложить на множители, причем один из множителей — это $(x - x_0)$ (второй множитель обычно находят делением многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - x_0)$ «в столбик»).

После этих общих замечаний приступим к решению нашего уравнения.

Ясно, что $x_0 = 1$ — корень уравнения. Поэтому многочлен $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ можно разложить на два множителя, причем один из них равен $(x-1)$. Второй множитель можно найти делением многочлена $x^3 + 4x^2 - 5$ на двучлен $(x - 1)$ «в столбик». Но мы применим другой метод, который интересен тем, что дословное его повторение позволяет легко доказать теорему Безу:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^3 + 4x^2 - 5) - 0 = (x^3 + 4x^2 - 5) - (1^3 + 4 \cdot 1^2 - 5) = \\ &= (x^3 - 1^3) + 4(x^2 - 1^2) = (x-1)(x^2 + x + 1) = \\ &\quad + 4(x-1)(x+1) = (x-1)(x^2 + 5x + 5). \end{aligned}$$

Поэтому наше уравнение распадается на два:

$$\begin{array}{cc} x - 1 = 0 & x^2 + 5x + 5 = 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = 1 & x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}$$

Ответ: $\left\{1; \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\right\}$. ■

□ **159.**

1 способ. Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Чтобы решить это уравнение, разложим левую часть на множители. Применить теорему Безу не удастся, так как это уравнение не имеет рациональных корней. Поэтому применим метод неопределенных коэффициентов.

Вид уравнения подсказывает, что, видимо, левую часть уравнения можно разложить на два квадратичных множителя[1]. При этом разумными представляются только следующие гипотезы:

а) $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = (x^2 + ax + 2)(x^2 + bx - 2)$;
б) $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 4)$;
в) $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = (x^2 + ax + 4)(x^2 + bx - 1)$,

где a и b — *неопределенные коэффициенты.*

[1] В высшей алгебре доказывается теорема о том, что любой многочлен $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ можно разложить и притом единственным способом в произведение старшего коэффициента a_0, линейных множителей вида $x - x_0$ (их число равно числу корней уравнения $P(x) = 0$ с учетом их кратности) и квадратичных множителей $x^2 + px + q$ с отрицательными дискриминантами.

Проверим первую из них. Раскроем скобки в левой части, приведем подобные члены и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} a+b=6, \\ ab=8, \\ -2a+2b=-4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $a=4$, $b=2$. Поэтому наше уравнение расщепляется на два квадратных уравнения

$$x^2+4x+2=0 \quad \text{и} \quad x^2+2x-2=0,$$

которые легко решаются.

Отметим, что вторая и третья гипотезы приводят к несовместным системам относительно неопределенных коэффициентов a и b. Поэтому если бы мы начали с рассмотрения одной из них, то первая попытка разложения на множители не удалась. Ничего страшного в этом нет; нужно просто перейти к рассмотрению следующей гипотезы.

2 способ. Введем новую неизвестную

$$t=x^2+3x-2. \tag{1}$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$t^2+3t-2=x. \tag{2}$$

Система из уравнений (1) и (2), в сущности, равносильна исходному уравнению, так как оно получится, если в этой системе исключить неизвестную t.

Чтобы решить систему, состоящую из уравнений (1) и (2), мы сложим эти уравнения почленно (для равносильности этого преобразования нужно сохранить одно из уравнений, например, первое):

$$\begin{cases} t^2+4t-2=x^2+4x-2, \\ t=x^2+3x-2. \end{cases}$$

В первом уравнении перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители методом группировки:

$$(t^2-x^2)+(4t-4x)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(t-x)(t+x)+4(t-x)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(t-x)(t+x+4)=0.$$

Поэтому первое уравнение распадется на два:

$$t - x = 0, \qquad t + x + 4 = 0.$$

Соответственно, вся система распадется на две системы

$$\begin{cases} t = x, \\ t = x^2 + 3x - 2, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} t = -x - 4, \\ t = x^2 + 3x - 2, \end{cases}$$

Исключая t, мы получим те же уравнения

$$x^2 + 2x - 2 = 0, \qquad x^2 + 4x + 2 = 0,$$

которые появились при первом способе решения нашей задачи.

ОТВЕТ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$. ■

□ **160.**

1 способ. Выделим полный квадрат во второй скобке:

$$8x \cdot (2x^2 - 1) \cdot \big(2(2x^2 - 1)^2 - 1\big) = 1.$$

Выражение вида $2x^2-1$ встречается в тригонометрии — так устроена правая часть известной формулы $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Поэтому естественно попытаться заменить x на $\cos\alpha$. Конечно, сделать это можно только, если мы уверены, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Обычно информацию такого рода извлекают из области допустимых значений неизвестной, но в нашем случае возможные значения x заполняют всю числовую прямую. В высшей алгебре имеются определенные неравенства для корней алгебраического уравнения (самые простые из них — в терминах его коэффициентов), но от них мало пользы, в частности, потому, что в соответствии с Программой по математике для поступающих в МГУ «объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, ... могут использоваться поступающим ... при условии, что он способен их пояснять и доказывать».

Однако, хотя из уравнения не удается получить неравенство $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (не удается простыми рассуждениями; ниже мы покажем, что на самом деле все корни нашего уравнения расположены на интервале $(-1; 1)$), условие задачи («найти число корней на отрезке $[0; 1]$») позволяет обойти эту проблему.

Эти общие соображения приводят к следующему решению задачи.

Каждому значению x из отрезка $[0;1]$ соответствует и притом только одно значение t из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $x = \cos t$ (отметим, что $t = \arccos x$).

Для новой переменной наша задача после несложных тригонометрических преобразований примет такой вид: сколько корней на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет уравнение

$$8\cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t = 1?$$

Поскольку $t = 0$ не является корнем этого уравнения, а на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ выполнено условие $\sin t \neq 0$, задачу можно преобразовать к следующему виду: сколько корней на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет уравнение

$$8\cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t \cdot \sin t = \sin t?$$

Последнее уравнение легко преобразуется:

$$\sin 8t = \sin t \Leftrightarrow 2\cos\frac{9t}{2}\sin\frac{7t}{2} = 0,$$

после чего расщепляется на два уравнения: $\cos\frac{9t}{2} = 0$ и $\sin\frac{7t}{2} = 0$. Решение первого из них дается формулой

$$t = \frac{\pi(2n+1)}{9}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а второго — формулой

$$t = \frac{2\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из первой серии ответов в промежуток $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ попадают только корни $\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, а из второй — только один корень $\frac{2\pi}{7}$.

Проведенные рассуждения практически не меняются, если мы будем находить корни исходного уравнения на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Поскольку $x = -1$ не является корнем, дело сведется к отбору корней двух последних тригонометрических уравнений, попадающих в интервал $0 < t < \pi$. Первая серия даст значения $t_1 = \frac{\pi}{9}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$, $t_3 = \frac{5\pi}{9}$, $t_4 = \frac{7\pi}{9}$, а вторая — значения $t_5 = \frac{2\pi}{7}$, $t_6 = \frac{4\pi}{7}$, $t_7 = \frac{6\pi}{7}$. Поскольку уравнение седьмой степени не может иметь больше семи корней, число корней исходного уравнения в точности равно 7 и все они лежат в интервале $-1 < x < 1$.

Изложенный выше метод применяется при решении и других алгебраических задач (уравнений, неравенств, систем и т. д.), в которых появляются выражения, по своей структуре похожие на формулы тригонометрии. Среди наиболее распространенных отметим выражения $\sqrt{1-x^2}$ $(|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha})$, $3x-4x^3$ $(\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$, $\dfrac{2x}{1-x^2}$ $\left(\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)$, x^2+y^2 $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$.

2 способ. Начнем решать наше уравнение стандартным методом — раскроем скобки, перенесем все члены в левую часть и приведем подобные:

$$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x - 1 = 0.$$

Введем новую неизвестную $t = 2x$. Это позволит уменьшить коэффициенты многочлена в левой части:

$$t^7 - 6t^5 + 10t^3 - 4t - 1 = 0. \qquad (1)$$

Нас интересуют корни этого уравнения на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2$.

Чтобы понизить степень уравнения (1), применим стандартные приемы. Прежде всего, попробуем найти какой-нибудь рациональный корень. Известно, что если несократимая дробь $\dfrac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, то n — делитель свободного члена, а m — делитель старшего коэффициента. В нашем случае это означает, что на роль рациональных корней могут претендовать только числа 1 и -1. Проверка показывает, что $t = 1$ — корень. Тогда левую часть уравнения (1) можно разложить на множители, причем один из них равен $t-1$. Второй множитель можно получить делением левой части уравнения (1) на двучлен $t-1$ в столбик; он равен $t^6+t^5-5t^4-5t^3+5t^2+5t+1$. Этот многочлен не имеет рациональных корней, но методом неопределенных коэффициентов его можно разложить на два множителя: t^3+t^2-2t-1 и t^3-3t-1.

Итак, уравнение (1) распадается на три уравнения

$$t-1=0, \qquad t^3+t^2-2t-1=0, \qquad t^3-3t-1=0.$$

Первое из них дает найденный ранее рациональный корень $t = 1$. Второе и третье уравнение решим графически. Поскольку $t = 0$ не является корнем этих уравнений, их можно переписать в виде

$$t^2 + t = 2 + \frac{1}{t}, \ t^2 = 3 + \frac{1}{t}.$$

При $t \in (0; 2]$ левые части двух уравнений монотонно возрастают от 0 до 6 и 4 соответственно, а правые части убывают от $+\infty$ до $\frac{5}{2}$ и $\frac{7}{2}$ соответственно. Поэтому каждое из этих уравнений имеет по одному корню на промежутке $(0; 2]$ (более тонкий анализ графиков позволяет установить, что каждое из этих уравнений имеет по одному корню на интервале $(-2; -1)$ и по одному корню на интервале $(-1; 0)$). Поскольку система, составленная из этих уравнений, несовместна, эти корни различны. Кроме того, они не совпадают с корнем $t = 1$.

ОТВЕТ: три корня: $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$, $\quad x_2 = \cos\frac{2\pi}{7}$, $\quad x_3 = \frac{1}{2}$. ■

□ **167.** Прежде всего отметим, что коэффициент $a \neq 0$, так как иначе графиком функции $y(x)$ была бы прямая и две прямые пересекались бы ровно в трех точках.

Далее, прямая, о которой идет речь в тексте задачи, не может быть вертикальной, с уравнением $x = x_0$, так как тогда функция $y(x)$ в точке x_0 принимала бы три значения (а каждая функция по определению однозначна). Поэтому уравнение прямой имеет вид $y = Ax + B$. Она пересекает ось ординат в точке $(0; B)$ и задача поэтому сводится к доказательству того, что $B = 0$.

Условие задачи означает, что система

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx + c, \\ y = Ax + B \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно три различных решения $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$. В силу однозначности функции $y(x)$ числа x_1, x_2, x_3 различны, а среди чисел y_1, y_2, y_3 могут быть совпадающие.

Исключая в системе (1) неизвестную y, мы получим, что уравнение

$$ax^3 + (b - A)x + (c - B) = 0$$

имеет три различных корня x_1, x_2, x_3 (эти числа — абсциссы точек $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, являющихся решениями системы (1)). Из теоремы Виета для уравнения третьей степени (ниже мы дадим ее точную формулировку и доказательство) следует, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Тогда в силу второго уравнения системы (1)

$$y_1 + y_2 + y_3 = A(x_1 + x_2 + x_3) + 3B = 3B.$$

Следовательно,
$$B = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 0. \qquad \blacksquare$$

При решении задачи 167 мы использовали теорему Виета для уравнения третьей степени (кубического уравнения). Сейчас мы дадим ее точную формулировку (в рассматриваемой специфической ситуации) и простое доказательство, не использующее других результатов для многочленов.

Теорема Виета. *Если кубическое уравнение*
$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1}$$
имеет три (различных) корня x_1, x_2, x_3, *то для его коэффициентов верны равенства*
$$\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2 + x_3),\\ q &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\ r &= -x_1x_2x_3. \end{aligned} \tag{2}$$

$\square$ Тот факт, что числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения (1) означает, что если их подставить в уравнение, то мы получим верные числовые равенства:
$$\begin{cases} x_1^3 + px_1^2 + qx_1 + r = 0,\\ x_2^3 + px_2^2 + qx_2 + r = 0,\\ x_3^3 + px_3^2 + qx_3 + r = 0. \end{cases}$$
Рассмотрим эти равенства как систему трех уравнений относительно трех неизвестных p, q, r и решим ее методом исключения.

Из первого уравнения выразим r:
$$r = -(x_1^3 + px_1^2 + qx_1).$$
Тогда второе и третье уравнения превратятся в следующую систему для p и q:
$$\begin{cases} (x_2^3 - x_1^3) + p(x_2^2 - x_1^2) + q(x_2 - x_1) = 0,\\ (x_3^3 - x_1^3) + p(x_3^2 - x_1^2) + q(x_3 - x_1) = 0. \end{cases}$$
Поскольку разности $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$ отличны от нуля, эту систему можно привести к виду
$$\begin{cases} (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + p(x_1 + x_2) + q = 0,\\ (x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2) + p(x_1 + x_3) + q = 0. \end{cases}$$
Из первого уравнения этой системы выразим q:
$$q = -(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + p(x_1 + x_2)).$$

Тогда второе уравнение превратится в уравнение с одной неизвестной p:

$$x_1x_3 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2^2 + p(x_3 - x_2) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_3 - x_2) + p(x_3 - x_2) = 0.$$

Поскольку $x_3 - x_2 \neq 0$, отсюда следует первое из равенств (2). Восстанавливая исключенные неизвестные q и r, мы получим второе и третье равенства. ■

□ **172.** Выполним действия над дробями в левой части:

$$\frac{9x+9}{(x+1)(x+3)} = 3,$$

и сократим дробь на $x+1$. Чтобы получить задачу, равносильную исходной, вообще говоря, необходимо сохранить условие $x + 1 \neq 0$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x+3} = 1, \\ x + 1 \neq 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases} 3 = x + 3, \\ x + 3 \neq 0, \\ x + 1 \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет единственный корень $x = 0$, который удовлетворяет условиям $x + 3 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$.

Ответ: $x = 0$. ■

□ **175.** Поскольку $[x] + \{x\} = x$, уравнение можно переписать в виде

$$x = \{10x\}.$$

Введем новую неизвестную $t = 10x$. Для нее наше уравнение примет вид

$$\frac{t}{10} = \{t\}.$$

Это уравнение проще исходного, так как дробная часть берется от более простого выражения.

Будем решать его графически (см. рис.1).

График левой части — это прямая линия, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(10; 1)$. График правой части — это периодическая функция с периодом $T = 1$, которая на промежутке $n \leqslant t < n+1$ задается уравнением $y = t - n$.

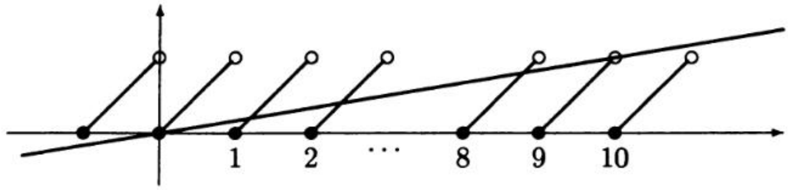

Рис. 1

Из рисунка ясно, что наше уравнение имеет девять корней $t_0, \ldots, t_8$. Корень t_n, $n = 0,1,\ldots,8$, образуется при пересечении прямых $y = \frac{t}{10}$ и $y = t - n$. Поэтому $t_n = \frac{10n}{9}$. Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим ответ.

Формальный вариант этого решения заключается в следующем. Уравнение

$$\frac{t}{10} = \{t\} \tag{1}$$

равносильно бесконечной совокупности систем

$$\begin{cases} n \leqslant t < n+1, \\ \frac{t}{10} = t - n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Уравнение $\frac{t}{10} = t - n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ имеет единственный корень $t_n = \frac{10n}{9}$. Это число будет корнем уравнения (1) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$n \leqslant \frac{10n}{9} < n+1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} n \geqslant 0, \\ n < 9 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$n = 0,1,\ldots,8.$$

Ответ: $x_n = \frac{n}{9}$, $n = 0,1,\ldots,8$. ■

□ **184.** Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2x - 1 = x^2 - 2x + 1$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

Поскольку первый шаг решения (возведение в квадрат), вообще говоря, не является равносильным преобразованием, возможно появление «лишних» корней и поэтому необходима проверка.

Проверка.

1. $x = 2 + \sqrt{2}$.

При подстановке числа $2 + \sqrt{2}$ вместо неизвестной в исходное уравнение мы получим:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Поскольку $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$ и $1 + \sqrt{2} > 0$, это числовое равенство истинно, так что $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ — корень исходного уравнения.

2. $x = 2 - \sqrt{2}$.

При подстановке числа $2 - \sqrt{2}$ вместо неизвестной в исходное уравнение мы получим:

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}. \tag{1}$$

Поскольку $3-2\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^2$ и $1-\sqrt{2} < 0$, $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$. Поэтому числовое равенство (1) — ложно, так что $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ не является корнем исходного уравнения.

Чтобы не делать проверку, уравнение нужно решать равносильными преобразованиями:

$$\sqrt{2x - 1} = x - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 2x - 1 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0, \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{2}, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Значение $x = 2 + \sqrt{2}$, очевидно, удовлетворяет условию $x \geqslant 1$, а $x = 2 - \sqrt{2}$ — нет.

Отметим, что второй способ решения задачи (равносильными преобразованиями) не убирает проверку полностью, а лишь заменяет *полную* проверку — *ослабленной* (проверкой условия $x \geqslant 1$).

Третий способ решения — один из самых удобных для решения задач с радикалами (особенно неравенств).

Введем новую неизвестную $t = \sqrt{2x-1}$. Поскольку мы ввели новую неизвестную, старую нужно выразить через новую:

$$x = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{\sqrt{2x-1}+1}{2} = \frac{t^2+1}{2}.$$

Этот вывод обычно проводят формально, возводя в квадрат обе части равенства $t = \sqrt{2x-1}$.

Для новой неизвестной исходное уравнение примет вид:

$$t = \frac{t^2+1}{2} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$t^2 - 2t - 1 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$t = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное уравнение расщепляется на два уравнения:

$$\sqrt{2x-1} = 1+\sqrt{2} \qquad \text{и} \qquad \sqrt{2x-1} = 1-\sqrt{2}.$$

Поскольку число $1+\sqrt{2}$ — положительно, первое уравнение равносильно уравнению

$$2x-1 = (1+\sqrt{2})^2,$$

откуда $x = 2+\sqrt{2}$.

Второе уравнение не имеет корней, так как число $1-\sqrt{2}$ — отрицательное.

Описанный метод работает всегда, когда под знаком радикала стоит линейное выражение.

Ответ: $x = 2+\sqrt{2}$. ■

□ **210.** Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x + 2\sqrt{x^3+2x^2} + x^2 + 2x = (x+1)^3. \tag{1}$$

Для равносильности произведенного преобразования необходимо сохранить условия

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2+2x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

(иначе говоря, исходное уравнение равносильно системе, составленной из уравнения (1) и неравенств (2)).

Уравнение (1) после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид

$$2\sqrt{x^3+2x^2} = x^3+2x^2+1.$$

Решать его проще введением новой неизвестной $t=\sqrt{x^3+2x^2}$:

$$2t = t^2+1$$
$$\Updownarrow$$
$$t^2-2t+1=0$$
$$\Updownarrow$$
$$t=1$$

Поэтому уравнение (1) равносильно уравнению

$$\sqrt{x^3+2x^2}=1,$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$x^3+2x^2-1=0. \qquad (3)$$

Чтобы решить уравнение (3), разложим его левую часть на множители. Для этого, прежде всего, попробуем угадать хотя бы один корень этого уравнения.

Если это уравнение имеет целые корни, то они обязаны быть делителями свободного члена, т. е. на роль целых корней могут претендовать только числа 1 и -1. Подстановкой убеждаемся, что $x=-1$ — корень.

В силу теоремы Безу левую часть уравнения (3) можно разложить на множители, причем одним из множителей будет $x+1$. Второй множитель можно получить, например, делением многочлена x^3+2x^2-1 на $x+1$ в столбик, что дает x^2+x-1.

Итак, уравнение (3) распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} x+1=0 & x^2+x-1=0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x=-1 & x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}$$

Условиям (2) удовлетворяет только $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. ■

□ **234.** Поскольку под радикалами стоят линейные выражения, от одного радикала можно избавиться, обозначив его новой буквой. Пусть, например, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $x = t^3$ и уравнение примет вид

$$t + \sqrt[3]{\frac{t^3 - 1}{2}} = 1.$$

Изолируя радикал и возводя обе части в куб, получим:

$$\sqrt[3]{\frac{t^3 - 1}{2}} = 1 - t$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{t^3 - 1}{2} = (1 - t)^3$$
$$\Updownarrow$$
$$(t - 1)(t^2 + t + 1) + 2(t - 1)^3 = 0 \Updownarrow$$
$$3(t - 1)(t^2 - t + 1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$t = 1$$

(так как дискриминант квадратного трехчлена $t^2 - t + 1$ отрицателен, вторая скобка не может быть равна нулю).

Значит, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{x} = 1,$$

которое имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: $x = 1$. ■

□ **239.**

1 способ (графический). Поскольку функции в левой и правой частях уравнения довольно простые, мы будем решать уравнение графически. График левой части — это стандартный график $y = \sqrt{x}$. Правую часть удобно преобразовать выделением полного квадрата к виду $y = -(x-4)^2+1$, так что ее график — это стандартная парабола $y = x^2$, сдвинутая на 4 вправо, отраженная относительно оси Ox вниз и затем сдвинутая на 1 вверх.

Эти графики изображены на рис. 2. Из рисунка ясно, что графики не пересекаются (они расположены в непересекающихся областях координатной плоскости).

2 способ (метод оценок). Выделяя полный квадрат в правой части, перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x} + (x - 4)^2 = 1.$$

Оба слагаемых в левой части неотрицательны. Поэтому их сумма может быть равна 1 только в случае, когда они не

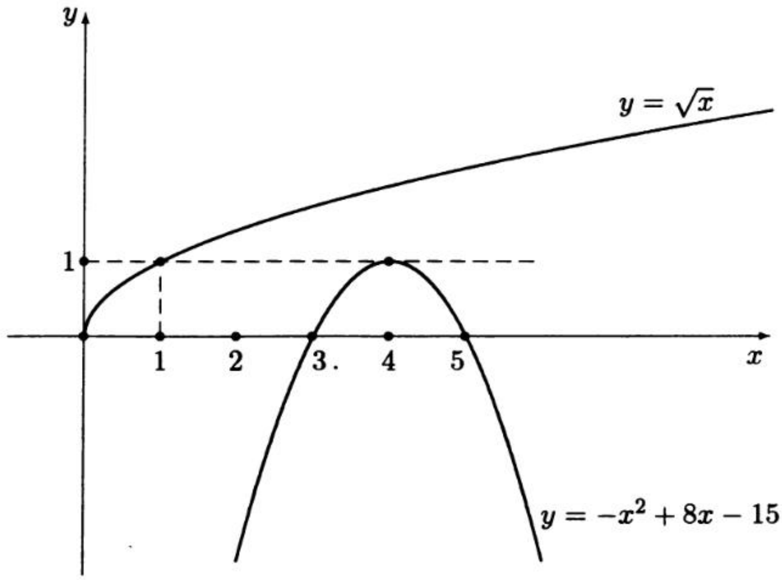

Рис. 2

превосходят 1:

$$\begin{cases}\sqrt{x} \leqslant 1,\\ (x-4)^2 \leqslant 1.\end{cases}$$

Эта система легко решается:

$$\begin{cases}0 \leqslant x \leqslant 1\\ -1 \leqslant x-4 \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \leqslant x \leqslant 1\\ 3 \leqslant x \leqslant 5\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$ ■

□ **245.** Введем в рассмотрение функцию $f(x) = 7x - 5|x - 1|$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$f(x) = f(\sqrt{2x+8}). \qquad (1)$$

Функция $f(x)$ при $x \geqslant 1$ задается формулой $f(x) = 2x+5$, а при $x \leqslant 1$ — формулой $f(x) = 12x-5$. Поэтому при изменении независимой переменной x от $-\infty$ до 1 функция $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до 7, а при изменении x от 1 до $+\infty$ значения $f(x)$ возрастают от 7 до $+\infty$. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 1$, отсюда следует, что $f(x)$ строго возрастает на всей числовой прямой (см. рис. 3, где приведен график $f(x)$).

Поэтому уравнение (1) равносильно уравнению

$$x = \sqrt{2x+8},$$

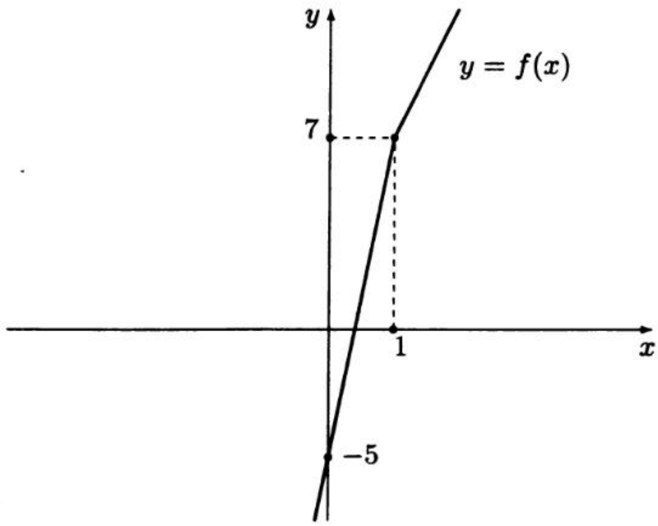

Рис. 3

которое легко решается, например, возведением в квадрат:

$$x = \sqrt{2x+8}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x^2 = 2x+8 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x = 4; -2 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 4.$$

ОТВЕТ: $x = 4$. ■

□ **250.** Для сокращения записей при последующих преобразованиях введем новые переменные

$$a = \sqrt{x}, \quad b = \sqrt{2-x}.$$

Отметим, что $a, b > 0$.

Тогда исходное уравнение примет вид

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)(a+b) = 8.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = 6. \qquad (1)$$

Обращая внимание на наличие взаимно обратных положительных чисел, применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом к каждой из трех скобок в левой части уравнения (1):

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2,$$

$$b + \frac{1}{b} \geqslant 2,$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Складывая эти неравенства почленно, мы получим, что

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 6, \qquad (2)$$

причем, если хотя бы в одном из трех использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $>$, а не $\geqslant$, то и в неравенстве (2) будет стоять знак $>$. Поэтому равенство (1) равносильно тому, что в этих неравенствах стоит знак $=$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ \dfrac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{2-x} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$. ■

□ **256.** Введем два трехмерных вектора:

$$\overrightarrow{u} = (2; 3; 6), \quad \overrightarrow{v} = (\sqrt{x+7}; \sqrt{37-2x}; \sqrt{3x+93}).$$

Тогда левую часть нашего уравнения можно рассматривать как скалярное произведение $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Найдем длины этих векторов:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7,$$
$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(x+7) + (37-2x) + (3x+93)} = \sqrt{2x+137}.$$

Поэтому исходное уравнение можно переписать в виде

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|.$$

Поскольку оба вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ — ненулевые, это означает, что угол между ними равен нулю, что, в свою очередь, равносильно существованию положительного числа k такого, что $\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{u}$, или в координатной форме:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = 2k, \\ \sqrt{37-2x} = 3k, \\ \sqrt{3x+93} = 6k. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $(x; k) = (5; \sqrt{3})$.

Наше решение фактически содержит доказательство неравенства Коши—Буняковского для трехмерных векторов. Решение можно сократить, если сослаться на неравенство Коши—Буняковского, что позволяет сразу перейти к последней системе.

Ответ: $x = 5$. ■

□ **257.** Перейдем к одному основанию 3:

$$\left(3^{-1}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+5} = \left(3^3\right)^{-1}.$$

С помощью свойств степеней выполним над показательными блоками «хорошие» действия (умножение и возведение в степень):

$$3^{-x^2+2x+5} = 3^{-3}.$$

Так как основание — положительное число, не равное 1, это уравнение равносильно уравнению

$$-x^2 + 2x + 5 = -3$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 1 \pm 3 = 4; -2.$$

Ответ: $\{-2; 4\}$. ■

□ **273.** В правой части над показательными блоками производится «плохое» действие — сложение, которое нельзя выполнить (в том смысле, что нет простого соотношения вида $a^x + a^y = a^{f(x,y)}$). Обычно такие показательные уравнения решаются с помощью метода введения новой неизвестной.

Перед тем как вводить новую неизвестную, уравнение нужно преобразовать так, чтобы неизвестная x была в составе одного и того же повторяющегося блока:

$$(5^x)^2 = 23 \cdot 5^x + 50.$$

Если обозначить 5^x через t, то уравнение примет вид

$$t^2 - 23t - 50 = 0.$$

Оно имеет два корня: $t_1 = 25$ и $t_2 = -2$. Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения

$$\begin{array}{cc} 5^x = 25 & 5^x = -2 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = 2 & \varnothing. \end{array}$$

Объединяя множества решений этих уравнений, получим ответ задачи.

Ответ: $x = 2$. ■

□ **313.** Приведем логарифмы к одному основанию, скажем, 3:

$$1 + \frac{1}{2}\log_3(x+1)^2 = \log_3(3x+9).$$

Выполнит требуемые «хорошие» действия (умножение на числовой коэффициент и сложение) над логарифмами (при этом число 1 в левой части уравнения нужно превратить в $\log_3 3$):

$$\begin{gathered} \log_3 3 + \log_3\sqrt{(x+1)^2} = \log_3(3x+9) \\ \Updownarrow \\ \log_3(3|x+1|) = \log_3(3x+9) \\ \Updownarrow \\ \begin{cases} 3|x+1| = 3x+9 \\ 3x+9 > 0 \end{cases} \\ \Updownarrow \\ \begin{cases} |x+1| = x+3 \\ x+3 > 0. \end{cases} \end{gathered}$$

Последняя система расщепляется на две:

$$\begin{array}{cc} \begin{cases} x+1 = x+3 \\ x+3 > 0 \end{cases} & \begin{cases} x+1 = -(x+3) \\ x+3 > 0 \end{cases} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \varnothing & x = -2. \end{array}$$

Ответ: $x = -2$. ■

□ **345.** В левой части над логарифмом производятся «плохое» действие — возведение в квадрат, которое нельзя выполнить (в том смысле, что нет простого соотношения вида $\log_a^2 x = \log_a f(x)$). Обычно такие логарифмические уравнения решаются с помощью метода введения новой неизвестной.

Перед тем как вводить новую неизвестную, уравнение нужно преобразовать так, чтобы неизвестная x была в составе одного и того же повторяющегося блока. Для этого перейдем в логарифмах к одному основанию 2 и превратим оба логарифма в $\log_2 x$:

$$(\log_2 x)^2 = 5\log_2 x - 4.$$

Если обозначить $\log_2 x$ через t, то уравнение примет вид

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Оно имеет два корня: $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$. Поэтому исходное уравнение распадается на два:

$$\begin{array}{cc} \log_2 x = 1 & \log_2 x = 4 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = 2 & x = 16. \end{array}$$

Объединяя множества решений этих уравнений, получим ответ задачи.

ОТВЕТ: $x_1 = 2$; $x_2 = 16$. ■

□ **379.**

1 способ. Поскольку линейная функция имеет вид $f(x) = kx+b$, задачу можно переформулировать следующим образом:существуют ли числа k и b такие, что при всех x верно равенство

$$2\cdot(k\cdot(x+2)+b)+(k\cdot(4-x)+b) = 2x+5,$$

или, что то же самое, равенство

$$kx + 8k + 3b = 2x + 5?$$

Поскольку два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной, задача примет такой вид: существуют ли числа k и b такие, что верны равенства

$$\begin{cases} k = 2, \\ 8k + 3b = 5? \end{cases} \tag{1}$$

В этом виде задача просто сводится к вопросу о совместности системы (1). Легко видеть, что эта система имеет, и притом единственное, решение $k = 2$, $b = -\dfrac{11}{3}$. Итак, существует и притом единственная линейная функция $f(x) = 2x - \dfrac{11}{3}$, удовлетворяющая исходному функциональному уравнению.

Подобный метод применим для решения и других функциональных уравнений, когда нужно найти решение в классе функций, описываемых несколькими числовыми параметрами.

2 способ. Хотя задача решена, возникает естественный вопрос: существуют ли другие функции $f(x)$ (не обязательно линейные), удовлетворяющие исходному функциональному уравнению?

Для ответа на этот вопрос решим наше функциональное уравнение в общем виде.

Для этого прежде всего заменим x на $x-2$. Тогда уравнение примет вид:

$$2f(x) + f(6-x) = 2x + 1 \qquad \text{при всех } x.$$

Заменим в этом равенстве x на $6-x$:

$$2f(6-x) + f(x) = -2x + 13 \qquad \text{при всех } x.$$

Исключая из этих равенств $f(6-x)$, получим:

$$f(x) = 2x - \frac{11}{3}.$$

Простая проверка показывает, что эта функция действительно удовлетворяет исходному функциональному уравнению.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, применяются при решении функциональных уравнений, когда нет никакой информации о виде неизвестной функции.

ОТВЕТ: да, $f(x) = 2x - \dfrac{11}{3}$. ■

□ **386.** Решим исходное функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{при всех } x, y \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Прежде всего отметим, что функции вида $f(x) = kx$ (прямые пропорциональности) удовлетворяют этому уравнению. Докажем, что никаких других решений уравнение (1) не имеет.

Положим в (1) $y = x$. Это даст следующее соотношение:

$$f(2x) = 2f(x) \qquad \text{при всех } x \in \mathbb{Q}.$$

Используя это равенство, из (1) при $y = 2x$ получим:

$$f(3x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x) \quad \text{при всех } x \in \mathbb{Q}.$$

Аналогично, при $y = 3x$ из (1) имеем:

$$f(4x) = f(x) + f(3x) = f(x) + 3f(x) = 4f(x) \quad \text{при всех } x \in \mathbb{Q}.$$

Повторяя эту процедуру получим, что для любого натурального n верно равенство (при $n = 1$ оно является тождеством):

$$f(nx) = nf(x) \qquad \text{при всех } x \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Строго это можно доказать методом математической индукции. Справедливость равенства (2) при $n = 1$ (основание индукции) уже установлена. Допустим, что (2) доказано для некоторого натурального k; докажем его справедливость для значения $n = k + 1$:

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x).$$

Теперь докажем, что на самом деле верно соотношение

$$f(rx) = rf(x) \qquad \text{при всех } x \in \mathbb{Q}, \tag{3}$$

где r — произвольное рациональное число.

Рассмотрим исходное функциональное уравнение (1) при $y = 0$:

$$f(x) = f(x) + f(0).$$

Отсюда следует, что $f(0) = 0$. Поэтому соотношение (3) справедливо для $r = 0$.

Теперь в равенстве (2) положим $x = \dfrac{t}{n}$:

$$f(t) = nf\left(\frac{t}{n}\right),$$

откуда $f\left(\dfrac{t}{n}\right) = \dfrac{1}{n}f(t)$, так что соотношение (3) справедливо для $r = \dfrac{1}{n}$. Если в этом равенстве положить $t = mx$, то, используя (2), мы получим:

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{1}{n}mf(x) = \frac{m}{n}f(x),$$

т. е. формула (3) справедлива для любого неотрицательного рационального r.

И наконец, при $y = -x$ уравнение (1) примет вид

$$f(0) = f(x) + f(-x),$$

откуда $f(-x) = -f(x)$, так что (ниже $r > 0$)

$$f(-rx) = -f(rx) = -rf(x).$$

Итак, равенство (3) справедливо для всех рациональных r (и x). В частности, при $x = 1$ формула (3) даст

$$f(r) = rf(1).$$

Если обозначить $f(1)$ через k, а вместо переменной r использовать переменную x, то это соотношение можно записать в виде

$$f(x) = kx. \tag{4}$$

Таким образом, если функция $f(x)$ является решением уравнения (1), то она задается формулой (4).

Теперь займемся нашей задачей. Так как

$$f(10) = k \cdot 10,$$

мы можем определить коэффициент пропорциональности k: $k = -\frac{\pi}{10}$. Поэтому $f(x) = -\frac{\pi}{10} \cdot x$ для рациональных x и, в частности,

$$f\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{\pi}{10} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{\pi}{35}.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{35}$ $\left(f(x) = -\frac{\pi}{10}x\right.$ для рациональных $\left.x\right)$. ■

□ **390.** Исходное функциональное уравнение является неоднородным («лишним» является член $80xy$ в правой части). В соответствии с общей идеологией решения уравнений превратим его в однородное. Для этого найдем частное решение уравнения. Имея в виду сходство нашего уравнения с тождеством сокращенного умножения $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, нетрудно догадаться, что $f_0(x) = 40x^2$ является решением.

Теперь введем новую неизвестную функцию $g(x) = f(x) - f_0(x)$. Для нее исходное функциональное уравнение примет вид

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}.$$

В частности, это уравнение выполнено при всех рациональных x, y. Как было установлено при решении задачи 386, $g(x) = kx$ $(x \in \mathbb{Q})$. Поэтому можно утверждать, что $f(x) = 40x^2 + kx$ при рациональных x. Условие $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ позволяет определить коэффициент k; он равен -2, так что $f(x) = 40x^2 - 2x$ $(x \in \mathbb{Q})$. В частности,

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 40 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 24.$$

ОТВЕТ: $f\left(\frac{4}{5}\right) = 24$; при рациональных x верно равенство

$$f(x) = 40x^2 + kx,$$

где $k = -2$. ■

□ **391.** Докажем, что $f(x)$ является инъекцией, т. е. что из равенства следует $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$. Действительно, если $f(x_1) = f(x_2)$, то

$$x_1 = f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) = x_2.$$

Если x_1, x_2 — корни уравнения $f(f(x)) = 0$, то $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, а тогда из доказанной инъективности функции $f(x)$ следует, что $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 = x_2$. Таким образом, уравнение $f(f(x)) = 0$ не может иметь больше одного корня.

Теперь подставим в исходное функциональное уравнение вместо x число 0: $f(0) = f(f(0))$. В силу доказанной инъективности функции $f(x)$ отсюда следует, что $0 = f(0)$, а тогда $f(f(0)) = f(0) = 0$, т. е. число 0 является корнем уравнения $f(f(x)) = 0$.

ОТВЕТ: $x = 0$. ■

Решения к главе 3

□ **396.** Область определения функции — это множество решений системы, составленной из ограничений, накладываемых формулой, которая задает функцию. В нашем случае выполнимы не всегда такие два действия.

1. Извлечение корня. Эта операция требует неотрицательности подкоренного выражения:
$$x^2 - x - 2 \geqslant 0.$$
2. Логарифмирование. Эта операция требует, чтобы число, от которого берется логарифм, было положительным, а основание логарифма было положительно и не равнялось 1:
$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ 3 + x > 0, \\ 3 + x \neq 1. \end{cases}$$

Итак, найти область определения нашей функции — это значит решить систему
$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ 9 - x^2 > 0, \\ 3 + x > 0, \\ 3 + x \neq 1. \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 2, \\ -3 < x < 3, \\ x > -3, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Теперь нужно изобразить эти множества на числовой оси и найти их пересечение.

ОТВЕТ: $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; 3)$. ■

□ **403.** Поскольку выражение $x^2 + 2$ (знаменатель дроби в левой части неравенства) всегда положительно, данное неравенство равносильно квадратичному неравенству

$$3x \geqslant x^2 + 2$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Ответ: $[1; 2]$. ■

□ **407.** Разложим числитель дроби в левой части неравенства на линейные множители:
$$\frac{(x+4)(x-2)}{x+4} \leqslant 1.$$

Сократим общий множитель $x + 4$. Для равносильности этого преобразования необходимо сохранить условие $x + 4 \neq 0$:

$$\begin{cases} x - 2 \leqslant 1, \\ x + 4 \neq 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 3] \setminus \{-4\}$. ■

□ **414.** Упростим дробь в левой части неравенства:

$$\frac{1}{\frac{x+1}{x}} \leqslant 2$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} \leqslant 2, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

(условие $x \neq 0$ вытекает из исходного неравенства и необходимо для обратимости сделанного преобразования).

Первое неравенство этой системы решим методом интервалов:

$$\frac{x}{x+1} - 2 \leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{x+2}{x+1} \geqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x \leqslant -2 \text{ или } x > -1.$$

Учитывая условие $x \neq 0$, получим ответ.

ОТВЕТ: $(-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. ■

□ **427.** Введем новую неизвестную $t = x^2 - 5x + 7$, относительно которой неравенство примет вид

$$\frac{1}{t} \leqslant -t + 2.$$

Это неравенство решим методом интервалов:

$$\frac{1}{t} + t - 2 \leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t} \leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{(t-1)^2}{t} \leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$t < 0 \text{ или } t = 1.$$

Вспоминая, что скрывалось за буквой t, получим совокупность из неравенства и уравнения

$$x^2 - 5x + 7 < 0 \qquad \text{или} \qquad x^2 - 5x + 7 = 1.$$

Неравенство имеет пустое множество решений ($D = 25 - 28 = -3 < 0$), а уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

ОТВЕТ: $\{2; 3\}$. ■

□ **428.** Чтобы избавиться от модуля, необходимо знать знак выражения под знаком модуля. Логически возможны два случая: $x \geqslant 0$ и $x < 0$. В первом случае наше уравнение примет вид $x = 4 - x$. Во втором случае оно превратится в уравнение $-x = 4 - x$.

10—2523

Эти рассуждения означают, что исходное уравнение расщепляется на две системы

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x = 4 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ -x = 4 - x \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ 0 = 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = 2 \qquad\qquad \varnothing$$

Объединяя множества решений этих систем, получим ответ.

Ответ: $\{2\}$. ■

□ **446.** Поскольку $x^2 = |x|^2$, уравнение можно переписать в виде

$$|x|^2 + 2|x| - 3 = 0.$$

Наличие повторяющегося блока $|x|$ означает, что для решения задачи можно ввести новую неизвестную $t = |x|$, которая удовлетворяет обычному квадратному уравнению

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

имеющему два корня: $t_1 = 1$, $t_2 = -3$.

Значит, исходное уравнение распадается на два более простых уравнения:

$$|x| = 1 \qquad |x| = -3$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = \pm 1 \qquad\qquad \varnothing.$$

Объединяя множества решений этих уравнений, получим ответ.

Ответ: $\{-1; 1\}$. ■

□ **455.** Дробь в правой части уравнения неотрицательна (так как она равна модулю). Значит, ее знаменатель положителен: $x - 2 > 0$. Это позволяет избавиться от модуля в левой части уравнения, что дает

$$x - 2 = \frac{1}{x - 2}.$$

С другой стороны, зная, что $x - 2 > 0$, можно выражение $x - 2$ в левой части этого уравнения превратить в $|x - 2|$, т. е. вернуться к исходному уравнению.

Эти рассуждения означают, что исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-2=\dfrac{1}{x-2} \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x-2>0, \\ (x-2)^2=1 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$x-2=1$$
$$\Updownarrow$$
$$x=3.$$

ОТВЕТ: $x = 3$. ■

□ **470.** Если в левой части формально убрать все модули и привести подобные члены, то мы получим в точности выражение, стоящее в правой части.

Поэтому наше уравнение можно записать в виде

$$|a_1| + \dots + |a_n| = a_1 + \dots + a_n. \tag{1}$$

Известно, что $|a_k| \geqslant a_k$, $k = 1, \dots, n$. Складывая эти неравенства почленно, мы получим:

$$|a_1| + \dots + |a_n| \geqslant a_1 + \dots + a_n.$$

При этом, если хотя бы в одном из использованных неравенств $|a_k| \geqslant a_k$ стоял знак $>$, то

$$|a_1| + \dots + |a_n| > a_1 + \dots + a_n.$$

Поэтому равенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} |a_1| = a_1, \\ \dots \\ |a_n| = a_n. \end{cases}$$

Так как равенство $|a| = a$ равносильно тому, что выражение под знаком модуля неотрицательно, эта система сводится к системе

$$\begin{cases} a_1 \geqslant 0, \\ \dots \\ a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

В нашем случае последняя система примет вид:

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x+1 \geqslant 0, \\ \dots \\ x-100 \geqslant 0, \\ x+100 \geqslant 0, \end{cases}$$

что равносильно неравенству $x \geqslant 100$.

Ответ: $[100; +\infty)$. ■

□ **472.** *Неравенства* с модулями часто можно привести к одному из двух стандартных видов: $|a| \leqslant b$, $|a| \geqslant b$ (или аналогичным строгим неравенствам $|a| < b$, $|a| > b$). В этих неравенствах от модуля можно избавиться, не анализируя знак выражения a (или b). Именно, справедливы следующие утверждения:

- неравенство $|a| \leqslant b$ равносильно двойному неравенству $-b \leqslant a \leqslant b$ (или, что то же самое, системе из двух обычных неравенств $a \leqslant b$ и $a \geqslant -b$);
- неравенство $|a| \geqslant b$ равносильно совокупности из двух неравенств $a \geqslant b$, $a \leqslant -b$.

В случае строгих неравенств преобразования аналогичны.

Применяя первое преобразование, можно заменить решение исходного неравенства с модулем двойным неравенством

$$-x \leqslant x-1 \leqslant x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -1 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x \geqslant \frac{1}{2}$. ■

□ **487.** Введем новую неизвестную $t = \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|$ и перейдем в логарифмах к одному основанию 2:

$$\log_2(6+t) = 1 + 2\log_2|t|.$$

Выполним над логарифмами «хорошие» действия (умножение на числовой коэффициент и сложение), при этом число 1 превратим в $\log_2 2$:

$$\log_2(6+t) = \log_2(2t^2).$$

Все проделанные преобразования, очевидно, равносильны.

Последнее уравнение равносильно такому:

$$6+t=2t^2 \tag{1}$$

(положительность обеих частей, необходимая для обратного преобразования, следует из того, что $t=0$ не является корнем этого уравнения).

Уравнение (1) имеет два корня: $t_1=2$ и $t_2=-\dfrac{3}{2}$. Соответственно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|=2 \qquad \text{или} \quad \sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|=-\frac{3}{2}$$

Первое уравнение можно переписать в виде

$$|\sqrt{x}-2|=\sqrt{x}-2,$$

что равносильно неравенству

$$\sqrt{x}-2\geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\geqslant 2 \Leftrightarrow x\geqslant 4.$$

Второе уравнение можно переписать в виде

$$|\sqrt{x}-2|=\sqrt{x}+\frac{3}{2}\,.$$

Поскольку $\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}\geqslant 0$, оно, в свою очередь, распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{ccc}
\sqrt{x}-2=\sqrt{x}+\dfrac{3}{2} & \text{или} & \sqrt{x}-2=-\sqrt{x}-\dfrac{3}{2} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
-2=\dfrac{3}{2} & & \sqrt{x}=\dfrac{1}{4} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\varnothing & & x=\dfrac{1}{16}\,.
\end{array}$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{16}\right\}\cup[4;+\infty)$. ■

□ **488.** Обозначим через $\min(a,b)$ наименьшее из чисел (или выражений) a и b; в случае их равенства в качестве $\min(a,b)$ возьмем любое из них.

Аналогично, обозначим через $\max(a,b)$ наибольшее из чисел (или выражений) a и b; в случае их равенства в качестве $\max(a,b)$ возьмем любое из них.

Эти определения можно записать следующим образом:

$$\min(a,b) = \begin{cases} a, & \text{если } a \leqslant b, \\ b, & \text{если } a \geqslant b. \end{cases}$$

$$\max(a,b) = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant b, \\ b, & \text{если } a \leqslant b. \end{cases}$$

В этом виде они очень похожи на определение $|a|$. Более того, функции $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$ тесно связаны с функцией $|a|$; нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} |a| &= \max(a,-a) = -\min(a,-a), \\ \min(a,b) &= \frac{a+b-|a-b|}{2}, \\ \max(a,b) &= \frac{a+b+|a-b|}{2}, \\ \min(a,b) &= -\max(-a,-b), \\ \max(a,b) &= -\min(-a,-b). \end{aligned}$$

Поэтому любую задачу с функциями $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$ можно решать, избавляясь (по аналогии с модулями) от этих функций рассмотрением различных случаев. Например, неравенство $\min(a,b) > c$ равносильно совокупности из двух систем

$$\begin{cases} a \geqslant b, \\ b > c, \end{cases} \qquad \begin{cases} a < b, \\ a > c. \end{cases}$$

Однако, как и для модулей, *неравенства* с функциями $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$ можно решать гораздо проще, не анализируя, какое из выражений a и b больше, а какое — меньше. Именно, неравенство $\min(a,b) > c$ равносильно системе

$$\begin{cases} a > c, \\ b > c. \end{cases}$$

В нашем случае это означает, что исходная задача сводится к системе

$$\begin{cases} 1 - x^2 > \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1-x}{2} > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

которая легко решается.

Ответ: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$. ■

□ **497.** Перейдем к одному основанию 7 и выполним действия над показательными выражениями:

$$\left(7^{1/3}\right)^{35x} > 7^{-1} \cdot 7^{|4x^2-12x-1|}$$
$$\Updownarrow$$
$$(7)^{\frac{35x}{3}} > 7^{-1+|4x^2-12x-1|}.$$

Поскольку основание больше 1, последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{35x}{3} > -1 + |4x^2 - 12x - 1|$$
$$\Updownarrow$$
$$|12x^2 - 36x - 3| < 35x + 3$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 12x^2 - 36x - 3 < 35x + 3, \\ 12x^2 - 36x - 3 > -35x - 3 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 12x^2 - 71x - 6 < 0, \\ 12x^2 - x > 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} -\frac{1}{12} < x < 6, \\ x < 0 \text{ или } x > \frac{1}{12} \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{1}{12} < x < 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{12} < x < 6.$$

Ответ: $-\frac{1}{12} < x < 0$, $\frac{1}{12} < x < 6$. ■

□ **532.** Поскольку над показательными блоками производятся «плохие» действия (сложение), которые нельзя выполнить, неравенство, видимо, нужно будет решать с помощью метода введения новой неизвестной. Имея это в виду, преобразуем неравенство так, чтобы выделить повторяющиеся блоки. Как обычно, начнем с перехода к одному основанию:

$$3^{x^2+4x+4} + \frac{1}{27} \leqslant 3^{x^2-3} + 3^{4x+4}$$
$$\Updownarrow$$
$$3^{x^2} \cdot 3^{4x+4} + \frac{1}{27} \leqslant \frac{1}{27} \cdot 3^{x^2} + 3^{4x+4}$$

Введем новые переменные $a = 3^{x^2}$, $b = 3^{4x+4}$. Для них получим неравенство:

$$ab + \frac{1}{27} \leqslant \frac{1}{27}a + b,$$

структура которого проще, чем у исходного неравенства. Вид этого неравенства подсказывает, что следует перенести все члены в одну часть и разложить ее на множители методом группировки:

$$ab + \frac{1}{27} - \frac{1}{27}a - b \leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$b(a-1) - \frac{1}{27}(a-1) \leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(b - \frac{1}{27}\right)(a-1) \leqslant 0.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, получим:

$$\left(3^{4x+4} - \frac{1}{27}\right) \cdot \left(3^{x^2} - 1\right) \leqslant 0. \qquad (1)$$

Это неравенство можно решать методом расщепления, но гораздо проще использовать следующий факт: если $a > 1$, то знаки выражений $a^f - a^g$ и $f - g$ совпадают. Поэтому неравенство (1) равносильно неравенству

$$(4x + 4 - (-3)) \cdot (x^2 - 0) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{4}\right) \cdot x^2 \leqslant 0,$$

которое легко решается методом интервалов.

Ответ: $x \leqslant -\frac{7}{4}$; $\quad x = 0$. ■

□ **539.** Функция $y = 3^x + 5^x$ является суммой двух возрастающих функций $y = 3^x$ и $y = 5^x$. Поэтому при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y = 3^x + 5^x$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Уровень 8 она пересекает в единственной точке с абсциссой $x = 1$ и находится ниже этого уровня при $x < 1$ (см. рис. 4).

Ответ: $x \leqslant 1$. ■

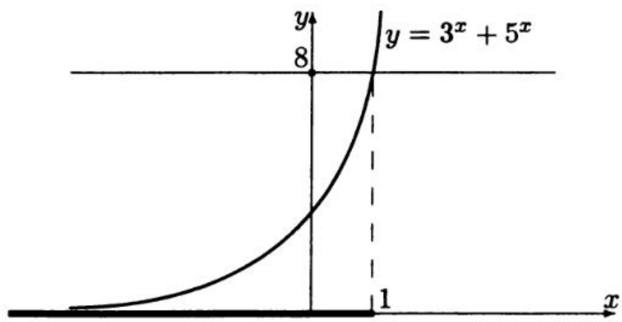

Рис. 4

□ **541.** Перейдем в логарифмах к одному основанию 2 и выполним действия над логарифмами:

$$\frac{1}{5}\log_2(x^2+3x+2)^5 + \log_2(x^2-3x+2) < 2$$
$$\Updownarrow$$
$$\log_2(x^2+3x+2) + \log_2(x^2-3x+2) < \log_2 4$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}\log_2\big((x^2+3x+2)\cdot(x^2-3x+2)\big) < \log_2 4,\\ x^2+3x+2>0\end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}(x^2+3x+2)\cdot(x^2-3x+2) < 4,\\ x^2+3x+2>0,\\ x^2-3x+2>0\end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}x^4-5x^2<0,\\ x^2+3x+2>0,\\ x^2-3x+2>0.\end{cases}$$

Каждое неравенство в последней системе легко решается методом интервалов.

Ответ: $(-\sqrt{5};-2)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;\sqrt{5})$. ■

□ **614.** Перейдем в логарифмах к одному основанию 2 и выделим выражение $\log_2 x$:

$$6\,\frac{\log_2 x}{\log_2(2x)} + 2\,\frac{\log_2(2x)}{\log_2(4\sqrt{x})} \geqslant 1$$
$$\Updownarrow$$
$$6\,\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x} + 2\,\frac{1+\log_2 x}{2+\frac{1}{2}\log_2 x} \geqslant 1.$$

Для новой неизвестной $t = \log_2 x$ это неравенство примет вид

$$\frac{6t}{1+t} + \frac{4(1+t)}{4+t} \geqslant 1.$$

Применяя метод интервалов, найдем, что

$$t < -4 \text{ или } -3 \leqslant t < -1 \text{ или } t \geqslant 0.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, получим совокупность из трех неравенств

$$\begin{array}{ccc} \log_2 x < -4 & -3 \leqslant \log_2 x < -1 & \log_2 x \geqslant 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 0 < x < \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \leqslant x < \frac{1}{2} & x \geqslant 1. \end{array}$$

ОТВЕТ: $0 < x < \frac{1}{16}$, $\frac{1}{8} \leqslant x < \frac{1}{2}$, $x \geqslant 1$. ■

□ **639.** Отметим разнородность частей заданного неравенства (в левой стоит логарифмическое выражение, а в правой — линейное). Подобные неравенства обычно решаются графически или методом оценок. Поскольку функции в левой и правой частях довольно простые, мы будем использовать графический метод. При этом, чтобы еще больше упростить задачу построения графиков, введем новую неизвестную $t = 2-3x$. Поскольку $x = \dfrac{2-t}{3}$, для новой неизвестной неравенство примет вид

$$\log_2 t > \frac{11-4t}{3}. \tag{1}$$

Графики обеих частей этого неравенства изображены на рис. 5. Поскольку функция $y = \log_2 t$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, а функция $y = \dfrac{11-4t}{3}$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$, их графики пересекаются только в одной точке. Нетрудно сообразить, что абсцисса их точки пересечения равна 2. Из рисунка 5 ясно, что решение неравенства (1) имеет вид $t > 2$. Возвращаясь к основной неизвестной x, получим:

$$2 - 3x > 2,$$

откуда $x < 0$.

ОТВЕТ: $x < 0$. ■

□ **642.** Поскольку $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$, в задаче четыре раза повторяется один и тот же блок $\log_2 x$. Введем поэтому новую неизвестную $t = \log_2 x$,

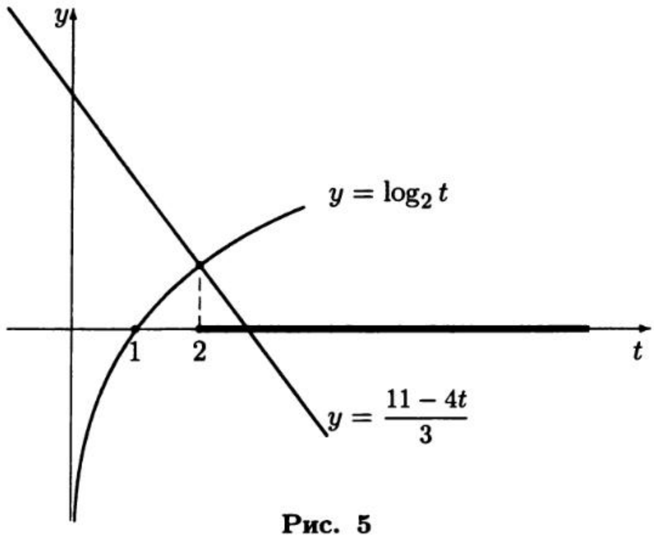

Рис. 5

для которой неравенство примет вид:

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \leqslant 10. \tag{1}$$

Теперь обратим внимание на наличие взаимно обратных чисел t и $\dfrac{1}{t}$. Это наводит на мысль оценить левую часть неравенства (1) с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Но сделать это можно только, если соответствующие числа — положительны. Поэтому рассмотрим два случая.

1 случай: $t > 0$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим следующую оценку левой части неравенства (1):

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \geqslant 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}} \cdot t \cdot 5^t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{5^{t+\frac{1}{t}}} = 2 \cdot 5^{\frac{t+\frac{1}{t}}{2}} \geqslant 2 \cdot 5^1 = 10.$$

При этом, если хотя бы в одном из двух использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $>$, а не $\geqslant$, то левая часть неравенства (1) будет строго больше 10. Поэтому в случае $t > 0$ неравенство (1) может выполняться тогда и только тогда, когда в двух использованных неравенствах о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоит знак $=$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases} 5^{\frac{1}{t}} \cdot t = 5^t \cdot \dfrac{1}{t}, \\ t = \dfrac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

(можно решить второе уравнение с учетом условия $t > 0$ и проверить, что найденное значение $t = 1$ удовлетворяет первому уравнению).

2 случай: $t < 0$. В этом случае левая часть неравенства (1) отрицательна, так что это неравенство заведомо выполнено при всех $t < 0$.

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное неравенство распадается на уравнение $\log_2 x = 1$ и неравенство $\log_2 x < 0$, которые решаются без труда:

$$\begin{array}{cc} \log_2 x = 1 & \log_2 x < 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = 2 & 0 < x < 1 \end{array}$$

Ответ: $x = 2$, $0 < x < 1$. ■

□ **652.** Поскольку неизвестная x входит в неравенство только в составе повторяющегося блока $\sqrt{2-x}$, введем новую неизвестную $t = \sqrt{2-x}$, для которой неравенство примет вид

$$3 \cdot 4^t + 3 < 10 \cdot 2^t.$$

В этом неравенстве над показательным блоком в левой части производится «плохое» действие — сложение. Поэтому неравенство нужно решать введением новой неизвестной $u = 2^t$ (можно было бы сразу ввести новую неизвестную $u = 2^{\sqrt{2-x}}$ в исходном неравенстве), что приведет к квадратичному неравенству

$$3u^2 - 10u + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < u < 3.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, получим двойное неравенство

$$\begin{gathered} \frac{1}{3} < 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \\ \Updownarrow \\ -\log_2 3 < \sqrt{2-x} < \log_2 3 \\ \Updownarrow \\ \sqrt{2-x} < \log_2 3 \\ \Updownarrow \\ 0 \leqslant 2 - x < \log_2^2 3 \\ \Updownarrow \\ 2 - \log_2^2 3 < x \leqslant 2. \end{gathered}$$

Ответ: $\left(2 - \log_2^2 3; 2\right]$. ■

☐ **657.** Под знаком радикала в левой части стоит линейное выражение. Поэтому от радикала можно избавиться, обозначив его новой буквой: $t = \sqrt{x-1}$. При этом основная неизвестная x может быть выражена через новую: $x = x-1+1 = (\sqrt{x-1})^2+1 = t^2+1$ (обычно это делают более формально, возводя в квадрат равенство $t = \sqrt{x-1}$, но, поскольку при этом могут возникнуть вопросы относительно равносильности, мы дали более подробный вывод). Для новой неизвестной неравенство примет вид

$$t^2 + t - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 1.$$

Возвращаясь к основной неизвестной, получим:

$$-2 < \sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 2.$$

Отметим, что это неравенство относится к стандартному типу неравенств с радикалами: $\sqrt{a} < b$. Такое неравенство можно решать возведением в квадрат. Для равносильности подобного преобразования нужно сохранить условия $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, вытекающие из неравенства $\sqrt{a} < b$ (вместо нестрогого неравенства $b \geqslant 0$ можно брать строгое неравенство $b > 0$):

$$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2, \\ a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0. \end{cases}$$

В нашем случае возведение в квадрат дает:

$$\sqrt{x-1} < 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0, \\ x \geqslant 1, \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 2.$$

Ответ: $[1; 2)$. ■

☐ **658.** Введем новую неизвестную $t = \sqrt{x+4}$. Это позволит сразу же избавиться от радикала:

$$t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 2.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, получим:

$$-1 < \sqrt{x+4} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} < 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x+4 < 4 \Leftrightarrow -4 \leqslant x < 0.$$

Наше неравенство можно решать и возведением в квадрат, применяя следующее стандартное преобразование:

$$\sqrt{a} > b$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} b \geqslant 0, \\ a > b^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b < 0, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $[-4; 0)$. ■

☐ **707.** Поскольку выражение $2x-3$ стоит под знаком арифметического корня, можно гарантировать, что оно неотрицательно. Это позволяет избавиться от модуля в знаменателе:

$$\frac{x^3-27+9x(3-x)}{2x-3} \leqslant \sqrt{2x-3}. \qquad (1)$$

Так как в этом уравнении остался $\sqrt{2x-3}$, из неравенства (1) следует, что $2x-3 \geqslant 0$ и поэтому $2x-3 = |3-2x|$. Поэтому полученное уравнение равносильно исходному.

Далее, обращая внимание на присутствие выражения $x^3-27 = x^3-3^3$ в числителе дроби в левой части неравенства (1), разложим этот числитель на множители:

$$\frac{(x-3)^3}{2x-3} \leqslant \sqrt{2x-3}.$$

Как мы отмечали, из этого уравнения следует, что $2x-3 \geqslant 0$; более того, поскольку $2x-3$ стоит в знаменателе, можно гарантировать, что $2x-3 > 0$. Поэтому мы можем избавиться от знаменателя. Для равносильности этого преобразования необходимо сохранить условие $2x-3>0$:

$$\begin{cases} (x-3)^3 \leqslant \left(\sqrt{2x-3}\right)^3, \\ 2x-3>0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы извлечением кубических корней из обеих частей приводится к виду

$$x-3 \leqslant \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 6.$$

Учитывая второе неравенство системы, получаем ответ.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; 6\right]$. ■

☐ **715.** Перепишем неравенство в виде

$$\left|2-\sqrt{x+3}\right| + |x+1| \leqslant \left(2-\sqrt{x+3}\right) + (x+1)$$

и введем новые переменные

$$a_1 = 2-\sqrt{x+3}, \quad a_2 = x+1,$$

что даст:

$$|a_1| + |a_2| \leqslant a_1 + a_2.$$

Дословно повторяя рассуждения, использовавшиеся при решении задачи 470, мы получим, что это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} a_1 \geqslant 0, \\ a_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, имеем:

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}\leqslant 2,\\ x+1\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leqslant x+3\leqslant 4,\\ x\geqslant -1\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1.$$

ОТВЕТ: $[-1;1]$. ■

□ **716.** Поскольку $8+2\sqrt{7}=(1+\sqrt{7})^2$, а $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, наше неравенство равносильно неравенству

$$(3-x)(x+1)(x+2)>(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}\log_3 4.$$

Общий множитель $x+1$ хотелось бы сократить. Это можно сделать, если мы докажем, что для значений x, являющихся решениями неравенства, он положителен.

Прежде всего, из задачи следует, что $x+1\geqslant 0$ (так как это выражение стоит под знаком радикала). Кроме того, простая проверка показывает, что $x=-1$ не является решением.

Значит, наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(3-x)(x+2)>\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}\log_3 4,\\ x+1>0\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}(3-x)(x+2)>\sqrt{(x+1)(2-x)}\log_3 4,\\ x+1>0.\end{cases}$$

Чтобы решить первое неравенство, применим метод оценок.

Правая часть этого неравенства определена при $-1\leqslant x\leqslant 2$. Ее поведение (возрастание/убывание) повторяет поведение квадратного трехчлена $(x+1)(2-x)$. Этот трехчлен достигает наибольшего значения, равного $\frac{9}{4}$, в точке $x=\frac{1}{2}$. Соответственно, правая часть не превосходит $\log_3 8$.

С другой стороны, наименьшее значение левой части на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 2$ равно 4 (она сначала возрастает от 4 до $\frac{25}{4}$, а затем убывает от $\frac{25}{4}$ до 4).

Поскольку $\log_3 8<4$, неравенство верно всюду, где определено. Иначе говоря, множество его решений — это отрезок $-1\leqslant x\leqslant 2$.

Учитывая условие $x>-1$, получаем ответ задачи.

ОТВЕТ: $(-1;2]$. ■

Решения к главе 4

□ **719.** Выразим из первого уравнения неизвестную x:

$$x = 6 - 2y,$$

и подставим ее выражение во второе уравнение, которое превратится в уравнение относительно одной неизвестной y:

$$3(6-2y)^2 - (6-2y)y + 4y^2 = 48.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных имеем:

$$3y^2 - 13y + 10 = 0. \tag{1}$$

Дискриминант этого квадратного уравнения равен

$$D = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 169 - 120 = 49 = 7^2,$$

так что квадратное уравнение (1) имеет два корня

$$y_1 = 1; \quad y_2 = \frac{10}{3}.$$

Теперь восстановим исключенную неизвестную x.

1. Если $y = 1$, то $x = 6 - 2 \cdot 1 = 4$;
2. Если $y = \frac{10}{3}$, то $x = 6 - 2 \cdot \frac{10}{3} = -\frac{2}{3}$.

Таким образом, наша система имеет два решения: $(4; 1)$ и $\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Ответ: $\left\{(4;1); \left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)\right\}$. ■

□ **728.** Из второго уравнения исключим неизвестную y:

$$y = 8x - 1.$$

Теперь первое уравнение можно переписать в виде

$$\log_2(x(8x-1)) \cdot \log_{4x}(8x-1) = 2. \tag{1}$$

Чтобы решить это логарифмическое уравнение, прежде всего перейдем во втором логарифме к основанию 2:

$$\log_2(x(8x-1)) \cdot \frac{\log_2(8x-1)}{\log_2(4x)} = 2.$$

Поскольку над логарифмами производятся «плохие» действия (умножение и деление), выделим повторяющиеся блоки:

$$(\log_2 x + \log_2(8x-1)) \cdot \frac{\log_2(8x-1)}{2 + \log_2 x} = 2.$$

Чтобы решить это уравнение, введем две новые переменные $a = \log_2 x$ и $b = \log_2(8x - 1)$, относительно которых получим уравнение

$$(a + b) \cdot \frac{b}{2 + a} = 2.$$

Оно, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} b^2 + ab - (2a + 4) = 0, \\ a \neq -2. \end{cases}$$

Первое уравнение системы можно рассматривать как квадратное относительно b. Для него дискриминант равен $D = a^2 + 8a + 16 = (a + 4)^2$. Поэтому это уравнение распадается на два:

$$b = \frac{-a + (a + 4)}{2} = 2 \quad \text{и} \quad b = \frac{-a - (a + 4)}{2} = -a - 2.$$

Вспоминая, что скрывалось за переменными a и b, мы получим, что уравнение (1) распадается на две системы:

$$(A) \quad \begin{cases} \log_2(8x - 1) = 2, \\ \log_2 x \neq -2. \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \log_2(8x - 1) = -\log_2 x - 2, \\ \log_2 x \neq -2. \end{cases}$$

Система (A) решается легко. Из первого уравнения мы немедленно имеем $8x - 1 = 4$, так что $x = \frac{5}{8}$ — это первый корень уравнения (1) (условие $\log_2 x \neq -2$, очевидно, выполнено).

Займемся теперь системой (B). Первое уравнение равносильно уравнению

$$\log_2(8x - 1) + \log_2 x = -2,$$

которое, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2(8x^2 - x) = \log_2 \frac{1}{4}, \\ x > 0, \end{cases} \tag{2}$$

т. е. системе

$$\begin{cases} 8x^2 - x = \frac{1}{4}, \\ x > 0. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{8}$. В силу условия $x > 0$, решением системы (2) будет только $x = \frac{1}{4}$. Однако $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, так что система (B) не имеет решений.

Итак, уравнение (1) имеет единственный корень $x = \frac{5}{8}$.

Теперь можно восстановить исключенную в начале решения неизвестную y: $y = 8 \cdot \dfrac{5}{8} - 1 = 4$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение $\left(\frac{5}{8}; 4\right)$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{5}{8}; 4\right)\right\}$. ■

□ **732.** Обратим внимание на то, что в левых частях уравнений стоят однородные многочлены второй степени. Чтобы получить однородное уравнение, нужно сделать так, чтобы в правой части стоял 0. Для этого умножим второе уравнение на 3 и вычтем его из первого уравнения:

$$y^2 - xy - 6x^2 = 0.$$

Чтобы получить систему, равносильную исходной, достаточно к этому уравнению добавить любое уравнение исходной системы. Итак, исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} y^2 - xy - 6x^2 = 0, \\ 2x^2 + xy = 5. \end{cases}$$

Первое уравнение новой системы можно рассматривать как квадратное относительно одной неизвестной y. Его дискриминант равен $25x^2$, так что это уравнение распадается на два: $y = 3x$ и $y = -2x$. Соответственно, исходная система распадается на две подсистемы

$$(A) \quad \begin{cases} y = 3x, \\ 2x^2 + xy = 5. \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} y = -2x, \\ 2x^2 + xy = 5. \end{cases}$$

Первые уравнения в каждой из систем немедленно исключают неизвестную y.

Система (A) сводится к уравнению $x^2 = 1$, откуда $x = \pm 1$, так что эта система имеет два решения $(1; 3)$ и $(-1; -3)$.

Система (B) сводится к уравнению $0 = 5$ и поэтому не имеет решений.

Итак, исходная система имеет два решения $(1; 3)$ и $(-1; -3)$.

Ответ: $\{(1; 3), (-1; -3)\}$. ■

□ **741.** Упростим первое уравнение. Для этого прежде всего перейдем в логарифмах к одному основанию, скажем, x:

$$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = \frac{5}{2}.$$

Теперь введем новую неизвестную $t = \log_x y$. Для нее уравнение примет вид:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}.$$

Это уравнение равносильно квадратному уравнению

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

(отметим, что из этого уравнения следует, что $t \neq 0$, так что явно указывать это условие (формально это необходимо) нет необходимости).

Его дискриминант равен $D = 9$. Поэтому уравнение имеет два корня $t_1 = 2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$.

Вспоминая, что скрывалось за переменной t, мы получим, что первое уравнение исходной системы распадается на два уравнения:

$$\log_x y = 2, \qquad \log_x y = \frac{1}{2}.$$

Первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Второе уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x = y^2, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

Соответственно, исходная система распадается на две:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y^2, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

Эти системы уже можно решать методом исключения (первое уравнение первой системы исключает y, первое уравнение второй системы исключает x), что приводит к следующей цепочке равносильных преобразований:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 4\sqrt{x} - 3x = 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y^2, \\ 4y - 3\sqrt{y} = 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 4\sqrt{x} = 3x + 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y^2, \\ 3\sqrt{y} = 4y - 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 16x = (3x + 1)^2, \\ 3x + 1 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y^2, \\ 9y = (4y - 1)^2, \\ 4y - 1 \geqslant 0, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 9x^2 - 10x + 1 = 0, \\ 3x + 1 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y^2, \\ 16y^2 - 17y + 1 = 0, \\ 4y - 1 \geqslant 0, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = 1; \frac{1}{9}, \\ 3x + 1 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y^2, \\ y = 1; \frac{1}{16}, \\ 4y - 1 \geqslant 0, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ y = \frac{1}{81}. \end{cases} \qquad\qquad \varnothing.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)\right\}$. ■

□ **754.** Упростим первое уравнение. С этой целью перепишем его в виде

$$\log_2 y + 3^y = \log_2 x + 3^x.$$

Если ввести функцию $f(t) = \log_2 t + 3^t$, то это уравнение примет вид

$$f(y) = f(x). \qquad (1)$$

Функция $f(t)$ определена на промежутке $(0; +\infty)$ и возрастает на всей области определения (как сумма двух возрастающих функций: $g(t) = \log_2 t$ и $h(t) = 3^t$). Поэтому равенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} y = x, \\ x > 0. \end{cases}$$

Соответственно, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = x, \\ 2^{1-x} + 8^{-2x} = 65^x \cdot 4^{-3y}, \\ x > 0. \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения. После исключения неизвестной y второе уравнение примет вид:

$$2 \cdot 32^x + 1 = 65^x.$$

Его нужно решать графически. Непосредственно сопоставлять графики левой и правой частей нельзя, так как соответствующие функции возрастают. Но если разделить это уравнение почленно на 32^x, мы получим уравнение

$$2 + \left(\frac{1}{32}\right)^x = \left(\frac{65}{32}\right)^x, \qquad (2)$$

левая часть которого убывает от $+\infty$ до 2, а правая часть возрастает от 0 до $+\infty$. Поэтому можно гарантировать, что уравнение (2) имеет единственный корень x_0. Нетрудно сообразить, что $x_0 = 1$. Поскольку условие $x > 0$ выполнено, исходная система имеет единственное решение $(1; 1)$.

Ответ: $\{(1; 1)\}$. ■

□ **757.** Перегруппируем члены в первом уравнении и вынесем xy за скобку во втором:

$$\begin{cases} -(y - x) + xy = 1, \\ xy(y - x) = 30. \end{cases}$$

Теперь можно ввести две новые неизвестные $a = y - x$ и $b = xy$, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} -a + b = 1, \\ ab = 30. \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения; она имеет два решения:

$$\begin{cases} a = 5, \\ b = 6. \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -6, \\ b = -5. \end{cases}$$

Соответственно, исходная система распадается на две:

$$\begin{cases} y - x = 5, \\ xy = 6. \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x = -6, \\ xy = -5. \end{cases}$$

Эти системы также без труда решаются методом исключения. Первая имеет два решения $(1; 6)$ и $(-6; -1)$; вторая система имеет два решения $(1; -5)$ и $(5; -1)$.

ОТВЕТ: $\{(1; 6), (-6; -1), (1; -5), (5; -1)\}$. ■

□ **765.** Поскольку под знаками радикалов стоят линейные выражения от основных неизвестных, от радикалов можно избавиться, обозначив их новыми буквами:

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{x+1}, \\ b = \sqrt[3]{y-2}. \end{cases}$$

При этом основные неизвестные x и y могут быть выражены через новые:

$$\begin{cases} x = a^3 - 1, \\ y = b^3 + 2. \end{cases}$$

Теперь система примет вид:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a^3 + b^3 - 19 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Эту систему легко решить методом исключения. Из первого уравнения $b = 1 - a$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получим уравнение относительно одной неизвестной a:

$$a^2 - a - 6 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $a_1 = 3$, $a_2 = -2$. Соответственно, система (1) имеет два решения:

$$\begin{cases} a = 3, \\ b = -2. \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2, \\ b = 3. \end{cases}$$

Следовательно, исходная система распадается на две:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} = 3, \\ \sqrt[3]{y-2} = -2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} = -2, \\ \sqrt[3]{y-2} = 3. \end{cases}$$

Первая система имеет единственное решение $(26; -6)$; у второй системы единственное решение $(-9; 29)$.

ОТВЕТ: $\{(26; -6), (-9; 29)\}$. ■

□ **789.** Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно неизвестной y; неизвестную x будем считать параметром. Это, в частности, означает, что уравнение нужно переписать в виде

$$y^2 + (2x - 3)y + (2 - 4x) = 0. \tag{1}$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (2x - 3)^2 - 4 \cdot (2 - 4x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Поэтому уравнение (1) имеет корни

$$y_1 = \frac{-2x + 3 + (2x + 1)}{2} = 2$$

и

$$y_2 = \frac{-2x + 3 - (2x + 1)}{2} = -2x + 1.$$

Иначе говоря, первое уравнение системы расщепляется на два уравнения:

$$y = 2 \quad \text{и} \quad y = -2x + 1.$$

В принципе теперь можно исключать неизвестную y, но мы упростим и второе уравнение.

Опять рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно неизвестной y; неизвестную x будем считать параметром:

$$3y^2 + (x - 14)y + (16 - 2x) = 0. \tag{2}$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (x - 14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (16 - 2x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

Поэтому уравнение (2) имеет корни

$$y_1 = \frac{-x + 14 + (x - 2)}{6} = 2$$

и

$$y_2 = \frac{-x + 14 - (x - 2)}{6} = \frac{-x + 8}{3}.$$

Иначе говоря, второе уравнение системы расщепляется на два уравнения:

$$y = 2 \quad \text{и} \quad y = \frac{-x + 8}{3}$$

Соответственно, исходная система распадется на четыре системы:

$$\begin{cases} y = 2, \\ y = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2, \\ y = \dfrac{-x + 8}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = \dfrac{-x + 8}{3}. \end{cases}$$

Первая система не содержит неизвестную x. Поэтому она имеет бесконечно много решений, которые могут быть записаны в виде: $(x; 2)$, где x — произвольное действительное число.

Вторая система имеет единственное решение $(2;2)$. Третья система имеет единственное решение $(-0{,}5;2)$. Оба этих решения входят в множество решений первой системы.

Четвертая система имеет единственное решение $(-1;3)$.

Ответ: $\{(-1;3),(x;2),\quad \text{где } x\in\mathbb{R}\}$. ■

□ **791.** Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно неизвестной x; неизвестную y будем считать параметром. Это, в частности, означает, что уравнение нужно переписать в виде

$$10x^2-2(y+19)x+(5y^2-6y+41)=0. \tag{1}$$

Для решения этого квадратного уравнения подсчитаем $\frac{D}{4}$:

$$\frac{D}{4}=(y+19)^2-10\cdot(5y^2-6y+41)=-49(y-1)^2. \tag{2}$$

Если уравнение (1) имеет решение, то дискриминант должен быть неотрицателен. В силу соотношения (2) это означает, что $y=1$.

Иначе говоря, из уравнения (1) следует, что $y=1$:

$$10x^2-2(y+19)x+(5y^2-6y+41)=0$$
$$\Downarrow$$
$$y=1.$$

Для равносильности этого преобразования, можно просто сохранить исходное уравнение:

$$10x^2-2(y+19)x+(5y^2-6y+41)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}y=1,\\10x^2-2(y+19)x+(5y^2-6y+41)=0\end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}y=1,\\10x^2-40x+40=0\end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}y=1,\\x=2.\end{cases}$$

Итак, первое уравнение с *двумя* неизвестными имеет *единственное* решение.

Оно будет решением исходной системы тогда и только тогда, когда удовлетворяет второму уравнению системы. Убедиться в этом можно простой подстановкой.

Ответ: $\{(2;1)\}$. ■

□ **801.** Сложим уравнения системы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}xyz$$

и вычтем из этого равенства уравнения исходной системы. В итоге мы получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}xyz, \\ y^2 = \frac{1}{2}xyz, \\ z^2 = \frac{1}{2}xyz. \end{cases} \qquad (1)$$

Теперь перемножим эти уравнения:

$$(xyz)^2 = \frac{1}{8}(xyz)^3.$$

Откуда произведение xyz равно 0 или 8. Следовательно, система (1) расщепляется на две:

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ y^2 = 0, \\ z^2 = 0, \\ xyz = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 = 4, \\ y^2 = 4, \\ z^2 = 4, \\ xyz = 8. \end{cases}$$

Первая система, очевидно, имеет единственное решение $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Из первых трех уравнений второй системы следует, что каждая неизвестная может принимать два значения: 2 и -2, что дает 8 решений вида $(\pm 2; \pm 2; \pm 2)$. Последнему уравнению, $xyz = 8$, удовлетворяют только те из этих троек, в которых стоит четное число знаков «$-$».

Ответ: $(0; 0; 0)$, $(2; 2; 2)$, $(2; -2; -2)$, $(-2; 2; -2)$, $(-2; -2; 2)$. ■

□ **809.** Выделим полные квадраты в выражениях под знаками радикалов в первом уравнении:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-11)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{37}.$$

Выражение $\sqrt{(x-1)^2 + (y-11)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками $M = (x; y)$ и $A = (1; 11)$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-11)^2} = \rho(M, A).$$

Аналогично выражение $\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками $M = (x; y)$ и $B = (-1; -1)$:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \rho(M, B).$$

Кроме того, расстояние между точками A и B равно

$$\rho(A, B) = \sqrt{(1+1)^2 + (11+1)^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}.$$

Поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$\rho(M, A) + \rho(M, B) = \rho(A, B).$$

Множество его решений — это отрезок AB на координатной плоскости $(x; y)$. Чтобы задать этот отрезок аналитически, найдем уравнение прямой, проходящей через точки A и B.

Ясно, что эта прямая не параллельна оси Oy. Поэтому ее уравнение имеет вид $y = kx + b$. Поскольку точки A и B лежат на этой прямой, их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$\begin{cases} 11 = k + b, \\ -1 = -k + b. \end{cases}$$

Эта система легко решается:

$$\begin{cases} b = 5, \\ k = 6, \end{cases}$$

так что уравнение прямой AB имеет вид $y = 6x + 5$.

Отрезок AB характеризуется дополнительным условием $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Таким образом, первое уравнение исходной системы равносильно системе

$$\begin{cases} y = 6x + 5, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Соответственно, вся исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = 6x + 5, \\ \log_{(x+1)} 4 + \log_y 4 = 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

которая легко решается методом исключения. Второе уравнение примет вид

$$\log_{x+1} 4 + \log_{6x+5} 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\log_4(x+1)} + \frac{1}{\log_4(6x+5)} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \log_4(x+1) + \log_4(6x+5) = 0, \\ \log_4(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \log_4\left((x+1)\cdot(6x+5)\right) = 0, \\ \log_4(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 6x^2 + 11x + 5 = 1, \\ x + 1 \neq 1, \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Значение $x = -\dfrac{1}{2}$ удовлетворяет условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$; поэтому можно восстановить исключенную неизвестную y: $y = 6 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 5 = 2$.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$. ■

□ **813.** Прежде всего отметим, что все неизвестные неотрицательны. При этом, если одна из них равна 0, то и остальные равны 0. Поэтому возможны только два случая.

1 случай: $(x; y; z) = (0; 0; 0)$. Очевидно, что это решение системы.

2 случай: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Разделим правые части уравнений исходной системы на z, x и y соответственно:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2z}{z + \dfrac{1}{z}}, \\ y = \dfrac{2x}{x + \dfrac{1}{x}}, \\ z = \dfrac{2y}{y + \dfrac{1}{y}}. \end{cases}$$

Знаменатели дробей в правых частях этих уравнений больше или равны 2. Значит, можно гарантировать, что

$$\begin{cases} x \leqslant z, \\ y \leqslant x, \\ z \leqslant y. \end{cases}$$

Эти неравенства равносильны тому, что все неизвестные равны между собой; пусть t — их общее значение. Для неизвестной t исходная система превратится в уравнение

$$t = \frac{2t^2}{1 + t^2},$$

которое имеет единственный положительный корень $t = 1$.

Ответ: $\{(0; 0; 0), (1; 1; 1)\}$. ■

□ **814.** Допустим, что уравнение

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (u + v\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

имеет решение, где x, y, u, v — рациональные числа.

Раскрывая скобки в левой части, перепишем уравнение в виде:

$$x^2 + 2xy\sqrt{2} + 2y^2 + u^2 + 2uv\sqrt{2} + 2v^2 = 7 + 5\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Из иррациональности числа $\sqrt{2}$ следует, что равенство $a + b\sqrt{2} = 0$, где a и b — рациональные, равносильно равенствам $a = 0$, $b = 0$. В нашем случае это означает, что уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + u^2 + 2v^2 = 7, \\ 2xy + 2uv = 5. \end{cases} \qquad (2)$$

Итак, задача решения исходного уравнения свелась к решению системы (2). Начиная с этого момента, рациональность чисел x, y, u, v уже не будет играть никакой роли.

Используя неравенство о среднем арифметическом для неотрицательных чисел x^2 и $2y^2$, u^2 и $2v^2$, оценим выражение в левой части первого равенства системы (2):

$$(x^2 + 2y^2) + (u^2 + 2v^2) \geqslant 2\sqrt{x^2 \cdot 2y^2} + 2\sqrt{u^2 \cdot 2v^2} =$$
$$= \sqrt{2}\,(|2xy| + |2uv|) \geqslant \sqrt{2}(2xy + 2uv).$$

В силу системы (2) первое число в этой цепочке равно 7, а последнее равно $5\sqrt{2}$. Таким образом, если система (2) имеет решение, то верно неравенство $7 \geqslant 5\sqrt{2}$. Но это неравенство равносильно (после возведения в квадрат) неравенству $49 \geqslant 50$, т. е. ложно. Полученное противоречие означает, что система (2) несовместна. Поскольку на множестве рациональных чисел эта система и исходное уравнение равносильны, ответ на вопрос задачи отрицательный.

ОТВЕТ: нет. ■

□ **815.** Выражения $(x + y\sqrt{2})^3$ и $(u + v\sqrt{2})^3$ после раскрытия скобок и приведения подобных могут быть записаны в виде $x' + y'\sqrt{2}$, где $x' = x^3 + 6xy^2$, $y' = 3x^2y + 2y^3$, $u' = u^3 + 6uv^2$, $v' = 3u^2v + 2v^3$. Для чисел x', y', u', v' исходное уравнение примет вид:

$$(x' + y'\sqrt{2})^2 + (u' + v'\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}.$$

Если числа x, y, u, v — рациональные, то и числа x', y', u', v' — рациональные. Таким образом, если наше уравнение имеет решение в рациональных числах, то и уравнение задачи 814 имеет решение в рациональных числах, что, как мы установили, неверно.

ОТВЕТ: нет. ■

Решения к главе 5

□ **818.** Чтобы избавиться от модулей, будем использовать следующий факт: неравенство $|a| \leqslant b$ равносильно двойному неравенству $-b \leqslant a \leqslant b$, или, что то же самое, системе из двух неравенств $a \leqslant b$ и $a \geqslant -b$.

Поэтому, изолируя модули в исходном неравенстве, последовательно имеем:

$$\left|y-\frac{1}{2}x^2\right| \leqslant 2+x-\left|y+\frac{1}{2}x^2\right|$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y-\frac{1}{2}x^2 \leqslant 2+x-\left|y+\frac{1}{2}x^2\right|, \\ y-\frac{1}{2}x^2 \geqslant -2-x+\left|y+\frac{1}{2}x^2\right| \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left|y+\frac{1}{2}x^2\right| \leqslant -y+\frac{1}{2}x^2+x+2, \\ \left|y+\frac{1}{2}x^2\right| \leqslant y-\frac{1}{2}x^2+x+2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y+\frac{1}{2}x^2 \leqslant -y+\frac{1}{2}x^2+x+2, \\ y+\frac{1}{2}x^2 \geqslant y-\frac{1}{2}x^2-x-2, \\ y+\frac{1}{2}x^2 \leqslant y-\frac{1}{2}x^2+x+2, \\ y+\frac{1}{2}x^2 \geqslant -y+\frac{1}{2}x^2-x-2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y \leqslant \frac{1}{2}x+1, \\ x^2+x+2 \geqslant 0, \\ x^2-x-2 \leqslant 0, \\ y \geqslant -\frac{1}{2}x-1. \end{cases}$$

Первое неравенство задает полуплоскость под графиком прямой линии $y = \frac{1}{2}x+1$.

Второе неравенство выполнено при всех x и y (так как $D < 0$) и поэтому его можно не учитывать.

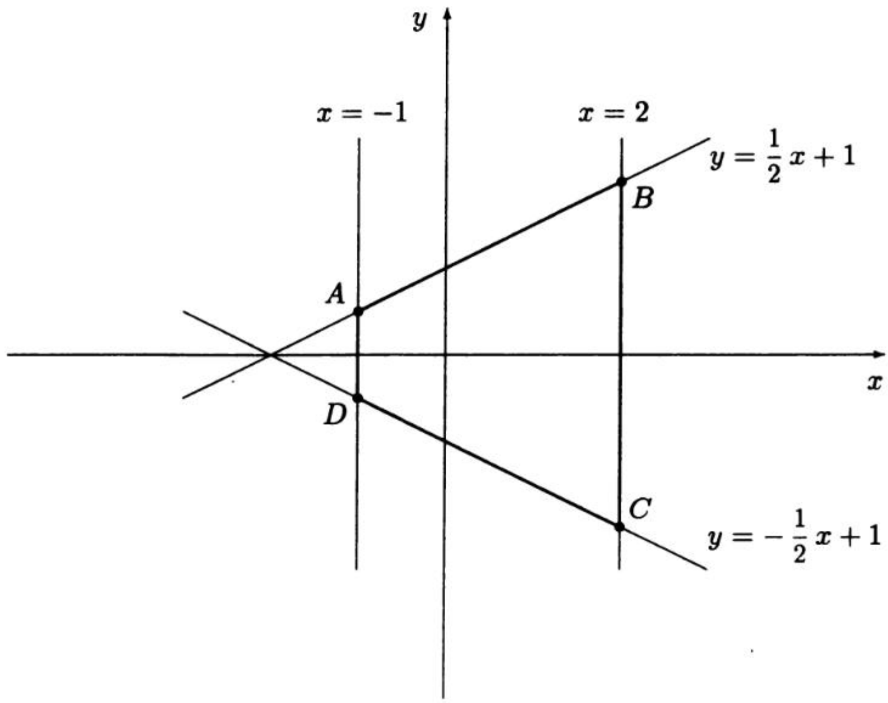

Рис. 6

Третье неравенство, рассматриваемое как неравенство относительно одной неизвестной, задает отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Однако наша задача должна рассматриваться как задача с двумя переменными. Поскольку переменная y в третьем неравенстве отсутствует, она может принимать произвольное значение. Поэтому на самом деле третье неравенство задает полосу, ограниченную двумя вертикальными прямыми $x = -1$ и $x = 2$.

Четвертое неравенство задает полуплоскость над графиком прямой линии $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$.

Пересечение трех указанных областей изображено на рис. 6 — это трапеция $ABCD$, где $A = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $B = (2; 2)$, $C = (2; -2)$, $D = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. Ее основания AD и BC равны 1 и 4 соответственно, высота равна 3. Поэтому площадь трапеции равна $\dfrac{1+4}{2} \cdot 3 = \dfrac{15}{2}$.

Ответ: $S = \dfrac{15}{2}$. ■

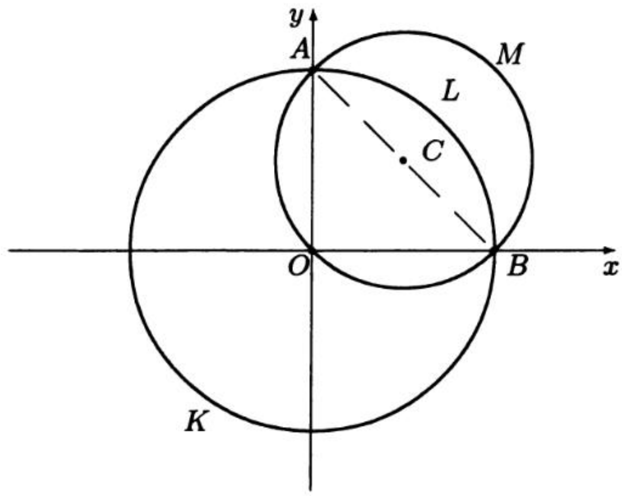

Рис. 7

□ **842.** Исходное неравенство распадается на две системы

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-y\geqslant 0, \\ x^2+y^2-1\leqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-x-y\leqslant 0, \\ x^2+y^2-1\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant \frac{1}{2}, \\ x^2+y^2\leqslant 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant \frac{1}{2}, \\ x^2+y^2\geqslant 1. \end{cases}$$

В первой системе первое неравенство задает внешность круга (вместе с границей) с центром в точке $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Второе неравенство задает круг с центром в начале координат $O(0;0)$ и радиусом $R=1$. Их пересечение — это область $AOBK$, изображенная на рис. 7.

Аналогично, вторая система задает область $ALBM$.

Чтобы найти площади этих областей, найдем площади фигур $ACBO$ и $ALBC$.

Фигура $ACBO$ — это половина меньшего круга, так что $S_{ACBO}=\frac{\pi}{4}$.

Фигура $ALBC$ — это сегмент большего круга, соответствующий центральному углу $AOB=\frac{\pi}{2}$. Поэтому $S_{ALBC}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Область $ALBM$ получается из половины меньшего круга выбрасыванием фигуры $ALBC$. Поэтому

$$S_{ALBM}=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Область $AOBK$ получается из большего круга выбрасыванием фигур $ACBO$ и $ALBC$. Поэтому

$$S_{AOBK} = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ответ: $S = \frac{\pi}{2} + 1$. ■

□ **845.** Раскрывая модуль, получим, что исходное уравнение расщепляется на две системы:

$$\begin{cases} y \geqslant x, \\ y = \dfrac{x}{x-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leqslant x, \\ 2y(2-x) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение первой системы задает стандартную гиперболу, сдвинутую на 1 вверх и 1 вправо. В силу неравенства $y \geqslant x$ мы должны взять только часть этой гиперболы, лежащую выше прямой $y = x$.

Второе уравнение второй системы, в свою очередь, распадается на два уравнения: $y = 0$ и $x = 2$. Первое из них задает прямую линию, совпадающую с осью абсцисс, а второе — вертикальную прямую, проходящую через точку $x = 2$ на оси абсцисс. В силу неравенства $y \leqslant x$ мы должны взять только части этих прямых, лежащие ниже прямой $y = x$.

Итоговая фигура изображена на рис. 8. ■

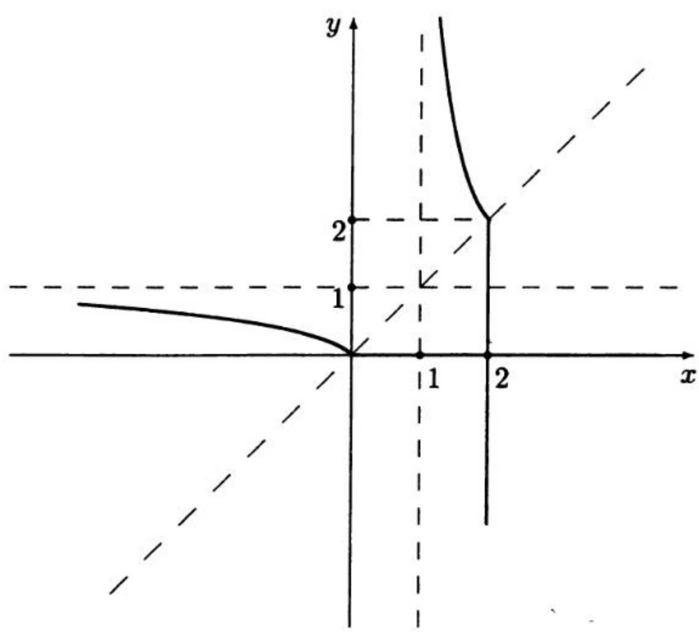

Рис. 8

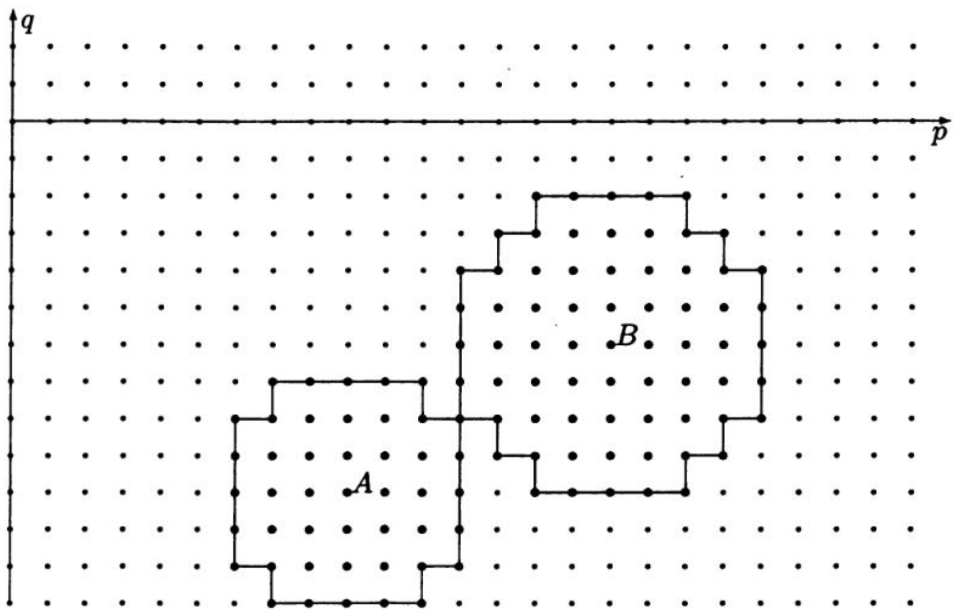

Рис. 9

□ **869.** Выделяя полные квадраты, перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases}(p-9)^2+(q+10)^2<15,\\(p-16)^2+(q+6)^2<21.\end{cases}$$

Если рассматривать p и q как непрерывные переменные, то первое неравенство системы задает внутренность круга (без границы) с центром в точке $A(9;-10)$ и радиусом $\sqrt{15}$. Второе неравенство задает внутренность круга с центром в точке $B(16;-6)$ и радиусом $\sqrt{21}$.

Если же p и q принимают только целые значения, то эти неравенства задают «созвездия» из точек двумерной целочисленной решетки, попадающих внутрь этих кругов. Чтобы наглядно представить вид этих множеств, удобно соединить граничные точки горизонтальными и вертикальными прямыми как это сделано на рис. 9.

Из этого рисунка ясно, что система имеет единственное решение $p=12; q=-8$.

Ответ: $p=12; q=-8$. ■

Решения к главе 6

□ **873.** Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — данная арифметическая прогрессия. Как и всякая арифметическая прогрессия, она полностью определяется первым членом a_1 и разностью d — эти величины обычно являются основными неизвестными в любой задаче на арифметические прогрессии.

Чтобы найти эти две неизвестные, нужно иметь (в идеале) систему из двух уравнений. Записав коротко условие задачи:

$$\begin{cases} a_3 + a_7 = 3 \cdot a_2, \\ a_1 \cdot a_4 = 40, \\ d > 0, \end{cases}$$

мы получим «заготовку» для этой системы. Чтобы превратить эту «заготовку» в обычную систему, распишем все величины a_k по формуле общего члена:

$$\begin{cases} (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = 3 \cdot (a_1 + d), \\ a_1 \cdot (a_1 + 3d) = 40, \\ d > 0, \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} a_1 = 5d, \\ a_1 \cdot (a_1 + 3d) = 40, \\ d > 0, \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} a_1 = 5d, \\ d^2 = 1, \\ d > 0, \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} d = 1, \\ a_1 = 5. \end{cases}$$

Теперь можно подсчитать любую величину, связанную с прогрессией. В частности, $S_{12} = \dfrac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 = 126$.

ОТВЕТ: $S_{12} = 126$. ■

□ **896.** Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — данная арифметическая прогрессия, первый член a_1 и разность d будем рассматривать в качестве основных неизвестных.

Запишем условие задачи в виде системы:

$$\begin{cases} a_1^5 + \cdots + a_7^5 = 0, \\ a_1^4 + \cdots + a_7^4 = 51, \\ d < 0. \end{cases}$$

Используя формулу общего члена арифметической прогрессии, получим систему относительно a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1^5 + \cdots + (a_1 + 6d)^5 = 0, \\ a_1^4 + \cdots + (a_1 + 6d)^4 = 51, \\ d < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Первое уравнение этой системы является однородным уравнением пятой степени. Чтобы его упростить, разделим обе части на d^5 (это можно делать, так как по условию задачи $d \neq 0$) и введем новую неизвестную $x = \dfrac{a_1}{d}$:

$$x^5 + (x+1)^5 + \cdots + (x+6)^5 = 0. \qquad (2)$$

Левая часть этого уравнения при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ (каждая из функций $y = x^5, y = (x+1)^5, \ldots, y = (x+6)^5$ — возрастающая). Поэтому уравнение (2) имеет и притом единственный корень x_0. Чтобы его найти, нужно обладать определенной математической интуицией: $x_0 = -3$ (формально достаточно сказать: «непосредственной проверкой убеждаемся, что $x_0 = -3$ — корень»).

Возвращаясь к основным переменным a_1 и d, имеем: $a_1 = -3d$. Теперь второе уравнение системы (1) примет вид

$$196d^4 = 51.$$

Поскольку по условию $d < 0$, это уравнение дает $d = -\sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$, так что $a_7 = -3 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$.

ОТВЕТ: $a_7 = -3 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$. ■

□ **902.** Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — данная геометрическая прогрессия. Как и всякая геометрическая прогрессия, она полностью определяется первым членом a_1 и знаменателем q — эти величины обычно являются основными неизвестными в любой задаче на геометрические прогрессии.

Чтобы найти эти две неизвестные, нужно иметь (в идеале) систему из двух уравнений. Записав коротко условие задачи:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -7, \\ a_5 = a_2 - 14, \\ a_1 > a_2 > a_3 > \dots. \end{cases}$$

мы получим «заготовку» для этой системы. Чтобы превратить эту «заготовку» в обычную систему, распишем все величины a_k по формуле общего члена:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = -7, \\ a_1q^4 = a_1q - 14, \\ a_1 > a_1q > a_1q^2 > \dots, \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_1(1 + q + q^2) = -7, \\ a_1q(q-1)(q^2+q+1) = -14, \\ a_1 > a_1q > a_1q^2 > \dots. \end{cases}$$

Исключая из первого уравнения a_1, приведем второе уравнение к виду

$$q^2 - q - 2 = 0,$$

откуда $q = -1$ или $q = 2$.

В случае $q = -1$ первый член равен $a_1 = -7$ и поэтому наша прогрессия имеет вид: $-7, +7, -7, +7, \dots$, т. е. не является убывающей.

В случае $q = 2$ получим $a_1 = -1$, поэтому наша прогрессия имеет вид $-1, -2, -4, \dots$, т. е. является убывающей.

ОТВЕТ: $q = 2$. ■

□ **906.**

1 способ. Опишем, как менялось количество лекарства, введенного в начальный момент (без учета последующих инъекций).

а) сразу после первой инъекции (скажем, что это — момент 1) в организме пациента находится 8 единиц лекарства;

б) сразу после второй инъекции (скажем, что это — момент 2) в организме пациента находится $\frac{8}{6}$ единиц лекарства;

в) сразу после третьей инъекции (скажем, что это — момент 3) в организме пациента находится $\frac{8}{6^2}$ единиц лекарства;

г) ...

д) сразу после 25-й инъекции (скажем, что это — момент 25) в организме пациента находится $\frac{8}{6^{24}}$ единиц лекарства.

Теперь опишем, как менялось количество лекарства, введенного в момент 2 (без учета остальных инъекций).

а) в момент 2 в организме пациента находится 5 единиц лекарства;

б) в момент 3 в организме пациента находится $\frac{5}{6}$ единиц лекарства;

в) ...

г) в момент 25 в организме пациента находится $\frac{5}{6^{23}}$ единиц лекарства.

Ясно, что от n-й инъекции, $n = 2,3,\dots,25$, к моменту 25 в организме пациента останется $\frac{5}{6^{25-n}}$ единиц лекарства.

Теперь общее количества лекарства в организме пациента в момент 25 можно найти как сумму

$$\frac{8}{6^{24}} + \frac{5}{6^{23}} + \dots + 5.$$

Если не принимать во внимание первое слагаемое, то это — сумма геометрической прогрессии со знаменателем 6. Поэтому ее легко подсчитать:

$$\frac{5}{6^{23}} + \dots + 5 = 6 - \frac{6}{6^{24}},$$

так что общее количества лекарства в организме пациента в момент 25 равно $6 + \frac{2}{6^{24}}$.

2 способ. Пусть x_n — общее количество лекарства в организме пациента после n-й инъекции, $n = 1,2,\dots,25$. Динамика последовательности x_n описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{6} + 5,\ n = 2,3,\dots,25. \qquad (1)$$

Это равенство можно рассматривать как функциональное уравнение для последовательности x_n. Чтобы его решить, введем новую неизвестную последовательность $y_n = x_n + t$; точное значение параметра t мы укажем позже. Для последовательности y_n уравнение (1) примет вид

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{6} + \left(5 + \frac{5t}{6}\right),\ n = 2,3,\dots,25. \qquad (2)$$

Выберем параметр t таким, чтобы второе слагаемое в правой части соотношения (2) было равно 0:

$$5 + \frac{5t}{6} = 0 \Leftrightarrow t = -6.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{6}, \ n = 2,3,\ldots,25.$$

Это равенство означает, что последовательность y_n является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1}{6}$. Значит,

$$y_n = y_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Для основной последовательности x_n это равенство дает:

$$x_n - 6 = (x_1 - 6) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Поскольку $x_1 = 8$, окончательно имеем:

$$x_n = 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

В частности,

$$x_{25} = 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{24}.$$

Ответ: $6 + \frac{2}{6^{24}}$. ■

□ **917.** Условие задачи коротко можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{6}, \\ \dfrac{b_1 + \cdots + b_{n-1}}{b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots} = 6, \\ b_1 + b_2 + \cdots = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Используя формулу общего члена, получим:

$$\begin{cases} b_1 q^{n-1} = \frac{1}{6}, \\ 1 - q^{n-1} = 6q \cdot q^{n-1}, \\ b_1 = \frac{3}{4}(1 - q). \end{cases}$$

Кроме того, поскольку b_n — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, необходимо иметь в виду условия $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$, $-1 < q < 1$.

Из первого и третьего уравнений исключим q^{n-1} и q соответственно. Второе уравнение превратится в уравнение относительно одной неизвестной b_1, откуда $b_1 = \frac{1}{2}$. Соответственно, $q = \frac{1}{3}$, $q^{n-1} = \frac{1}{3}$, так что $n = 2$.

Ответ: $n = 2$. ■

☐ **919.** Пусть a, b, c — исходные числа.

Тот факт, что эти числа образуют геометрическую прогрессию, равносилен справедливости равенства

$$b^2 = ac$$

и условия

$$a, b, c \neq 0 \qquad (1)$$

(в геометрической прогрессии по определению не может быть нулевых членов).

Тот факт, что числа $16a, 5b, c$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, равносилен справедливости равенства

$$10b = 16a + c.$$

Кроме того, по условию задачи $abc = 8$.

Итак, неизвестные a, b, c удовлетворяют системе (соотношение (1) вытекает из последнего уравнения и поэтому его можно не учитывать)

$$\begin{cases} b^2 = ac, \\ 10b = 16a + c, \\ abc = 8. \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения.

Ответ: $1; 2; 4$ или $\frac{1}{4}; 2; 16$. ■

☐ **927.**

1 способ. Чтобы решить данное функциональное уравнение, попробуем найти какое-нибудь одно решение $f_0(x)$. Нетрудно догадаться, что $f_0(x) = x^2$ является решением.

Теперь введем новую неизвестную функцию

$$g(x) = f(x) - f_0(x).$$

Для нее наше уравнение примет вид:

$$g(x+1) = g(x) \qquad \text{для всех } x. \qquad (1)$$

Уравнение (1) совпадает с определением периодической функции с периодом $T = 1$, определенной на всей числовой прямой. Поэтому решениями этого уравнения будут все периодические функции с периодом $T = 1$, определенные на всей числовой прямой, и только они. Соответственно, общее решение исходного функционального уравнения имеет вид:

$$f(x) = x^2 + g(x),$$

где $g(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом $T = 1$, определенная на всей числовой прямой. Начальное условие $f(0) = 0$ превратится в дополнительное условие, которому должны удовлетворять эти периодические функции:

$$g(0) = 0.$$

Для натуральных значений аргумента имеем:

$$f(n) = n^2 + g(n) = n^2 + g(0) = n^2.$$

2 способ. Рассмотрим исходное функциональное уравнение только для натуральных значений аргумента и введем последовательность $a_n = f(n) - f(n-1)$, $n = 1,2,\ldots$. Величину $f(n)$ можно выразить через эту последовательность следующим образом:

$$f(n) = (f(n) - f(n-1)) + (f(n-1) - f(n-2)) + \cdots$$
$$\cdots + (f(1) - f(0)) + f(0) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1.$$

Для последовательности a_n наше уравнение примет вид

$$a_n = 2(n-1) + 1.$$

Разность между соседними членами этой последовательности равна $a_{n+1} - a_n = (2n+1) - (2(n-1)+1) = 2$. Это означает, что последовательность a_n является арифметической прогрессией с разностью $d = 2$ (и первым членом $a_1 = 1$).

Теперь величину $f(n)$ можно найти как сумму n первых членов этой прогрессии:

$$f(n) = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = n^2.$$

Ответ: $f(2001) = 2001^2$. ■

□ **929.** Рассмотрим члены последовательности с нечетными номерами: a_1, a_3, $a_5, \ldots$. Они образуют новую последовательность x_k:

$$x_1 = a_1, x_2 = a_3, x_3 = a_5, \ldots, x_k = a_{2k-1}, \ldots.$$

Интересующее нас число a_{1999} будет 1000-м членом этой последовательности: $a_{1999} = x_{1000}$.

Преобразуем теперь функциональное уравнение для последовательности a_n в функциональное уравнение для последовательности x_k:

$$x_{k+1} = a_{2k+1} = 2a_{2k} = 2a_{(2k-1)+1} = 2\left(a_{2k-1} + 2\right) = 2x_k + 4.$$

Полученное функциональное уравнение для последовательности x_k имеет вид $x_{k+1} = qx_k + d$. Процедура решения подобных уравнений описана в задаче 906: новая неизвестная последовательность $y_k = x_k + 4$

удовлетворяет уравнению $y_{k+1} = 2y_k$, т. е. является геометрической прогрессией со знаменателем 2. Значит,

$$y_k = y_1 \cdot 2^{k-1}.$$

Для последовательности x_k это равенство дает (напомним, что $x_1 = a_1 = 2$):

$$x_k + 4 = (x_1 + 4) \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^k.$$

Ответ: $a_{1999} = 3 \cdot 2^{1000} - 4$. При $n = 2k - 1$ последовательность a_n задается формулой $a_n \equiv a_{2k-1} = 3 \cdot 2^k - 4$. ■

□ **936.** Перейдем во всех логарифмах к одному основанию a:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)\cdot \log_a x = \frac{n}{n+1}\cdot \log_a x.$$

Поскольку параметры a и x — произвольны, это равенство равносильно тому, что

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Используя тождество $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, преобразуем левую часть:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

что и требовалось доказать. ■

□ **944.**

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} =$$
$$= \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \dots + \frac{n+1-1}{(n+1)!} =$$
$$= \frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{4}{4!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} =$$
$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

На третьем шаге преобразований мы использовали очевидное соотношение $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$.

Ответ: $S = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$; при $n = 8$ сумма $S = \frac{362879}{362880}$. ■

□ **955.**

1 способ. Будем исходить из тождества

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Подставим вместо k последовательно числа $1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{cases} 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1, \\ 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\ \ldots \\ (n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1, \end{cases}$$

и сложим эти равенства почленно. В левой части сократятся все члены, кроме $(n+1)^3$ и 1^3. В правой части перегруппируем слагаемые так, чтобы выделить суммы

$$S^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \ldots n^2,$$
$$S^{(1)} = 1 + 2 + \cdots + n,$$
$$S^{(0)} = 1 + 1 + \cdots + 1.$$

В итоге мы получим:

$$(n+1)^3 - 1 = 3S^{(2)} + 3S^{(1} + S^{(0)}. \qquad (1)$$

Сумма $S^{(0)}$, очевидно, равна n. Сумма $S^{(1)}$ — это сумма арифметической прогрессии, так что она легко считается: $S^{(1)} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Поэтому из равенства (1) мы можем найти искомую сумму $S^{(2)}$.

2 способ. Будем использовать метод математической индукции.

а) (основание индукции) При $n = 1$ доказываемая формула сводится к верному числовому равенству

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

б) (шаг индукции) Допустим, что мы доказали нашу формулу для $n = k$. Докажем ее справедливость для $n = k+1$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots k^2 + (k+1)^2 = \left(1^2 + 2^2 + \ldots k^2\right) + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{1}{6}\, k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{1}{6}\,(k+1)\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\,(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right) = \frac{1}{6}\,(k+1)(k+2)(2k+3).$$

Правая часть последнего равенства — это в точности доказываемая формула для $n = k + 1$. ■

Решения к главе 7

☐ **960.** Так как $72 = 8 \cdot 9$, натуральное число n делится на 72 тогда и только тогда, когда оно делится на 8 и на 9.

В свою очередь,

1. натуральное число n делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное тремя последними цифрами числа n, делится на 8. В нашем случае это означает, что число $\overline{31Y}$ должно делиться на 8, т. е. быть кратным 8. Выпишем фрагмент ряда чисел, кратных 8:
$$\ldots, 304, 312, 320, 328, 336, \ldots$$
Ясно, что только одно из этих чисел имеет вид $\overline{31Y}$ — это число 312, так что $Y = 2$;

2. натуральное число n делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. В нашем случае это означает, что число $18 + X$ должно делиться на 9. Это равносильно тому, что X должно делиться на 9, а поскольку X — цифра, то $X = 0$ или $X = 9$.

Ответ: 705312, 795312. ■

☐ **967.** Найдем коэффициенты накопления, соответствующие каждой процентной ставке:
$$\begin{aligned}
i_1 &= 5\% &\Leftrightarrow\quad k_1 &= \frac{21}{20},\\
i_2 &= 12\% &\Leftrightarrow\quad k_2 &= \frac{28}{25},\\
i_3 &= 11\tfrac{1}{9}\% &\Leftrightarrow\quad k_3 &= \frac{10}{9},\\
i_4 &= 12{,}5\% &\Leftrightarrow\quad k_4 &= \frac{9}{8},\\
i &= 104\tfrac{1}{6}\% &\Leftrightarrow\quad k &= \frac{49}{24}.
\end{aligned}$$

Пусть a, b, c, d — число месяцев, в течение которых применялись процентные ставки i_1, i_2, i_3, i_4 соответственно. Тогда справедливо равенство
$$k_1^a \cdot k_2^b \cdot k_3^c \cdot k_4^d = k.$$

Подставляя числовые значения коэффициентов накопления, получим:
$$2^{3+c+2b} \cdot 3^{a+2d+1} \cdot 5^c \cdot 7^{a+b} = 2^{2a+3d} \cdot 3^{2c} \cdot 5^{a+2b} \cdot 7^2.$$

В силу единственности разложения на простые множители это равносильно системе

$$\begin{cases} 3 + c + 2b = 2a + 3d, \\ a + 2d + 1 = 2c, \\ c = a + 2b, \\ a + b = 2, \end{cases}$$

которая легко решается методом исключения:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 3, \\ d = 2. \end{cases}$$

Ответ: $7 = 1 + 1 + 3 + 2$ месяцев. ■

□ **969.** Примем момент 11^{15} в качестве нулевого и будем измерять время в минутах. Тогда катер первого маршрута появляется на пристани в моменты $\ldots, -30, 0, 30, 60, \ldots$. Иначе говоря, последовательные моменты времени, когда катер первого маршрута приходит на пристань, являются целыми числами, кратными 30. Аналогично, последовательные моменты времени, когда катер второго маршрута приходит на пристань, являются целыми числами, кратными 36, а последовательные моменты времени, когда катер третьего маршрута приходит на пристань, являются целыми числами, кратными 45.

Если в какой-то момент t катера всех трех маршрутов встретились на пристани, то этот момент кратен числам 30, 36, 45, т. е. является их общим кратным. Известно, что общие кратные и только они кратны наименьшему общему кратному:

$$t = (30, 36, 45) \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Чтобы найти $K = (30, 36, 45)$, разложим числа $30, 36, 45$ на простые множители. Тогда K будет равно произведению всех простых множителей, которые входят в разложения этих чисел, с наибольшим показателем:

$$K = (2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180.$$

Итак, катера всех трех маршрутов встречаются на пристани в моменты времени, кратные числу 180, т. е. каждые три часа.

Поскольку одна из таких встреч произошла в 11^{15}, предыдущие встречи были в 8^{15}, 5^{15} и т. д., а последующие — в 14^{15}, 17^{15}, 20^{15} и т. д. В промежуток от 7^{40} до 17^{35} попадает 4 таких события.

Ответ: 4. ■

□ **972.** Двучлен $n^4 + 64$ можно разложить на два квадратичных множителя:

$$n^4 + 64 = n^4 + 16n^2 + 64 - 16n^2 = (n^2 + 8)^2 - (4n)^2$$
$$= (n^2 + 4n + 8)(n^2 - 4n + 8).$$

Если n — натуральное, то числа $n^2 + 4n + 8$ и $n^2 - 4n + 8$ также натуральные. Первое из них явно больше 8. Второе можно представить как $(n-2)^2 + 4$, так что оно не меньше 4. Итак, мы разложили число $n^4 + 64$ на два множителя, не равных 1. Значит, оно не является простым.

Ответ: нет. ■

□ **983.** Допустим противное, т. е. что $\sqrt[3]{2}$ — число рациональное. Тогда существуют натуральные m, n такие, что

$$\sqrt[3]{2} = \frac{n}{m}.$$

Избавляясь от радикала и дроби, получим

$$n^3 = 2m^3. \tag{1}$$

Разложим числа m и n на простые множители (мы явно указываем только простой множитель 2):

$$m = 2^a \cdot \ldots,$$
$$n = 2^b \cdot \ldots,$$

где a, b — неотрицательные целые числа (отсутствие простого множителя 2 в разложении означает, что соответствующий показатель степени равен 0).

Тогда равенство (1) примет вид

$$2^{3b} \cdot \ldots = 2^{3a+1} \cdot \ldots$$

В силу единственности разложения натурального числа на простые множители

$$3b = 3a + 1 \Leftrightarrow 3(b - a) = 1,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. ■

□ **992.** Дробь можно сократить на наибольший общий делитель числителя и знаменателя (если он больше 1) и его делители, отличные от 1. Поэтому фактически задача сводится к нахождению $d = (5l + 6, 8l + 7)$. Для ее решения будем использовать классический алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Этот алгоритм базируется на следующем простом факте: для любых целых чисел x и y верно равенство

$$(x, y) = (y, x) = (y, x - y).$$

Будем последовательно применять его к рассматриваемым числам (начиная с $x = 8l + 7$ и $y = 5l + 6$), до тех пор, пока в одном из них не исчезнет переменная l:

$$\begin{aligned} d \equiv (8l + 7, 5l + 6) &= (5l + 6, 3l + 1) = \\ &= (3l + 1, 2l + 5) = (2l + 5, l - 4) = \\ &= (l - 4, l + 9) = (l - 4, 13). \end{aligned}$$

Поскольку 13 — простое число, $(l - 4, 13)$ может быть равен только 1 или 13, т. е. нашу дробь можно сократить (если она сократима) только на 13 (и -13).

Более того, можно указать все случаи, когда это сокращение действительно возможно. Для этого воспользуемся следующим фактом: если x — целое число, а y — натуральное, то $(x, y) = y$ тогда и только тогда, когда x делится на y, т. е. $x = ky$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. В нашем случае это означает, что $(l - 4, 13) = 13$ тогда и только тогда, когда $l = 4 + 13k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: ± 13. ■

□ **996.** Рассмотрим выражение в левой части как квадратный трехчлен относительно x (неизвестную y будем считать параметром). Тогда дискриминант $D = 25y^2 - 24y^2 = y^2$, $x_{1,2} = \dfrac{-5y \pm y}{6} = -y; -\dfrac{2y}{3}$. Поэтому левую часть нашего уравнения можно разложить на линейные множители:

$$(x + y)(3x + 2y) = 7. \qquad (1)$$

Поскольку числа x, y — целые, множители $x + y$, $3x + 2y$ также целые, т. е. равенство (1) дает разложение простого числа 7 на два целых множителя. Это можно сделать только четырьмя следующими способами:

$$7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7) = (-7) \cdot (-1).$$

Соответственно, уравнение (1) расщепляется на четыре системы:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 2y = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7, \\ 3x + 2y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ 3x + 2y = -7, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение, причем значения неизвестных являются целыми числами.

Ответ: $\{(5; -4), (-13; 20), (-5; 4), (13; -20)\}$. ■

☐ **1015.** Исключим z из второго уравнения системы: $z = y + 7$. Тогда первое уравнение примет вид

$$11x = 7(y + 1). \tag{1}$$

Левая часть равенства (1) делится на 11. Следовательно, правая часть также делится на 11. Поскольку числа 7 и 11 не имеют общих делителей, это означает, что $y + 1$ делится на 11, т. е. существует такое целое k, что $y + 1 = 11k$. Аналогичные рассуждения показывают, что x делится на 7, т. е. существует такое целое l, что $x = 7l$. Исключая с помощью равенств $x = 7l$ и $y + 1 = 11k$ неизвестные x и y, для новых неизвестных k и l мы получим уравнение

$$k = l.$$

Его общее решение в целых числах имеет вид: $(k, l) = (n, n)$, где n — произвольное целое число. Соответственно, общее решение в целых числах уравнения (1) имеет вид: $(x, y) = (7n, 11n - 1)$, где n — произвольное целое число. Чтобы x и y были натуральными, должны быть выполнены условия $7n > 0$, $11n - 1 > 0$, что равносильно тому, что n — натуральное число. Если y — натуральное число, то $z = y + 7$ автоматически будет натуральным.

Итак, общее решение системы из двух первых уравнений в натуральных числах имеет вид $(x, y, z) = (7n, 11n - 1, 11n + 6)$, где n — произвольное натуральное число.

Дополнительное условие $x \leqslant 20$ означает, что параметр $n \leqslant 2$. Итак, для n есть всего два возможных значения: 1 и 2. Им соответствуют два набора неизвестных (x, y, z): $(7; 10; 17)$ и $(14; 21; 28)$.

Ответ: $(7; 10; 17)$, $(14; 21; 28)$. ■

☐ **1024.** Тот факт, что остаток от деления числа n на 6 равен 4, означает, что существует неотрицательное целое k такое, что $n = 6k + 4$. Аналогично, существует неотрицательное целое l такое, что $n = 15l + 7$. Исключая из этих равенств число n, для k и l получим уравнение

$$2k - 5l = 1. \tag{1}$$

Чтобы решить это уравнение, прежде всего найдем какое-нибудь частное (т. е. конкретное) решение в целых (не обязательно неотрицательных) числах. Обычно это делают перебором нескольких вариантов. В нашем случае в качестве такого частного решения можно взять, например, $k = -2$, $l = -1$, так что верно равенство:

$$2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) = 1. \tag{2}$$

Вычитая из уравнения (1) равенство (2), получим:

$$2(k + 2) = 5(l + 1).$$

Общее решение этого уравнения в целых числах имеет вид $k+2=5a$, $l+1=2a$, где a — произвольное целое число. Чтобы числа k и l были неотрицательными, параметр a должен быть натуральным числом.

Теперь для числа n имеем:

$$n = 6k+4 = 6(5a-2)+4 = 30a-8 = 30(a-1)+22.$$

Поскольку целое число $a-1$ неотрицательно, последнее равенство означает, что остаток от деления n на 30 равен 22.

Ответ: 22. ■

□ **1033.** Выразим из данного уравнения y через x:

$$y = -\frac{14x+71}{3x+17}.$$

При этом следует отметить, что величина $3x+17 \neq 0$ (так как x — целое число).

Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя):

$$y = -\frac{14}{3} + \frac{25}{3(3x+17)},$$

и умножим почленно на 3, чтобы превратить число $\frac{14}{3}$ в целое:

$$3y = -14 + \frac{25}{3x+17}.$$

Поскольку числа $3y$ и 14 — целые, $3x+17$ должно быть делителем числа 25: $3x+17 = \pm1; \pm5; \pm25$ — всего шесть возможностей. Отсюда для x получаем три возможных значения: $-4, -6, -14$ (в остальных трех случаях x не является целым). Соответствующие значения y равны $-3, -13, -5$. Поскольку все они являются целыми числами, исходное уравнение имеет три решения в целых числах.

Ответ: $(-4; -3), (-6; -13), (-14; -5)$. ■

□ **1050.** Квадрат целого числа n дает при делении на 4 в остатке 0 или 1. Действительно, если число n — четное, т. е. $n = 2k$, то $n^2 = 4k^2$, так что остаток от деления на 4 равен 0. Если число n — нечетное, т. е. $n = 2k+1$, то $n^2 = 4(k^2+k)+1$, так что остаток от деления на 4 равен 1.

Поэтому сумма квадратов двух любых натуральных чисел при делении на 4 может давать в остатке только 0, 1 или 2. Следовательно, любое натуральное число вида $n = 4k+3$ (таких чисел бесконечно много) нельзя представить в виде суммы квадратов двух других натуральных чисел. ■

□ **1083.** В левой части нашего равенства стоит многочлен второй степени, а в правой — третьей. Поэтому для достаточно больших значений неизвестных правая часть будет больше левой. Оставшееся конечное число возможных значений неизвестных проанализировать гораздо проще.

Эти общие соображения можно превратить в аккуратное решение, например, следующим образом.

Перепишем уравнение в виде

$$xy\left(\frac{5}{3}z-3\right)+yz\left(\frac{5}{3}x-3\right)+xz\left(\frac{5}{3}y-3\right)+3=0.$$

Если $x, y, z \geqslant 2$, то выражения в скобках в левой части этого равенства — положительны, а тогда и вся левая часть положительна.

Значит, хотя бы одна из неизвестных равна 1. Допустим, для определенности, что $x = 1$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$3y + 3z = 2yz + 3.$$

Его можно решить с использованием теории делимости. Прежде всего, выразим z через y:

$$z = 3\,\frac{y-1}{2y-3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2y-3}\,.$$

Умножим это равенство на 2, чтобы избавиться от дроби $\frac{3}{2}$:

$$2z = 3 + \frac{3}{2y-3}\,.$$

Отсюда следует, что $2y-3$ является делителем числа 3, т. е. $2y - 3 = \pm1; \pm3$. Это дает для y значения 2, 1, 3 и 0. Соответствующие значения z равны 3, 0, 2, 1. Поскольку нас интересует решение в натуральных числах, остается только две пары: $(y, z) = (2, 3)$ и $(y, z) = (3, 2)$, что дает два решения исходного уравнения: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ и $(x, y, z) = (1, 3, 2)$.

Поскольку неизвестные входят в исходное уравнение симметрично, случаю $y = 1$ соответствует два решения $(2, 1, 3)$ и $(3, 1, 2)$, а случаю $z = 1$ — два решения $(2, 3, 1)$ и $(3, 2, 1)$.

Ответ: $(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (3; 1; 2), (2; 3; 1), (3; 2; 1)$. ■

Решения к главе 8

☐ **1117.** Обычно решение текстовых задач состоит из трех этапов:

1. «перевод» условия задачи с русского языка на язык математики;
2. решение полученной математической задачи;
3. интерпретация найденного решения в терминах исходной задачи.

Для данной задачи первый этап — очень легкий.

Пусть x, y и z — стоимость (в рублях) 1 кг лука, картофеля и огурцов соответственно. Из условия задачи следует, что эти неизвестные удовлетворяют системе из двух уравнений

$$\begin{cases} 0{,}5x + 3y + z = 2{,}38, \\ 2x + 4z = 8{,}2. \end{cases}$$

Второй этап сложнее, так как мы имеем систему из *двух* уравнений с *тремя* неизвестными.

Решим ее методом исключения.

Из первого уравнения исключим z: $z = 2{,}38 - 0{,}5x - 3y$. Тогда второе уравнение примет вид

$$12y = 1{,}32,$$

откуда $y = 0{,}11$. Но после исключения z у нас осталось две неизвестные: x и y. Поскольку никаких уравнений больше нет, неизвестная x может принимать произвольное действительное значение: $x = t$, где $t \in \mathbb{R}$. Теперь можно восстановить неизвестную z: $z = 2{,}05 - 0{,}5t$.

Таким образом, исходная система двух уравнений с тремя неизвестными имеет бесконечно много решений, которые зависят от одного параметра: $(x; y; z) = (t; 0{,}11; 2{,}05 - 0{,}5t)$, $t \in \mathbb{R}$ (если учитывать физический смысл неизвестных, то $(x; y; z) = \frac{1}{100} \cdot (u; 11; 205 - 50u)$, $u = 1, 2, 3, 4$).

Теперь можно найти искомую величину $f = x + 2y + 2z$:

$$f = t + 2 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot (2{,}05 - 0{,}5t) = 4{,}32.$$

Итак, для любого из бесконечного числа решений исходной системы искомая величина принимает одно и то же значение.

Отметим, что после того как мы нашли значение y, можно сразу определить искомую величину f с помощью следующего преобразования:

$$f = x + 2y + 2z = 2(0{,}5x + y + z) =$$
$$= 2(0{,}5x + 3y + z - 2y) = 2 \cdot (2{,}38 - 2 \cdot 0{,}11) = 4{,}32.$$

Ответ: 4 руб. 32 коп. ■

☐ **1129.** Пусть $\overline{ab}$ — искомое двузначное число. То есть в качестве неизвестных мы вводим a — число десятков и b — число единиц. Эти переменные могут быть только цифрами от 1 до 9 (значение 0 исключено, так как и a, и b являются первыми цифрами некоторых двузначных чисел; впрочем, условие задачи можно толковать и так, что случай $b = 0$ не исключен).

Условие задачи можно записать в виде системы (неравенства выражают тот факт, что остаток меньше делителя)

$$\begin{cases} \overline{ab} = 6(a+b) + 8, \\ a + b > 8, \\ \overline{ba} = 15(a-b) + 2, \\ a - b > 2. \end{cases}$$

Запись $\overline{xy}$ через обычные действия интерпретируется формулой $10x + y$, что позволяет переписать систему в виде

$$\begin{cases} 4a - 5b = 8, \\ 25b - 14a = 2, \\ a + b > 8, \\ a - b > 2. \end{cases}$$

Система из двух первых уравнений имеет единственное решение $a = 7$, $b = 4$. Это решение удовлетворяет неравенствам системы.

ОТВЕТ: 74. ■

□ **1139.** Пусть x — популярность продукта А в начале 2002 года, y — популярность продукта Б в начале 2002 года. По условию $x = \frac{2}{3}y$, так что дальше мы будем работать только с величиной y.

В начале 2003 года популярность продукта А стала равной

$$x_1 = x + 20\% \cdot x = 1{,}2x = \frac{6}{5}x = \frac{4}{5}y,$$

а популярность продукта Б —

$$y_1 = y - 20\% \cdot y = 0{,}8y = \frac{4}{5}y.$$

В начале 2004 года популярность продукта А стала равной

$$x_2 = x_1 - 10\% \cdot x_1 = 0{,}9x_1 = \frac{18}{25}y,$$

а популярность продукта Б —

$$y_2 = y_1 = \frac{4}{5}y.$$

В начале 2005 года популярность продукта Б стала равной

$$y_3 = y_2 + 40\% \cdot y_2 = 1{,}4y_2 = \frac{28}{25}y.$$

По условию в конце 2004 года популярность продукта А сравнялась с популярностью продукта Б, т. е. стала равной

$$x_3 = y_3 = \frac{28}{25}y.$$

Следовательно, за 2004 год относительное изменение популярности продукта A составило (переменная y сокращается)

$$t = \frac{x_3 - x_2}{x_2} = \frac{5}{9} = \frac{500}{9}\% = 55\frac{5}{9}\%.$$

Поскольку эта величина положительна, за 2004 год популярность продукта A выросла, а не уменьшилась.

ОТВЕТ: популярность продукта A за 2004 год выросла на $55\frac{5}{9}\%$. ■

□ **1172.** При решении текстовых задач на смеси основными являются понятия *абсолютного* и *относительного* содержания вещества в смеси.

Абсолютное содержание вещества в смеси — это количество вещества, выраженное в обычных единицах измерения (грамм, литр и т. д.).

Относительное содержание вещества в смеси — это отношение абсолютного содержания к общей массе (объему) смеси. Часто относительное содержание называют концентрацией или процентным содержанием.

Решение любой задачи на смеси обычно сводится к расчету абсолютного и относительного содержания компонент смесей, фигурирующих в условии задачи. Хотя часто эта информация избыточна,. лучше не ломать голову над тем, что может понадобиться в процессе решения, а что нет.

Имея в виду эти общие соображения, проанализируем ситуацию, описанную в нашей задаче.

Руда.
1. Общая масса 24 т.
2. Относительное содержание примесей $40\% \equiv \frac{2}{5}$.
3. Абсолютное содержание примесей $\frac{2}{5} \cdot 24 = \frac{48}{5}$ (т).
4. Относительное содержание чистого металла $60\% \equiv \frac{3}{5}$.
5. Абсолютное содержание чистого металла $\frac{3}{5} \cdot 24 = \frac{72}{5}$ (т).

Металл.
1. Общая масса x т.
2. Относительное содержание примесей $4\% \equiv \frac{1}{25}$.
3. Абсолютное содержание примесей $\frac{1}{25} \cdot x$ (т).
4. Относительное содержание чистого металла $96\% \equiv \frac{24}{25}$.
5. Абсолютное содержание чистого металла $\frac{24}{25} \cdot x$ (т).

В процессе плавки из руды удаляется большая часть примесей, а общее количество чистого металла остается неизменным, т. е.

$$\frac{24}{25} \cdot x = \frac{72}{5},$$

откуда $x = 15$.

ОТВЕТ: 15 тонн. ■

☐ **1181.** Пусть x (кг) — масса первого слитка, так что масса второго слитка равна $(x+3)$ (кг). Первый слиток содержит $0{,}1x$ кг меди, а второй — $0{,}4(x+3)$ (кг). Поэтому сплав содержит $0{,}5x+1{,}2$ (кг) меди, а его масса равна $2x+3$ (кг). Поэтому относительное содержание меди в сплаве равно $\frac{0{,}5x+1{,}2}{2x+3}$. По условию задачи эта величина равна 0,3:

$$\frac{0{,}5x+1{,}2}{2x+3}=0{,}3.$$

Решая это уравнение, получим $x=3$, так что масса сплава равна 9 кг.

Ответ: 9 кг. ■

☐ **1184.** Пусть x — искомый объем кофе (в миллилитрах). Отлить это количество из чашки можно, если $0 \leqslant x \leqslant 100$.

После того, как из чашки перелили в кувшин x мл кофе, в чашке осталось $(100-x)$ мл кофе, а в кувшине оказалось $(300+x)$ мл смеси кофе и молока. Абсолютное содержание молока в кувшине равно 300 мл, а его концентрация равна $\frac{300}{300+x}$.

Количество смеси, которое перелили из кувшина в чашку, очевидно, равно x мл (чашка должна быть снова наполнена до краев). Относительное содержание молока в этой части смеси такое же, как и в кувшине, т. е. $\frac{300}{300+x}$. Поэтому абсолютное содержание молока в этой части смеси равно $\frac{300x}{300+x}$.

После того, как чашка опять наполнится, абсолютное содержание молока в ней будет $\frac{300x}{300+x}$. По условию задачи эта величина должна быть равна 50 мл (половине объема чашки). Решая уравнение

$$\frac{300x}{300+x}=50,$$

получим $x=60$. Это значение удовлетворяет отмеченному в начале решения ограничению $0 \leqslant x \leqslant 100$.

Ответ: 60 мл.

■

☐ **1194.** Обозначим через x абсолютное содержание соли (в килограммах) в исходном растворе. Соответственно относительное содержание соли равно $\frac{x}{9}$.

По условию каждый раз отливали и доливали жидкости ровно $\frac{x}{2}$ кг (воду добавляли один раз и ее вес вдвое меньше первоначального веса соли). Поскольку первоначально в сосуде находилось 9 кг раствора, эта операция возможна, если $0 < \frac{x}{2} < 9$, т. е. $0 < x < 18$ — это ограничение мы используем на заключительном этапе решения.

После того как первый раз отлили $\frac{x}{2}$ кг раствора, его масса стала равной $\left(9 - \frac{x}{2}\right)$ кг. При этом концентрация соли не изменилась, т. е. осталась равной $\frac{x}{9}$. Значит, абсолютное содержание соли в этой части раствора равно $\frac{x}{9} \cdot \left(9 - \frac{x}{2}\right) = \frac{18x - x^2}{18}$ кг.

После того как добавили $\frac{x}{2}$ кг воды, масса раствора опять стала 9 кг. При этом абсолютное содержание соли не изменилось, т. е. осталось равным $\frac{18x - x^2}{18}$ кг. Соответственно, концентрация соли станет $\frac{18x - x^2}{162}$.

После того как второй раз отлили $\frac{x}{2}$ кг раствора, его масса стала равной $\left(9 - \frac{x}{2}\right)$ кг. При этом концентрация соли не изменилась, т. е. осталась равной $\frac{18x - x^2}{162}$. Значит, абсолютное содержание соли в этой части раствора равно $\frac{18x - x^2}{162} \cdot \left(9 - \frac{x}{2}\right) = \frac{x(18 - x)^2}{324}$ кг.

По условию задачи эта величина равна $\frac{4x}{9}$ кг, откуда

$$\frac{x(18 - x)^2}{324} = \frac{4x}{9}.$$

Это уравнение имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 30$, $x_3 = 6$. По смыслу задачи подходит только третий корень.

ОТВЕТ: первоначально в сосуде находилось 6 кг соли. ■

□ **1197.** Пусть V — объем бассейна (в каких нибудь единицах измерения, например, м^3), p_1 — производительность первой трубы, p_2 — производительность второй трубы. Тогда первая труба наполнит бассейн за время $t_1 = \frac{V}{p_1}$, вторая — за время $t_2 = \frac{V}{p_2}$, а обе трубы, открытые одновременно, — за время $t_{1+2} = \frac{V}{p_1 + p_2}$ (при совместной работе производительности складываются).

По условию задачи

$$\begin{cases} \dfrac{V}{p_1} = \dfrac{V}{p_1 + p_2} + 2, \\ \dfrac{V}{p_2} = \dfrac{V}{p_1 + p_2} + 4{,}5. \end{cases}$$

Поскольку в задаче нигде не упомянута единица измерения объемов, ее можно взять какой угодно, например в качестве этой единицы может быть выбран объем бассейна. Тогда $V = 1$ и эта система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p_1} = \dfrac{1}{p_1 + p_2} + 2, \\ \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{p_1 + p_2} + 4{,}5. \end{cases}$$

Если мы вычтем уравнения почленно и сохраним одно из исходных уравнений, например первое, то получим систему, равносильную первоначальной:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p_1} = \dfrac{1}{p_1 + p_2} + 2, \\ \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_1} = 2{,}5. \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения; она имеет два решения: $(p_1; p_2) = \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{15}\right)$ и $(p_1; p_2) = \left(-1; \frac{2}{3}\right)$. Второе решение не подходит по смыслу задачи (производительности — положительные величины).

Теперь можно найти искомые величины t_1 и t_2:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{p_1} = 5, \\ t_2 = \dfrac{1}{p_2} = 7{,}5. \end{cases}$$

Ответ: 5 часов и 7 часов 30 минут. ■

□ **1247.** Для текстовых задач на движение особенно трудным обычно является этап «перевода» условия задачи с русского языка на язык математики. Для того чтобы безошибочно пройти его, нужно двигаться небольшими шагами, читая (и переводя на язык математики) условие задачи небольшими фрагментами. Читать условие задачи до конца часто не имеет смысла хотя бы потому, что в конце уже трудно вспомнить, о чем шла речь в начале.

После этих общих комментариев приступим к решению задачи.

- «Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист».

  Эта фраза предполагает введение основных величин, характеризующих движение: s — расстояние от A до B, x — скорость пешехода, y — скорость мотоциклиста.
- «Встретив в пути пешехода...»

Найдем момент встречи t_1, считая, что движение пешехода и мотоциклиста началось в момент $t_0 = 0$. Момент t_1 характеризуется тем, что путь, пройденный до встречи пешеходом, xt_1, и путь, пройденный до встречи мотоциклистом, yt_1, в сумме дают все расстояние от A до B: $xt_1 + yt_1 = s$, откуда

$$t_1 = \frac{s}{x+y}.$$

Отметим, что равенство $xt_1 + yt_1 = s$ можно получить и из более общих соображений, которые полезны при решении более сложных задач на движение. Именно, введем систему координат на дороге из A в B, считая, что пункт A является началом отсчета, а в качестве положительного выбрано направление от A к B. В терминах координат факт встречи означает совпадение координат движущихся точек в момент встречи. До момента встречи координата пешехода меняется по закону $x(t) = x \cdot t$, а координата мотоциклиста — по закону $y(t) = s - y \cdot t$. В момент встречи $x(t_1) = y(t_1)$, т. е. $x \cdot t_1 = s - y \cdot t_1$.

- «мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B»

  Найдем, сколько времени потребуется мотоциклисту, чтобы доехать до пункта B.

  Поскольку расстояние от места встречи, C, до пункта B равно $y \cdot t_1$, а скорость мотоциклиста — y, это время равно t_1. Конечно, это очевидно непосредственно: так как скорость мотоциклиста не менялась, время на путь из B в C такое же, как и время на путь от C до B. Однако, если бы скорость мотоциклиста менялась (такое условие не редкость в задачах на движение), первый метод был бы единственно возможным.
- «а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда и беспрепятственно добрался»

  Найдем, в какой момент мотоциклист окажется в пункте A.

  Поскольку расстояние от пункта B до пункта A равно s, а скорость мотоциклиста — y, время на путь от B до A равно $t_2 = \dfrac{s}{y}$. Таким образом, мотоциклист окажется в пункте A в момент $t_3 = t_1 + t_1 + t_2 = \dfrac{2s}{x+y} + \dfrac{s}{y}$ (считая от момента $t_0 = 0$).
- «во сколько раз больше времени мотоциклист затратил на дорогу до пункта A по сравнению с тем временем, за которое он проехал бы путь от B до A, не подвозя пешехода»

Как мы подсчитали в предыдущем пункте, мотоциклист затратил на дорогу до пункта A время $t_3 = \frac{2s}{x+y} + \frac{s}{y}$. Если бы он не подвозил пешехода, то это время было бы равно $\frac{s}{y}$.

Поэтому вопрос задачи звучит так: найти отношение

$$f = \frac{\frac{2s}{x+y} + \frac{s}{y}}{\frac{s}{y}} = \frac{2y}{x+y} + 1.$$

- «если известно, что пешеход в четыре раза быстрее добрался до пункта B по сравнению с тем временем, которое ему понадобилось бы, чтобы пройти весь путь от A до B пешком»

  Реально пешеход добрался до пункта B за время $t_1 + t_1 = \frac{2s}{x+y}$ (до места встречи C он шел время t_1, а затем такое же время вместе с мотоциклистом ехал от C до B). Если бы он шел весь путь от A до B пешком, то потратил бы время $\frac{s}{x}$. Из условия задачи следует, что $\frac{2s}{x+y} = \frac{1}{4}\frac{s}{x}$. Это равенство легко преобразуется в соотношение $y = 7x$ — фактически к одному этому уравнению сводится условие задачи.

Итак, на математическом языке наша задача звучит следующим образом: зная, что $y = 7x$, найдите величину $f = \frac{2y}{x+y} + 1$.

Решение этой математической задачи тривиально:

$$f = \frac{2y}{x+y} + 1 = \frac{14x}{8x} + 1 = \frac{11}{4},$$

что непосредственно дает ответ исходной текстовой задачи.

Ответ: $\frac{11}{4}$. ■

□ **1300.** Пусть t_1 (t_2) — время, за которое первое (второе) тело проходит окружность. По условию

$$t_1 = t_2 - 2. \tag{1}$$

Чтобы перевести на язык математики второе условие задачи («первое тело … догоняет второе тело каждые 12 с») введем угловые скорости тел: ω_1 и ω_2 (рад/с).

Относительно второго тела первое движется с угловой скоростью $\omega_1 - \omega_2$. Поэтому второе условие задачи можно записать в виде

$$12(\omega_1 - \omega_2) = 2\pi.$$

Поскольку (по определению) $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{t_1}$, $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{t_2}$, это уравнение равносильно уравнению
$$12\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) = 1. \qquad (2)$$
Система из уравнений (1) и (2) легко решается методом исключения. Она имеет два решения: $t_1 = 4$, $t_2 = 6$ и $t_1 = -6$, $t_2 = -4$. Второе решение не подходит по физическому смыслу задачи.

ОТВЕТ: 4 с и 6 с соответственно. ■

□ **1316.** Пусть n (машин в сутки) — первоначальная производительность первого автомобильного завода, m (машин в сутки) — первоначальная производительность второго автомобильного завода.

По условию
$$\begin{cases} n \leqslant 950, \\ m = \dfrac{19}{20}n. \end{cases}$$

После ввода дополнительной линии производительность второго завода стала равной $m + \dfrac{23}{100}n$. По условию
$$m + \frac{23}{100}n > 1000.$$

Кроме того, в задаче предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин. Поэтому величина $\dfrac{23}{100}n$ является целым числом. Это равносильно тому, что n кратно 100: $n = 100k$.

Если вместо n использовать эту новую переменную, то приведенные выше уравнение и неравенства примут следующий вид:
$$\begin{cases} 100k \leqslant 950, \\ m = 95k, \\ m + 23k > 1000. \end{cases}$$
Исключая неизвестную m, получим двойное неравенство для k: $8\dfrac{28}{59} < k \leqslant 9\dfrac{1}{2}$. Это неравенство имеет единственное решение в натуральных числах: $k = 9$. Соответственно, $n = 900$ и $m = 855$.

ОТВЕТ: 900 и 855. ■

Решения к главе 9

□ **1324.** Начнем решать это неравенство как обычное неравенство с одной неизвестной x, не обращая внимания на наличие параметра (как будто вместо b стоит конкретное число).

Раскрывая модуль, получим двойное неравенство

$$-x - 3 \leqslant b - 2x \leqslant x + 3,$$

или, что то же самое, систему из двух неравенств

$$\begin{cases} b - 2x \leqslant x + 3, \\ b - 2x \geqslant -x - 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geqslant b - 3, \\ x \leqslant b + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{b-3}{3}, \\ x \leqslant b + 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Теперь мы должны образовать пересечение двух полупрямых: $\left[\dfrac{b-3}{3}; +\infty\right)$ — это множество решений первого неравенства системы (1), и $(-\infty; b+3]$ — это множество решений второго неравенства системы (1). Результат будет зависеть от взаимного расположения точек $\dfrac{b-3}{3}$ и $b+3$ на числовой оси. Поэтому в этом месте наше решение начнет зависеть от параметра.

1 случай. Если $\dfrac{b-3}{3} < b + 3$, т. е. $b > -6$, то эти полупрямые имеют непустое пересечение — это отрезок $\left[\dfrac{b-3}{3}; b+3\right]$.

2 случай. Если $\dfrac{b-3}{3} = b+3$, т. е. $b = -6$, то пересечение полупрямых $\left[\dfrac{b-3}{3}; +\infty\right) \equiv [-3; +\infty)$ и $(-\infty; b+3] \equiv (-\infty; -3]$ будет состоять из одной точки $x = -3$.

3 случай. Если $\dfrac{b-3}{3} > b + 3$, т. е. $b < -6$, то эти полупрямые не пересекаются, так что решением системы (1) будет пустое множество.

Ответ: если $b > -6$, то $\dfrac{b-3}{3} \leqslant x \leqslant b+3$; если $b = -6$, то $x = -3$; если $b < -6$, то $\varnothing$. ■

□ **1325.** Начнем решать это неравенство как обычное неравенство с одной неизвестной x, не обращая внимания на наличие параметра (как будто вместо a стоит конкретное число).

Прежде всего разложим левую часть на множители методом группировки:

$$(ax^4 + 2ax^2) + (x^3 + 2x) + (3a^3x^2 + 6a^3) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$ax^2(x^2 + 2) + x(x^2 + 2) + 3a^3(x^2 + 2) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(ax^2 + x + 3a^3) \cdot (x^2 + 2) > 0$$

Поскольку выражение $x^2 + 2$ положительно при всех значениях x, на него можно сократить, так что неравенство примет вид

$$ax^2 + x + 3a^3 > 0. \tag{1}$$

С того места наше решение начнет зависеть от значения параметра. Прежде всего, от значения параметра зависит тип неравенства (1): если $a \neq 0$, то это — квадратичное неравенство, а если $a = 0$, то — линейное. При решении квадратичного неравенства необходимо учитывать знак старшего коэффициента. Поэтому случай $a \neq 0$ мы разобьем на два: $a > 0$ и $a < 0$.

1 случай: $a = 0$. Неравенство (1) примет вид $x > 0$, так что множество его решений — это луч $(0; +\infty)$.

2 случай: $a > 0$. Это означает, что ветви параболы

$$y = ax^2 + x + 3a^3 \tag{2}$$

идут вверх.

Поскольку неравенство (1) — квадратичное, подсчитаем его дискриминант: $D = 1 - 12a^4$. Дальнейшее решение неравенства (1) зависит от знака D.

случай 2.1: $D < 0$. В терминах переменной a условие $D < 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a > 0$):

$$1 - 12a^4 < 0 \Leftrightarrow a^4 > \frac{1}{12} \Leftrightarrow a > \frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D < 0$, то парабола (2) не пересекает ось абсцисс, так что решением неравенства (1) будет вся числовая прямая.

случай 2.2: $D = 0$. В терминах переменной a условие $D = 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a > 0$):

$$1 - 12a^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D = 0$, то парабола (2) касается оси абсцисс в точке $x_0 = -\frac{1}{2a} = -\frac{\sqrt[4]{12}}{2}$, так что множество решений неравенства (1) — числовая прямая с выколотой точкой x_0.

случай 2.3: $D > 0$. В терминах переменной a условие $D > 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a > 0$)

$$1 - 12a^4 > 0 \Leftrightarrow a^4 < \frac{1}{12} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D > 0$, то парабола (2) пересекает ось абсцисс в двух точках:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a},$$

так что решением неравенства (1) будет множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

3 случай: $a < 0$. Это означает, что ветви параболы (2) идут вниз. Дискриминант дается той же формулой, что и случае 2: $D = 1 - 12a^4$. Дальнейшее решение неравенства (1) также определяется знаком D.

случай 3.1: $D < 0$. В терминах переменной a условие $D < 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a < 0$)

$$1 - 12a^4 < 0 \Leftrightarrow a^4 > \frac{1}{12} \Leftrightarrow a < -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D < 0$, то парабола (2) не пересекает ось абсцисс, так что решением неравенства (1) будет пустое множество.

случай 3.2: $D = 0$. В терминах переменной a условие $D = 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a < 0$)

$$1 - 12a^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}.$$

Если $D = 0$, то парабола (2) касается оси абсцисс в точке $x_0 = -\frac{1}{2a} = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$, так что решением неравенства (1) будет пустое множество (поэтому случаи 3.1 и 3.2 можно объединить в один).

случай 3.3: $D > 0$. В терминах переменной a условие $D > 0$ означает, что (мы учитываем тот факт, что рассматривается случай $a < 0$)

$$1 - 12a^4 > 0 \Leftrightarrow a^4 < \frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt[4]{12}} < a < 0.$$

Если $D > 0$, то парабола (2) пересекает ось абсцисс в двух точках:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a},$$

так что решением неравенства (1) будет интервал $(x_2; x_1)$ ($x_2 < x_1$ при $a < 0$).

Ответ:
если $a \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $\varnothing$;
если $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}; 0\right)$, то $\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}; \frac{-1 - \sqrt{1 - a^4}}{2a}\right)$;
если $a = 0$, то $(0; +\infty)$;
если $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right)$, то $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^4}}{2a}; +\infty\right)$;
если $a = \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $(-\infty; +\infty) \setminus \left\{-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right\}$;
если $a > \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $(-\infty; +\infty)$. ■

□ **1365.** Рассмотрим a и x не как параметр и неизвестную, а как две *переменные* величины, и нарисуем на координатной плоскости (a, x) фигуру, задаваемую нашим уравнением. Для этого раскроем модули и при-

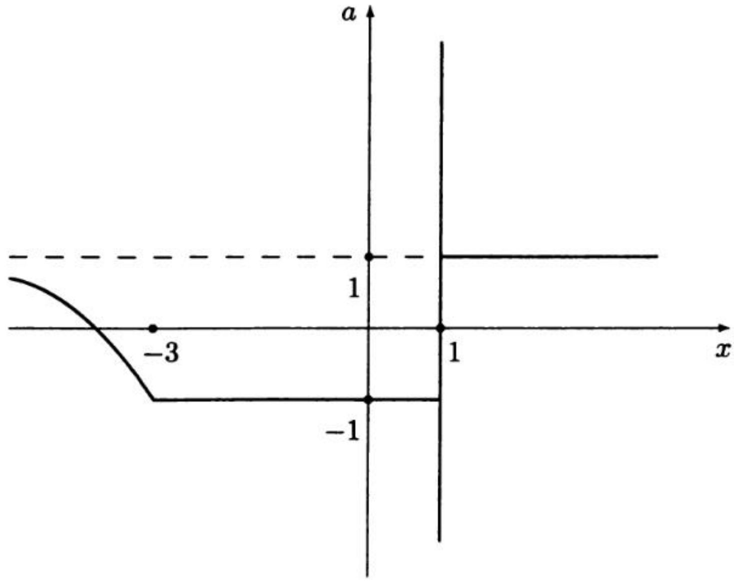

Рис. 10

ведем его к виду $a = f(x)$:

$$\begin{cases} x \leqslant -3, \\ a = 1 + \dfrac{8}{x-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < x < 1, \\ a = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ 0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ a = 1. \end{cases}$$

Первая из них задает кусок гиперболы $a = 1 + \frac{8}{x-1}$, соответствующий значениям $x \leqslant -3$. Эта гипербола имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, горизонтальную асимптоту $a = 1$ и проходит через точку $(-3, -1)$. Вторая система задает отрезок (без концов) прямой $a = -1$, соответствующий значениям $x \in (-3; 1)$. Третья система задает вертикальную прямую, проходящую через точку $x = 1$. Четвертая система задает луч $a = 1$, соответствующий значениям $x > 1$.

Склеивая четыре описанных выше куска, мы получим фигуру, изображенную на рис. 10.

Теперь начнем решать нашу исходную задачу с параметром. Ключевым является следующее соображение: при данном значении параметра a множество решений исходного уравнения является проекцией на ось абсцисс точек пересечения горизонтальной прямой, проведенной на высоте a, с фигурой, изображенной на рис. 10. Эту горизонтальную прямую удобно мыслить как движущуюся ось Ox. Тогда ее пересечение с вышеупомянутой фигурой непосредственно дает множество решений исходного уравнения.

Поэтому из рис. 10 очевидно, что исходное уравнение имеет ровно два решения при $a \in (-1; 1)$.

Сами решения также легко вычисляются с помощью этого рисунка. Особо отметить следует только меньший из двух корней в случае $a \in (-1; 1)$. Из рисунка ясно, что этот корень — это единственная точка пересечения горизонтальной прямой, проведенной на высоте a, и гиперболы $\frac{x+7}{x-1}$. Поэтому его можно вычислить формальным решением уравнения $\frac{x+7}{x-1} = a$: $x = \frac{a+7}{a-1}$.

Ответ: при $|a| > 1$ $x = 1$; при $a = 1$ $x \geqslant 1$; при $|a| < 1$ $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{a+7}{a-1}$; при $a = -1$ $-3 \leqslant x \leqslant 1$. Два решения — при $|a| < 1$. ■

□ **1387.** Наше уравнение инвариантно (неизменно) при замене x на $-x$. Действительно, если мы заменим x на $-x$, то получим уравнение

$$\left|\frac{(-x)\left(2^{-x}-1\right)}{2^{-x}+1} + 2a\right| = a^2 + 1,$$

которое после умножения числителя и знаменателя дроби в левой части на 2^x превращается в исходное:

$$\left|-\frac{x\left(1-2^{x}\right)}{1+2^{x}} + 2a\right| = a^2 + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{x\left(2^{x}-1\right)}{2^{x}+1} + 2a\right| = a^2 + 1.$$

Поэтому, если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет его корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0 = 0$.

Подставляя в исходное уравнение вместо неизвестной x число 0, мы получим простое уравнение относительно a:

$$|2a| = a^2 + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(|a| - 1)^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$|a| = 1.$$

Итак, число 0 является корнем исходного уравнения тогда и только тогда, когда $a = 1$ или $a = -1$. Как следует из приведенных выше рассуждений, только для этих значений параметра исходное уравнение может иметь нечетное число корней. Более того, для этих значений a множество корней исходного уравнения имеет следующий вид (если это множество — *конечно*):

$$\{0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots \pm x_n\},$$

где числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны (не исключено, что $n = 0$, т. е. ненулевых корней нет вовсе). Поэтому число корней обязательно нечетно.

Если же корней бесконечно много, то говорить, что их число нечетно, нельзя.

Итак, для завершения решения задачи достаточно выяснить, конечно или нет число корней исходного уравнения для двух «подозрительных» значений параметра, $a = 1$ и $a = -1$.

1. Если $a = 1$, то исходное уравнение примет вид

$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2\right| = 2.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1} = -4.$$

Первое уравнение, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$.

Второе уравнение решим графически. Для этого разрешим его относительно 2^x (при этом необходимо проверить, что $x = -4$ не является его решением):

$$2^x = \frac{x-4}{x+4}.$$

Левая часть — стандартная показательная функция $y = 2^x$. Ее график монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и проходит через точку $(0; 1)$. Правая часть — дробно-линейная функция. Ее график — гипербола, проходящая через точку $(0; -1)$, с вертикальной асимптотой $x = -4$ и горизонтальной асимптотой $y = 1$. Эта гипербола возрастает на промежутках $(-\infty; -4)$ и $(-4; +\infty)$. Изобразив эти графики на рисунке (мы оставляет это читателю), легко видеть, что они не пересекаются, так что второе уравнение не имеет корней.

Итак, в случае $a = 1$ исходное уравнение имеет ровно 1 корень.

2. Если $a = -1$, то исходное уравнение примет вид

$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}-2\right| = 2.$$

Оно также распадается на два уравнения:

$$\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=4.$$

Первое уравнение такое же, как и первое уравнение в случае $a=1$; оно имеет единственный корень $x=0$.

Второе уравнение, как и в случае $a=1$, решим графически. Для этого разрешим его относительно 2^x (при этом необходимо проверить, что $x=4$ не является его решением):

$$2^x=\frac{x+4}{x-4}.$$

Левая часть — стандартная показательная функция $y=2^x$. Ее график монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ и проходит через точку $(0;1)$. Правая часть — дробно-линейная функция. Ее график — гипербола, проходящая через точку $(0;-1)$, с вертикальной асимптотой $x=4$ и горизонтальной асимптотой $y=1$. Эта гипербола убывает на промежутках $(-\infty;4)$ и $(4;+\infty)$. Изобразив эти графики на рисунке (мы оставляет это читателю), легко видеть, что они пересекаются в двух точках. *Точные* значения корней второго уравнения нам совершенно не важны; впрочем, графики позволяют локализовать эти корни: $-5<x_1<-4$, $4<x_2<5$ $(x_1=-x_2)$.

Итак, в случае $a=-1$ исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

Ответ: $a_1=1$, $a_2=-1$. ■

□ **1392.** Фраза «множество решений неравенства содержит точку $x=1$» означает, что при подстановке вместо неизвестной числа 1 получится верное неравенство. Поэтому вопрос задачи можно переформулировать следующим образом: найти все значения a, при которых верно неравенство

$$\frac{a}{1-a}>0. \tag{1}$$

Иначе говоря, нужно просто решить неравенство (1). Метод интервалов немедленно дает ответ.

Ответ: $(0;1)$. ■

□ **1393.** Данное уравнение является линейным относительно неизвестной x. Запишем его в стандартном виде $Ax=B$:

$$(b^4-9)\cdot x=b^3+(1+\sqrt{3})b^2-(2-\sqrt{3})b-2\sqrt{3}.$$

Известно, что линейное уравнение $Ax=B$ не имеет корней тогда и только тогда, когда $A=0$, $B\neq 0$. В нашем случае эти условия примут вид:

$$\begin{cases} b^4 = 9, \\ b^3 + (1+\sqrt{3})b^2 - (2-\sqrt{3})b - 2\sqrt{3} \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Итак, решение исходной задачи с *параметром* b сводится к решению обычной системы, где b является *неизвестной*.

Первое уравнение этой системы имеет два корня: $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = -\sqrt{3}$. Простая подстановка показывает, что второму условию удовлетворяет только $b_1 = \sqrt{3}$.

Ответ: $b = \sqrt{3}$. ■

□ **1395.** Данное уравнение является квадратным. Оно не имеет решений тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен:

$$D < 0 \Leftrightarrow \frac{a - \frac{9}{7}}{a+5} > 0.$$

Это неравенство легко решается методом интервалов.

Ответ: $a < -5$, $a > \frac{9}{7}$. ■

□ **1397.** Вопрос задачи можно сформулировать следующим образом: найти все значения a, при которых отрезок $[1; 2]$ является подмножеством множества решений неравенства

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0. \tag{1}$$

Поскольку множество решений неравенства (1) совпадает с множеством решений квадратичного неравенства

$$f(x) \equiv (x - 2a - 1)(x - a) < 0, \tag{2}$$

задача примет вид: найти все значения a, при которых отрезок $[1; 2]$ является подмножеством множества решений неравенства (2).

Это, в свою очередь, равносильно тому, что одновременно выполнены два неравенства: $f(1) < 0$, $f(2) < 0$. Поскольку $f(1) = 2a(a-1)$, $f(2) = (2a-1)(a-2)$, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 2a(a-1) < 0, \\ (2a-1)(a-2) < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{2} < a < 1$. ■

Решения к главе 10

□ **1423.** Функция
$$y = \left(x^2\right)^{\log_{\sqrt{x}} 2}$$
определена тогда и только тогда, когда выполнены условия $x > 0$, $x \neq 1$. На этом множестве формулу, которая задает функцию, можно упростить:
$$y = \left(\sqrt{x}^4\right)^{\log_{\sqrt{x}} 2} = \left(\sqrt{x}\right)^{4\log_{\sqrt{x}} 2} = \left(\sqrt{x}\right)^{\log_{\sqrt{x}} 16} = 16.$$
Поэтому ее графиком будет часть горизонтальной прямой $y = 16$, соответствующая значениям $x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$. Этот график изображен на рис. 11. ■

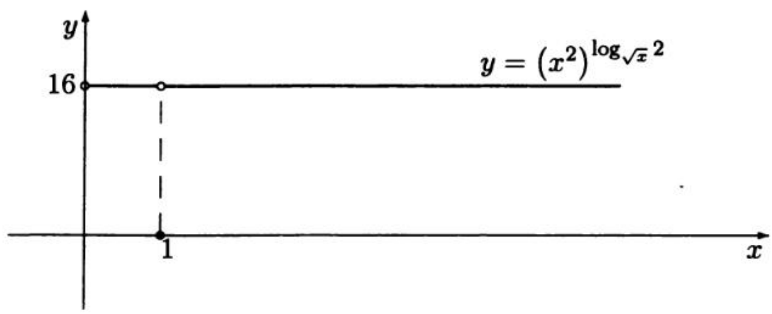

Рис. 11

□ **1435.** Точка (x_0, y_0) является центром симметрии графика функции $y = f(x)$, если

- область определения функции, D_f, симметрична относительно точки x_0, т. е. если точка x входит в область определения, то и точка $2x_0 - x$, симметричная x относительно x_0, также входит в область определения:
$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x_0 - x \in D_f;$$
- значения функции в точках x и $2x_0 - x$ $(x \in D_f)$ симметричны относительно y_0, т. е. верно равенство
$$f(x) - y_0 = y_0 - f(2x_0 - x).$$
Иначе говоря, выражение
$$\frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \tag{1}$$
при всех $x \in D_f$ не зависит от x; значение этого выражения — это y_0 (в частности, если $x_0 \in D_f$, то $y_0 = f(x_0)$).

Вернемся теперь к исходной задаче. Функция

$$f(x) = 4x + \log_2\left(\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4}\right) \tag{2}$$

определена тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4} > 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получим, что

$$D_f = (-\infty; -5) \cup (-4; 0) \cup (1; +\infty).$$

Это множество имеет единственный центр симметрии: $x_0 = -2$. Поэтому, если график функции (2) имеет центр симметрии (x_0, y_0), то $x_0 = -2$. Поскольку $x_0 \in D_f$, $y_0 = f(x_0) = -8$ и для завершения доказательства достаточно показать, что выражение (1) не зависит от x:

$$\frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} = \frac{f(x) + f(-4-x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4x + \log_2\frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} - 16 - 4x + \log_2\frac{(-4-x)(-x+1)}{(-x)(-x-5)}\right) =$$

$$= -8 + \frac{1}{2}\left(\log_2\frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} + \log_2\frac{(x+4)(x-1)}{x(x+5)}\right) \equiv -8.$$

ОТВЕТ: координаты центра симметрии: $(-2, -8)$. ■

□ **1436.** Функция

$$y(x) = (x+a)(|x+1-a| + |x-3|) - 2x + 4a$$

определена при всех x, так что из структуры области определения нельзя извлечь никакой информации относительно центра симметрии графика (в отличие от решения задачи 1435). Поэтому будем анализировать выражение

$$A = \frac{y(x) + y(2x_0 - x)}{2}. \tag{1}$$

Как мы отмечали при решении задачи 1435, график нашей функции имеет центр симметрии (x_0, y_0) тогда и только тогда, когда выражение (1) тождественно равно y_0.

В нашем случае

$$A = \frac{x+a}{2}\left(|x+1-a| + |x-3|\right) -$$
$$- \frac{x-2x_0-a}{2}\left(|x-2x_0-1+a| + |x-2x_0+3|\right) - 2x_0 + 4a.$$

При достаточно больших положительных x все выражения под знаками модулей будут положительными и поэтому выражение A примет вид:

$$A = (a+4x_0-2)x + 4a - ax_0 - 4x_0^2 \quad (x \text{ достаточно велико}).$$

Это выражение не зависит от x тогда и только тогда, когда коэффициент при x равен 0. В этом случае свободный член — это y_0:

$$a + 4x_0 - 2 = 0,$$
$$y_0 = 4a - ax_0 - 4x_0^2.$$

Отсюда можно выразить x_0 и y_0 через a:

$$x_0 = \frac{2-a}{4},$$
$$y_0 = \frac{9a-2}{2}.$$

Используя эти соотношения, можно превратить равенство $y_0 = y(x_0)$ в уравнение относительно a:

$$\frac{3a+2}{16}\left(|5a-6| + |a+10|\right) = 0.$$

Поскольку выражения под знаками модулей в левой части этого уравнения одновременно не обращаются в 0, их сумма положительна. Значит,

$$a = -\frac{2}{3}.$$

Тогда $x_0 = \frac{2}{3}$, $y_0 = -4$.

Итак, если при некотором значении параметра a график нашей функции имеет центр симметрии (x_0, y_0), то $a = -\frac{2}{3}$, $x_0 = \frac{2}{3}$, $y_0 = -4$.

Для завершения решения достаточно убедиться, что при этих значениях a, x_0, y_0 выражение (1) тождественно равно y_0. Действительно, несложные преобразования дают:

$$y(x) = \frac{1}{9}(3x-2)\left(|3x+5| + |3x-9|\right) - 2x - \frac{8}{3},$$
$$y(2x_0 - x) = -\frac{1}{9}(3x-2)\left(|3x+5| + |3x-9|\right) + 2x - \frac{16}{3},$$

так что $A \equiv -4$.

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$. ■

☐ **1439.** Прежде всего найдем область определения функции, D_y. Она совпадает с множеством решений неравенства

$$2x - x^2 + 4 \geqslant 0.$$

Соответствующее квадратное уравнение $-x^2 + 2x + 4 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{5}$, так что $D_y = [1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$.

На этом отрезке поведение данной функции повторяет поведение подкоренного выражения, т. е. квадратичной функции $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, которая при изменении независимой переменной x от x_1 до $x_0 = 1$ (это первая координата вершины параболы $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, которая может быть найдена как среднее арифметическое корней x_1 и x_2) возрастает от значения $f(x_1) = 0$ до значения $f(x_0) = 5$, а затем, при изменении x от x_0 до x_2, убывает от значения $f(x_0) = 5$ до значения $f(x_2) = 0$.

Соответственно, исходная функция при изменении независимой переменной x от x_1 до $x_0 = 1$ сначала возрастает от 0 до значения $\sqrt{5}$, а затем, при изменении x от x_0 до x_2, убывает от $\sqrt{5}$ до 0. Таким образом, наша функция принимает все значения из отрезка $[0; \sqrt{5}]$ и только их.

Ответ: $[0; \sqrt{5}]$. ■

☐ **1445.** По определению, область значений функции $y = f(x)$ — это множество чисел y таких, что существует хотя бы одно значение x из области определения функции, для которого верно равенство $y = f(x)$.

Это определение можно переформулировать следующим образом: область определения функции $y = f(x)$ — это множество значений параметра y, для которых уравнение $f(x) = y$ имеет решение.

В нашем случае это уравнение примет вид

$$\frac{x}{1 + x^2} = y \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0. \qquad (1)$$

Если $y = 0$, то уравнение (1) — линейное. Оно имеет единственный корень $x_1 = 0$. Таким образом, $y = 0$ входит в область значений нашей функции.

Если $y \neq 0$, то уравнение (1) — квадратное. Оно имеет корень тогда и только тогда, когда $D \equiv 1 - 4y^2 \geqslant 0$, т. е. при условии $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$. Из этого отрезка мы должны выколоть точку $y = 0$ (так как мы рассматриваем случай $y \neq 0$).

Объединяя множества $\{0\}$ и $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, мы получим ответ.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. ■

☐ **1454.** Умножим и разделим формулу, которая задает нашу функцию, на $\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{3x^2}$ (это выражение, очевидно, никогда не обращается в нуль):

$$y = \frac{5}{\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{3x^2}}.$$

Поведение функции $f(x)=\sqrt{3x^2+5}$ повторяет поведение подкоренного выражения, которое при изменении независимой переменной x от $-\infty$ до 0 сначала убывает от $+\infty$ до значения 5, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, возрастает от 5 до $+\infty$. Таким, образом, $f(x)$ при изменении x от $-\infty$ до 0 сначала убывает от $+\infty$ до значения $\sqrt{5}$, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, возрастает от $\sqrt{5}$ до $+\infty$.

Аналогичные рассуждения показывают, что функция $g(x)=\sqrt{3x^2}$ при изменении x от $-\infty$ до 0 сначала убывает от $+\infty$ до значения 0, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, возрастает от 0 до $+\infty$ (этот вывод можно получить и проще, если заметить, что $g(x)=\sqrt{3}|x|$).

Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ убывают и возрастают на *одних и тех же* промежутках, на тех же самых промежутках убывает/возрастает и их сумма: при изменении x от $-\infty$ до 0 функция $f(x)+g(x)$ сначала убывает от $+\infty$ до значения $\sqrt{5}$, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, возрастает от $\sqrt{5}$ до $+\infty$.

Исходная функция является дробью с постоянным положительным числителем и знаменателем $f(x)+g(x)$. Поэтому ее поведение противоположно: при изменении x от $-\infty$ до 0 исходная функция сначала возрастает от 0 до значения $\sqrt{5}$, а затем, при изменении x от 0 до $+\infty$, убывает от $\sqrt{5}$ до 0. Отсюда немедленно следует ответ.

Ответ: $y_{\min}=4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$; это значение достигается при $x=3$. ■

☐ **1479.**

1 способ. Перепишем выражение $f=3x-2y$ в виде $f=\frac{3}{2}\cdot 2x+(-2)\cdot y$.

В силу неравенства Коши—Буняковского

$$f \leqslant \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{4x^2+y^2}=10. \qquad (1)$$

Равенство при этом достигается тогда и только тогда, когда существует положительное число k такое, что

$$2x=\frac{3}{2}\cdot k, \quad y=(-2)\cdot k.$$

Из условия $4x^2+y^2=16$ следует, что $k=\frac{8}{5}$. Тогда $x=\frac{6}{5}$, $y=-\frac{16}{5}$ — при этих значениях переменных достигается наибольшее значение выражения $3x-2y$.

2 способ. Введем дополнительную переменную $z = 3x - 2y$. Тогда задача может быть переформулирована следующим образом: найти наибольшее значение переменной z при условии, что выполнены равенства $z = 3x - 2y$, $4x^2 + y^2 = 16$.

Эти условия можно рассматривать как систему относительно неизвестных x и y:

$$\begin{cases} z = 3x - 2y, \\ 4x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

При этом фраза «выполнены равенства» означает, что эта система имеет решение.

Исключим из первого уравнения системы неизвестную y: $y = \dfrac{3x - z}{2}$. Тогда второе уравнение примет вид

$$25x^2 - 6xz + (z^2 - 64) = 0 \qquad (2)$$

и задача может быть переформулирована следующим образом: найти наибольшее значение переменной z при условии, что квадратное уравнение (2) имеет решение. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\dfrac{D}{4} = -16z^2 + 1600 \geqslant 0$, т. е. равносильно неравенствам $-10 \leqslant z \leqslant 10$. Наибольшее значение переменной z, удовлетворяющей этому условию, равно 10.

3 способ. Ограничение $4x^2 + y^2 = 16$ напоминает уравнение окружности. Чтобы превратить его в уравнение, которое является уравнением окружности, разделим обе части на 16 и перепишем получившееся равенство в виде $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1$. Вспоминая комментарии к решению задачи 160, применим метод тригонометрических подстановок.

Равенство $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1$ означает, что точка $\left(\dfrac{x}{2}; \dfrac{y}{4}\right)$ лежит на единичной окружности. Каждой такой точке соответствует и притом только одно значение α из промежутка $[0; 2\pi)$ такое, что $\dfrac{x}{2} = \cos\alpha$, $\dfrac{y}{4} = \sin\alpha$, или, что то же самое, $x = 2\cos\alpha$, $y = 4\sin\alpha$.

Тогда задача может быть переформулирована следующим образом: найти наибольшее значение выражения $6\cos\alpha - 8\sin\alpha$ при условии, что $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Из курса тригонометрии известно, что областью значений функции $f(\alpha) = a\sin\alpha + b\cos\alpha$ является отрезок

$[-\sqrt{a^2+b^2}; +\sqrt{a^2+b^2}]$. Поскольку $f(\alpha)$ периодична с периодом 2π, ограничение $\alpha \in [0; 2\pi)$ не меняет область значений.

В нашем случае $a = -8$, $b = 6$, так что $\sqrt{a^2+b^2} = 10$.

ОТВЕТ: 10. ■

□ **1498.** Тот факт, что числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, равносилен справедливости равенства

$$2b = a + c. \tag{1}$$

Условие того, что числа $a - c, c - b, 2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, равносилен справедливости равенства

$$(c-b)^2 = 2a(a-c) \tag{2}$$

и условия

$$a - c, c - b, 2a \neq 0 \tag{3}$$

(в геометрической прогрессии по определению не может быть нулевых членов).

Систему из уравнений (1) и (2) можно решить методом исключения. Она имеет бесконечно много решений, которые можно описать двумя формулами: $(a, b, c) = (t, t, t)$, $(a, b, c) = (t, -3t, -7t)$, где $t \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр.

Для первой серии решений набор чисел $a - c, c - b, 2a$ примет вид: $0, 0, 2t$. Поскольку условие (3) не выполнено, первая серия не является решением системы (1)–(3).

Для второй серии решений набор чисел $a - c, c - b, 2a$ примет вид: $8t, -4t, 2t$. Справедливость условия (3) в этом случае равносильна требованию $t \neq 0$.

Итак, система (1)–(3) имеет бесконечно много решений, которые можно описать формулой: $(a, b, c) = (t, -3t, -7t)$, где $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — произвольный ненулевой параметр.

Для указанных значений a, b, c число y, минимум которого нужно найти, примет вид

$$y = t^2 + 6t. \tag{4}$$

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: найти минимальное значение (неполного) квадратного трехчлена $t^2 + 6t$ на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Поскольку вершина параболы, которая является графиком функции (4), имеет координаты $(t, y) = (-3; -9)$, искомый минимум равен -9.

ОТВЕТ: -9. ■

□ **1497.** Известно, что для любых натуральных чисел x и y верно равенство

$$x \cdot y = (x, y) \cdot (x, y).$$

Поэтому $q = \dfrac{xy}{d}$ и наша задача может быть сформулирована в следующем виде.

Найти наименьшее значение величины $\dfrac{xy}{d^2}$ при условии

$$3x = 8y - 29. \qquad (1)$$

Теперь решим уравнение (1). В соответствии с общей теорией прежде всего найдем частное решение. В качестве частного решения можно взять, например, $x_0 = -7$, $y_0 = 1$:

$$3 \cdot (-7) = 8 \cdot 1 - 29. \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (1) равенство (2), мы получим однородное уравнение

$$3 \cdot (x + 7) = 8 \cdot (y - 1).$$

Поскольку числа 3 и 8 — взаимно простые, его общее решение в целых числах имеет вид: $x + 7 = 8n$, $y - 1 = 3n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Соответственно, общее решения уравнения (1) в целых числах есть: $x = 8n - 7$, $y = 3n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Решение в натуральных числах означает дополнительное требование $x > 0$, $y > 0$, что равносильно условию $n \in \mathbb{N}$.

Теперь наша задача может быть сформулирована в таком виде: найти наименьшее значение функции натурального аргумента

$$f(n) = \frac{(8n - 7)(3n + 1)}{d^2(n)}, \text{ где } d(n) = (8n - 7, 3n + 1).$$

Далее, если $3x = 8y - 29$, то $29 = 8y - 3x$. Правая часть этого равенства делится на d. Значит, d — делитель простого числа 29. Поэтому $d(n)$ может быть только 1 или 29.

Разберемся теперь, при каких $n \in \mathbb{Z}$ наибольший общий делитель чисел $x = 8n - 7$, $y = 3n + 1$ равен 29. Прежде всего отметим, что из равенства $3x = 8y - 29$ следует, что x делится на 29 тогда и только тогда, когда y делится на 29. Поэтому $d(n) = 29$ тогда и только тогда, когда существует натуральное k такое, что $3n + 1 = 29k$. Это уравнение имеет следующее общее решение (в натуральных числах): $n = 29l - 10$, $k = 3l - 1$, $l \in \mathbb{N}$ (мы начинаем с частного решения $n_0 = -10$, $k_0 = -1$). Поэтому $d(n) = 29$ для $n = 29l - 10$, $l \in \mathbb{N}$ (этот вывод можно получить и с помощью алгоритма Евклида, использованного при решении задачи 992).

Обозначим через N_1 множество тех натуральных чисел n, для которых $d(n) = 1$, а через N_2 — множество тех натуральных чисел n, для которых $d(n) = 29$. Как мы только что установили, $N_2 = \{19{,}48, \dots\}$, и, значит, $N_1 = \{1{,}2, \dots, 18{,}20, \dots\}$.

Теперь наша задача может быть сформулирована следующим образом: найти наименьшие значения функций $f_1(n) = \dfrac{(8n-7)(3n+1)}{1}$, где $n \in N_1$, и $f_2(n) = \dfrac{(8n-7)(3n+1)}{29^2}$, где $n \in N_2$, и из них выбрать меньшее число.

Поскольку функция $(8n - 7)(3n + 1)$ возрастает при $n \geqslant 1$, $\min f_1 = f_1(1) = 4$, $\min f_2 = f_2(19) = 10$, так что

$$\min(\min f_1, \min f_2) = 4.$$

Ответ: 4. ■

□ **1499.** Пусть объем сосуда равен V, x_n — концентрация спирта после n-го переливания.

В ходе $(n+1)$-го переливания объем жидкости в сосуде сначала станет $\dfrac{2V}{3}$, а концентрация спирта не изменится, т. е. останется равной x_n. Поэтому абсолютное содержание спирта равно $\dfrac{2Vx_n}{3}$. После того как в сосуд добавят воду, объем жидкости станет V, а абсолютное содержание спирта не изменится. Поэтому относительное содержание спирта станет равным $\dfrac{2}{3}x_n$.

Итак, $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n$. Это соотношение означает, что последовательность x_n является геометрической прогрессией со знаменателем $\dfrac{2}{3}$. Поскольку $x_0 = 1$, по формуле общего члена имеем:

$$x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Осталось найти наименьшее значение k, для которого $x_k < \dfrac{1}{10}$.

Функция x_k монотонно убывает с ростом k. Поскольку $x_5 = \dfrac{32}{243} > \dfrac{1}{10}$, $x_6 = \dfrac{64}{729} < \dfrac{1}{10}$, искомое значение k равно 6.

Ответ: $k = 6$. ■

□ **1502.** Предположим, что для приготовления нового сплава взяли x кг первого сплава, y кг второго и z кг третьего. Тогда новый сплав будет иметь массу $(x+y+z)$ кг и будет содержать $(0{,}55x+0{,}25y+0{,}7z)$ кг хрома, $(0{,}45x+0{,}6y)$ кг никеля, $(0{,}15y+0{,}3z)$ кг кобальта. Относительное содержание кобальта в новом сплаве равно $\frac{0{,}15y+0{,}3z}{x+y+z}$, а относительное содержание никеля — $f = \frac{0{,}45x+0{,}6y}{x+y+z}$; область значений этой функции мы должны найти.

Условие $\frac{0{,}15y+0{,}3z}{x+y+z} = 0{,}2$ позволяет исключить одну из переменных, например z: $z = 2x + 0{,}5y$. Теперь функция f станет зависеть только от двух переменных: $f = \frac{0{,}45x+0{,}6y}{3x+1{,}5y}$. Мы должны найти область ее значений при изменении независимых переменных x и y в области $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ (нетрудно понять, что эти переменные не могут быть одновременно равны нулю, так как тогда относительное содержание кобальта в новом сплаве будет 0,3).

Если $x = 0$, то $f \equiv 0{,}4$. Если $y = 0$, то $f \equiv 0{,}15$.

Если $y \neq 0$, то f можно рассматривать как дробно-линейную функцию одной переменной x (считая y параметром). Записывая f в виде

$$f = 0{,}15\left(1 + \frac{5y}{6x+3y}\right),$$

легко видеть, что при росте x от 0 до $+\infty$ величина f убывает от 0,4 до 0,15.

ОТВЕТ: процентное содержание никеля в новом сплаве меняется от 15% (новый сплав составлен только из первого и третьего сплавов) до 40% (новый сплав составлен только из второго и третьего сплавов). ■

□ **1503.** Обозначим через x, y, z массы сплавов, которые мы берем для приготовления нового сплава. По условию $x + y + z = 10$ (масса нового сплава 10 кг), $0{,}2x+0{,}5y+0{,}3z = 2{,}5$ (относительное содержание металла A в новом сплаве составляет 25%).

Из двух этих уравнений можно исключить две переменные, например, x и z: $x = 5 + 2y$, $z = 5 - 3y$. Поскольку все переменные в задаче неотрицательны, переменная y меняется на отрезке $0 \leqslant y \leqslant \frac{5}{3}$.

Процентное содержание металла B в сплаве равно

$$f = 0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}4z = 3{,}5 - 0{,}4y.$$

Минимум этой функции на отрезке $0 \leqslant y \leqslant \frac{5}{3}$ достигается при $y = \frac{5}{3}$. Соответственно, $x = \frac{25}{3}$, $z = 0$.

Ответ: $\frac{25}{3}$, $\frac{5}{3}$ и 0 кг. ■

□ **1531.** Пусть x и y — количества изделий первого и второго типа соответственно. Тогда общий вес изделий равен $12x + 15y$, а их суммарная стоимость $C = 4x + 6y$ (мы берем 100 тыс. руб. в качестве единицы измерения денежных сумм).

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $C(x, y) = 4x + 6y$ при условии, что x и y — натуральные числа, удовлетворяющие соотношению

$$12x + 15y = 321.$$

Решим это уравнение. Прежде всего сократим обе части на 3:

$$4x + 5y = 107. \tag{1}$$

Теперь возьмем какое-нибудь частное решение уравнения (1) в целых числах, например, $x_0 = -107$, $y_0 = 107$, так что верно равенство:

$$4 \cdot (-107) + 5 \cdot 107 = 107, \tag{2}$$

и, наконец, вычтем из уравнения (1) равенство (2):

$$4(x + 107) = 5(107 - y).$$

Поскольку числа 4 и 5 — взаимно простые, общее решение этого уравнения в целых числах имеет вид

$$\begin{aligned} &x + 107 = 5n, \\ &107 - y = 4n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Соответственно, общее решение уравнения (1) в целых числах имеет вид

$$\begin{aligned} &x = 5n - 107, \\ &y = 107 - 4n. \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Нас интересует решение в натуральных числах. Это означает, что $x > 0$, $y > 0$, т. е.

$$\begin{aligned} &5n - 107 > 0, \\ &107 - 4n > 0. \end{aligned}$$

Отсюда $21\frac{2}{5} < n < 26\frac{3}{4}$. Итак, натуральным решениям соответствуют значения параметра $n = 22, 23, \ldots, 26$.

Используя полученные результаты, мы можем переформулировать исходную задачу следующим образом: найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$C(n) = 4 \cdot (5n - 107) + 6 \cdot (107 - 4n) = 214 - 4n$$

при условии, что параметр $n = 22, 23, \ldots, 26$.

Поскольку зависимость $C(n)$ — линейная с отрицательным угловым коэффициентом, наименьшее значение достигается при $n = 26$, а наибольшее — при $n = 22$.

Ответ: 11 000 тыс. руб. и 12 600 тыс. руб. ■

Учебное издание

Фалин Геннадий Иванович
Фалин Анатолий Иванович

**АЛГЕБРА НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ
ПО МАТЕМАТИКЕ В МГУ**

Учебное пособие

Ведущий редактор *М. Стригунова*
Художник *Ф. Мала*
Корректор *Е. Клитина*

Оригинал-макет подготовлен *О. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε
с использованием кириллических шрифтов LH
семейства Computer Modern

Подписано в печать 05.04.06 г. Формат $70 \times 100/16$
Гарнитура Computer Modern. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29,9. Тираж 2000 экз. Заказ 2523.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
Адрес для переписки: 119071, Москва, а/я 32
Телефон: (495) 157-1902, e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

Отпечатано в полиграфической фирме «Полиграфист».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.

Фалин Геннадий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Область научных интересов: теория вероятностей и ее приложения (теория телетрафика, исследование операций, актуарная математика). Автор около 100 научных работ и 6 книг.

Имеет большой опыт преподавания элементарной математики и приема вступительных экзаменов. Им опубликован ряд учебно-методических пособий (в том числе в соавторстве с А. И. Фалиным).

Фалин Анатолий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова.

Область научных интересов: асимптотические методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, приложения теории вероятностей, методика преподавания элементарной математики.

Имеет многолетний опыт преподавания математики на факультетах МГУ им. М. В. Ломоносова, подготовительном отделении МГУ и физико-математической школе им. А. Н. Колмогорова. В течение многих лет работал в составе экзаменационной комиссии по математике на различных факультетах МГУ.

Автор более 30 научных и учебно-методических работ (в том числе в соавторстве с Фалиным Г. И.)

ISBN 5-94774-451-1

9785947744514