В. Ляховский

Логарифмические и показательные...

Большая часть заданий по математике, предлагаемых на конкурсных экзаменах в вузах, сводится к решению уравнений и неравенств.

Для простейших из них, например, для квадратных уравнений и систем линейных уравнений, существуют общие методы решения. В большинстве же случаев нет правил, позволяющих решить уравнение путем последовательного выполнения арифметических действий и элементарных операций над коэффициентами уравнения. Поэтому при изучении, например, показательных и логарифмических уравнений и неравенств рассматриваются лишь частные приемы решений.

Уравнения

При решении уравнений широко применяются преобразования обеих частей данного уравнения.

Определение 1. Если все корни одного уравнения являются корнями другого уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого.

Определение 2. Два уравнения называются *эквивалентными* (*равносильными*) на некотором множестве значений неизвестного, если они имеют одни и те же корни, принадлежащие этому множеству, то есть если каждое из них является следствием другого.

Естественнее всего применять только такие преобразования, при которых каждое последующее уравнение эквивалентно предыдущему на рассматриваемом множестве (ниже, если это особо не оговорено, имеется в виду множество всех действительных чисел). Тогда решения последнего уравнения будут корнями и исходного уравнения.

Однако такой способ решения не всегда возможен. Иногда легче заменить уравнение неэквивалентным ему следствием, а потом провести проверку корней — нет ли среди них посторонних.

Вспомним сначала несколько основных теорем.

Теорема 1. *При $a>0$, $a\neq 1$ уравнение $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ эквивалентно уравнению $f(x)=\varphi(x)$.*

Теорема 2. *При $a>0$, $a\neq 1$ уравнение $\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$ эквивалентно любой из систем*

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x), \\ f(x)>0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)=\varphi(x), \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$$

Отметим, что если посторонние корни появляются только в результате расширения области допустимых значений (ОДЗ) неизвестного, то отделить их от корней исходного уравнения можно или проверив, входят ли они в ОДЗ, или непосредственно подставив их в исходное уравнение или в уравнение, эквивалентное исходному. Если же лишние корни могут появиться не из-за расширения ОДЗ, то необходима проверка подстановкой в исходное уравнение или в то промежуточное уравнение, при решении которого эти посторонние корни могли появиться.

Задача 1 (Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1974). *Решить уравнение*

$$9^{\sqrt{x^2-2x}-x}-7\cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1}=2.$$

Замечая, что

$$9^{\sqrt{x^2-2x}-x} = 3^{2(\sqrt{x^2-2x}-x)},$$

$$3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} = \frac{1}{3}\cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x},$$

положим $3^{\sqrt{x^2-2x}-x} = t$, получим уравнение $3t^2 - 7t - 6 = 0$, имеющее корни $t_1 = 3$ и $t_2 = -\frac{2}{3}$. Второй корень не дает решений исходного уравнения, так как область значений показательной функции — множество всех положительных чисел. Следовательно, исходное уравнение в области допустимых значений неизвестного эквивалентно уравнению $3^{\sqrt{x^2-2x}-x} = 3^1$, а последнее на основании теоремы 1 — иррациональному уравнению

этого момента часто приводит к ошибкам в решении.

Так, используя, например, формулы логарифмирования

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad (1)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad (2)$$

$$\log_a x^p = p \log_a x, \qquad (3)$$

абитуриенты часто забывают о том, что ОДЗ их левых и правых частей не совпадают.

В самом деле, правые части соотношений (1) и (2) определены для значений $x > 0$ и $y > 0$. Этим неравенствам удовлетворяют координаты точек, заполняющих первый координатный угол (рис. 1). В то же время левые части соотношений (1) и (2) имеют смысл, когда знаки x и y совпадают.

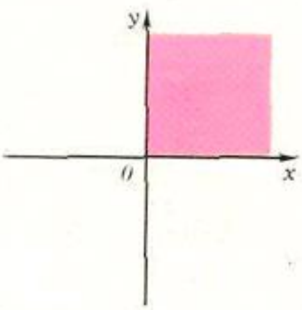

Рис. 1.

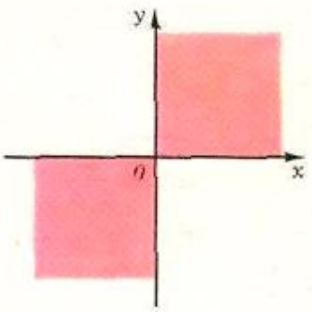

Рис. 2.

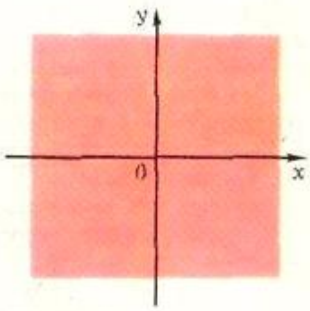

Рис. 3.

$\sqrt{x^2-2x} = x+1$. Возведя обе его части в квадрат, найдем $x = -0{,}25$. Так как при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни, проверка необходима, причем лишь на этом этапе. Подстановка найденного значения x в иррациональное уравнение показывает, что оно удовлетворяет ему и, следовательно, исходному уравнению.

В большинстве случаев основная трудность решения логарифмического или показательного уравнения состоит в преобразовании исходного уравнения до тех пор, пока не появится возможность применить теоремы 1 или 2. Но при этом надо внимательно следить за изменением ОДЗ. Упущение

Этому условию удовлетворяют координаты точек, заполняющих первый и третий координатные углы (рис. 2).

Следовательно, при переходе, например, от выражения $\log_a xy$ к выражению $\log_a x + \log_a y$, ОДЗ сужается (на третий координатный угол), а это может привести к потере решений.

Правая часть равенства (3) определена лишь при $x > 0$, а ОДЗ левой части зависит от показателя степени p. Если p — целое четное число, то левая часть равенства (3) имеет смысл и при отрицательных x. Поэтому переход от выражения $\log_a x^p$ к выражению $p \log_a x$ также может привести к потере решений уравнения.

Формулы логарифмирования лучше применять в такой форме:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, \qquad (1a)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \qquad (2a)$$

$$\log_a x^p = p \log_a |x| \; (p \text{ — четное}). \quad (3a)$$

Теперь правые части формул (1а) и (2а) определены при $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Этим условиям удовлетворяют все точки координатной плоскости, за исключением точек, лежащих на осях (рис. 3), и при переходе от выражения $\log_a xy$ к выражению $\log_a |x| + \log_a |y|$ ОДЗ неизвестных не сужается, а расширяется (сравните рис. 2 и рис. 3). Возможность потери решений исключена, но посторонние корни появиться могут. А в равенстве (3а) ОДЗ правой и левой части совпадают: $x \neq 0$.

Второй способ избежать изменения ОДЗ — переход от одного уравнения к эквивалентной ему системе или совокупности уравнений (неравенств). Так, уравнение $\log_a \frac{x}{y} = c$ эквивалентно совокупности уравнений $\log_a x - \log_a y = c$, $\log_a(-x) - \log_a(-y) = c$.

Задача 2. *Решить уравнение*

$$\lg(x+10) + \frac{1}{2}\lg x^2 = 2 - \lg 4.$$

ОДЗ неизвестного: $x > -10$, $x \neq 0$. Поскольку $\frac{1}{2}\lg x^2 = \lg |x|$, приведем уравнение к виду $\lg(x+10) + \lg|x| + \lg 4 = 2$, откуда $\lg[4|x|(x+10)] = \lg 100$. По теореме 2 последнее уравнение эквивалентно такому:

$$4|x|(x+10) = 100$$

(поскольку $100 > 0$, неравенство выполняется). Рассматривая два случая и решая соответствующие уравнения:

а) $x > 0$, $x^2 + 10x - 25 = 0$,

б) $-10 < x < 0$, $x^2 + 10x + 25 = 0$,

находим два корня: $x_1 = -5 + 5\sqrt{2}$, $x_2 = -5$.

Нередко решение уравнения или системы уравнений можно упростить введением новых переменных.

Задача 3 (Завод-втуз при ЗИЛе, 1974). *Решить уравнение*

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14.$$

Обозначим $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = u$, $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = v$. Тогда система

$$\begin{cases} u + v = 14, \\ uv = 1 \end{cases}$$

при $u > 0$, $v > 0$ будет эквивалентна исходному уравнению. Ее решения:

$$u_1 = 7 + \sqrt{48}, \quad v_1 = 7 - \sqrt{48};$$

$$u_2 = 7 - \sqrt{48}, \quad v_2 = 7 + \sqrt{48}.$$

Запишем u_2 и v_2 в таком виде: $u_2 = (7+\sqrt{48})^{-1}$, $v_2 = (7-\sqrt{48})^{-1}$. Возвращаясь к исходной переменной, найдем $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Уравнение вида $[f(x)]^{\varphi(x)} = [g(x)]^{h(x)}$ обычно решают с помощью теоремы 2 логарифмированием обеих частей уравнения по некоторому основанию.

Задача 4 (Московский геологоразведочный институт, 1975). *Решить уравнение*

$$x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4,5} = 10^{-2\lg x}.$$

ОДЗ неизвестного: $x > 0$. На этом множестве исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$\lg\left(x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4,5}\right) = \lg\left(10^{-2\lg x}\right),$$

которое подстановкой $\lg x = t$ сводится к кубическому: $t(8t^2 - 6t - 5) = 0$ с корнями $t_1 = 0$, $t_2 = 1{,}25$ и $t_3 = -0{,}5$. Возвращаясь к исходной переменной, найдем: $x_1 = 1$, $x_2 = 10\sqrt[4]{10}$ и $x_3 = \sqrt{10}/10$.

Задача 5 (Новосибирский государственный университет, 1974). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y)\cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $x+y>0$. Поэтому, прологарифмировав по основанию 2 и положив $\log_2(x+y)=u$, $x-y=v$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{u}{v}=1+0{,}5\log_2 3, \\ u-v=\log_2 3, \end{cases}$$

эквивалентную на множестве $x+y>0$ исходной. Подставив значение u из первого уравнения во второе, найдем $v=2$, а затем $u=\log_2 12$. Возвращаясь к исходным переменным и потенцируя, получим

$$\begin{cases} x-y=2, \\ x+y=12, \end{cases}$$

откуда $x=7$, $y=5$.

Заметим, что использование в ходе решения основного логарифмического тождества $a^{\log_a f(x)}=f(x)$ может привести к появлению посторонних решений из-за расширения ОДЗ.

Задача 6 (МФТИ, 1975) *Решить уравнение*

$$9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5.$$

Преобразуем левую часть уравнения, учитывая основное логарифмическое тождество и свойства степеней: $9^{\log_3(1-2x)}=(3^2)^{\log_3(1-2x)}=[3^{\log_3(1-2x)}]^2=(1-2x)^2$. Уравнение $(1-2x)^2=5x^2-5$ является следствием, не эквивалентным исходному уравнению. Действительно, первый его корень $x_1=-2-\sqrt{10}$, удовлетворяет исходному уравнению, так как входит в ОДЗ, а посторонний второй корень $x_2=-2+\sqrt{10}$, появляется вследствие расширения ОДЗ при замене выражения $9^{\log_3(1-2x)}$, имеющего смысл при $x<0{,}5$, выражением $(1-2x)^2$, определенном при любом значении аргумента.

Задача 7 (МФТИ, 1974; МАИ, 1975). *Решить уравнение*

$$\log_3(\log_2 x-9)=2+\log_3(1-4\log_x 4).$$

Так как $2+\log_3(1-4\log_x 4)=\log_3[9(1-4\log_x 4)]$, то по теореме 2 исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \log_2 x-9=9(1-4\log_x 4), \\ \log_2 x-9>0. \end{cases}$$

Поскольку $\log_x 4=\frac{1}{\log_4 x}=\frac{2}{\log_2 x}$, положим $\log_2 x=t$; получим систему

$$\begin{cases} t^2-18t+72=0, \\ t>9, \end{cases}$$

решение которой $t=12$, откуда $x=4096$. Заметим, что если ограничиться уравнением из смешанной системы без неравенства, то появится посторонний корень $x=64$.

Задача 8 (МГУ, геофак, 1972; завод-втуз при ЗИЛе, 1974). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2\log_4 x^2+\log_{0,2}y^3=-1, \\ 2\log_4 x^4-\log_{0,2}y=5. \end{cases}$$

В области допустимых значений неизвестных, определяемой условиями $x\neq 0$ и $y>0$, данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 4\log_4|x|+3\log_{0,2}y=-1, \\ 8\log_4|x|-\log_{0,2}y=5, \end{cases}$$

линейной относительно $\log_4|x|$ и $\log_{0,2}y$. Эта система имеет единственное решение $\log_4|x|=0{,}5$, $\log_{0,2}y=-1$, откуда $x=\pm 2$, $y=5$. Если опустить знаки модуля, то решение $(-2;\ 5)$ будет потеряно при логарифмировании.

Иногда полезно пользоваться формулой $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$, справедливой при положительных a, b и c и при $a\neq 1$. Действительно,

$$b^{\log_a c}=(a^{\log_a b})^{\log_a c}=(a^{\log_a c})^{\log_a b}=c^{\log_a b}$$

Задача 9 (Московский горный институт, 1975). *Решить уравнение*

$$5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$$

Найдем ОДЗ: $x>0$. На основании рассмотренной формулы $x^{\lg 5}=5^{\lg x}$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $2\cdot 5^{\lg x}=50$, откуда $5^{\lg x}=5^2$, $\lg x=2$, $x=100$.

Показательные и логарифмические уравнения могут появиться и при решении «текстовых» задач.

Задача 10 (Московский институт электронной техники, 1975). *Найти x и y, если известно, что xy, x^x и $\frac{1}{y}$ являются последовательными членами геометрической, а $\log_x(y+1)$, $-0{,}5$ и $\log_x(2-y)$ — арифметической прогрессии.*

Условие задачи можно записать в виде

$$\begin{cases} x^{2x} = xy\cdot\frac{1}{y}, \\ \log_x(y+1)+\log_x(2-y) = -1. \end{cases}$$

Решение этой системы найдите самостоятельно. Ответ: $x = 0{,}5$; $y = 1$.

Задача 11 (ЛГУ, факультет психологии, 1970). *Решить уравнение*

$$\log_{\sqrt{2-x^2}}(2x^2+a) = 4.$$

Это — уравнение с параметром. Решить его — значит указать, при каких значениях параметра существуют решения и каковы они. При решении таких уравнений особенно важную роль играет контроль эквивалентности уравнений, так как проверка обычно затруднена.

Положив $x^2 = t$, приведем уравнение к виду

$$\log_{\sqrt{2-t}}(2t+a) = 4.$$

Последнее уравнение эквивалентно исходному (с учетом замены $x^2 = t$) при $t \geqslant 0$. В ОДЗ, определяемой соотношениями $2-t>0$, $2-t\neq 1$, $2t+a>0$, оно эквивалентно уравнению $2t+a=(2-t)^2$, имеющему корни $t_1 = 3+\sqrt{5+a}$, $t_2 = 3-\sqrt{5+a}$. Эти корни существуют при $a\geqslant -5$. Корень t_1 не входит в ОДЗ ни при каких a, а корень t_2 входит при $-4<a<-1$ и $a>-1$. Неравенство $t_2\geqslant 0$ выполняется при $a\leqslant 4$ (проверьте!). Вернувшись к исходной переменной, получим:

$x = \pm\sqrt{3-\sqrt{5+a}}$ при $-4<a<-1$, $-1<a\leqslant 4$; при остальных a решений нет.

Неравенства

Основные определения, необходимые для решения неравенств, почти аналогичны соответствующим определениям для уравнений. Все сказанное выше о преобразованиях, изменяющих ОДЗ, справедливо и для неравенств. Однако решение неравенств имеет свои особенности и требует хорошего знания свойств входящих в них функций. В частности, необходимо помнить, что свойства показательной и логарифмической функций различны при основаниях, больших или меньших единицы: при $a>1$ функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ монотонно возрастают, а при $0<a<1$ функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ монотонно убывают.

Из этих свойств вытекают важные теоремы.

Теорема 3. *Неравенство $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ при $0<a<1$ эквивалентно неравенству $f(x)>\varphi(x)$, а при $a>1$ — неравенству $f(x)<\varphi(x)$.*

Теорема 4. *Неравенство $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$ при $0<a<1$ эквивалентно системе неравенств*

$$\begin{cases} f(x)>\varphi(x), \\ \varphi(x)>0, \end{cases}$$

а при $a>1$ — системе

$$\begin{cases} f(x)<\varphi(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Неравенства вида $\log_a f(x) > c$ и $a^{f(x)} > d$ ($d>0$; вместо $>$ может стоять $\geqslant$, $<$, $\leqslant$) можно привести к виду, рассматриваемому в теоремах 3 и 4, с помощью формул $c = \log_a a^c$ и $d = a^{\log_a d}$.

Задача 12 (Московский текстильный институт, 1974). *Решить неравенство*

$$3^{2x+5} \leqslant 3^{x+2} + 2.$$

Заметим, что $3^{2x+5} = 3\cdot 3^{2(x+2)}$. Положив $3^{x+2} = t$ ($t>0$), придем к

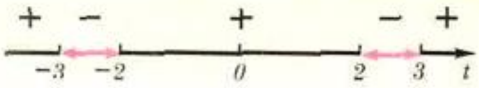

Рис. 4.

неравенству $3t^2-t-2\leqslant 0$. Оно удовлетворяется при $-\frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1$. Неравенство $3^{x+2}\geqslant -\frac{2}{3}$ справедливо при любом вещественном x. Представим 1 как 3^0, тогда из неравенства $3^{x+2}\leqslant 3^0$ по теореме 3 найдем $x\leqslant -2$.

При решении показательных и логарифмических неравенств часто применяется метод интервалов.

Задача 13 (Московский горный институт, 1975). *Решить неравенство*

$$\log_2^4 x-\log_{0,5}^2\frac{x^3}{8}+9\log_2\frac{32}{x^2}<4\log_{0,5}^2 x.$$

ОДЗ неравенства имеет вид $x>0$. Заметим, что в ОДЗ

$$\log_{0,5}\frac{x^3}{8}=\log_2\frac{8}{x^3}=3(1-\log_2 x),$$

$$\log_2\frac{32}{x^2}=5-2\log_2 x,$$

$$\log_{0,5}x=-\log_2 x,$$

поэтому исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$\log_2^4 x-13\log_2^2 x+36<0.$$

Положив $\log_2 x=t$, после разложения на множители получим неравенство $(t+3)(t+2)(t-2)(t-3)<0$. Его решение (см. рис. 4): $-3<t<-2$, $2<t<3$. Вернемся к исходной переменной: $-3<\log_2 x<-2$, $2<\log_2 x<3$, откуда: $0,125<x<0,25$ и $4<x<8$.

Задача 14 (Московский институт электронного машиностроения, 1974). *Решить неравенство*

$$0,3^{\log_{0,25}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1.$$

По теореме 3 данное неравенство (в ОДЗ) эквивалентно неравенству

$$\log_{0,25}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}<0,$$

а последнее—неравенству $\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}>1$, откуда $\frac{3x+6}{x^2+2}>2$. Умножив обе части на x^2+2 (это выражение положительно при любых действительных x), получим $2x^2-3x-2<0$ или $2(x+0,5)(x-2)<0$, откуда $-0,5<x<2$.

При решении неравенств, содержащих в основании логарифма или степени параметры или неизвестные, необходимо отдельно рассматривать интервалы $(0;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$ значений основания.

Задача 15 (Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, 1975). *Решить неравенство*

$$(x^2-x+2)^{\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}}>1.$$

Поскольку основание степени x^2-x+2 положительно при любом действительном значении x (проверьте!), то данное неравенство эквивалентно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2-x+2<1, \\ \log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}<0, \end{cases}\quad \begin{cases} x^2-x+2>1, \\ \log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}>0. \end{cases}$$

На множестве всех действительных чисел неравенство $x^2-x+2<1$ не имеет решений, а неравенство $x^2-x+2>1$ удовлетворяется при любом x (докажите!). Поэтому первая система решений не имеет, а вторая эквивалентна неравенству $\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}>0$, т. е. $0<\frac{2x-3}{x+1}<1$.

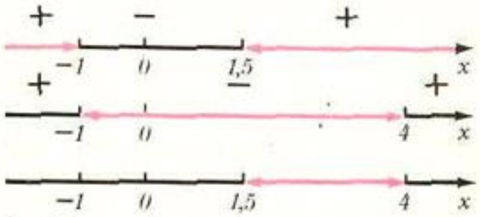

Рис. 5.

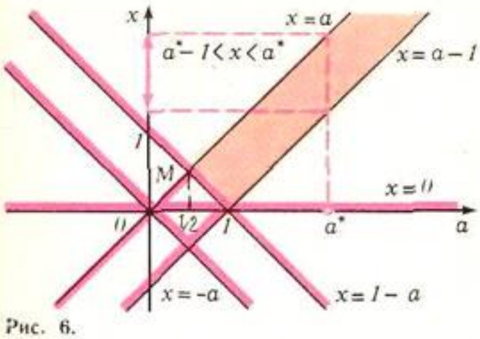

Рис. 6.

Преобразовав эти неравенства в систему

$$\begin{cases}(x+1)(x-1{,}5)>0,\\ (x+1)(x-4)<0,\end{cases}$$

решим ее методом интервалов (рис. 5). Ответ: $1{,}5<x<4$.

В заключение рассмотрим решение неравенства с параметром.

Задача 16 (МИЭТ, 1975). *Найти все значения параметра a, при которых неравенство*

$$\log_{a+x}|x(a-x)|<\log_{a+x}x$$

имеет хотя бы одно решение.

В области допустимых значений неизвестного x и параметра a, определяемой условиями $x>0$, $a+x>0$, $a-x>0$, $a+x\neq 1$, неравенство эквивалентно следующему: $\log_{a+x}(a-x)<0$. Последнее неравенство с учетом ОДЗ эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases}x>0,\\ x>-a,\\ x<a,\\ a+x>1,\\ a-x<1,\end{cases}\qquad \begin{cases}x>0,\\ x>-a,\\ x<a,\\ a+x<1,\\ a-x>1.\end{cases}$$

Проведем в прямоугольной системе координат (рис. 6) прямые $x=0$, $x=-a$, $x=a$, $x=1-a$ и $x=a-1$. Каждая прямая делит координатную плоскость на две полуплоскости, в одной из которых соответствующее неравенство выполняется, а в другой полуплоскости и на самой прямой не выполняется. Очевидно, первой системе удовлетворяют координаты точек, заполняющих на рисунке 6 закрашенную полосу и не лежащих на ее границах. Наименьшую координату $a=1/2$ среди точек, ограничивающих эту область, имеет точка M, следовательно, неравенство имеет решения при $a>1/2$. Эти решения (хотя их находить по условию не требуется) ясны из рисунка 6: $1-a<x<a$ при $1/2<a\leqslant 1$ и $a-1<x<a$ при $a>1$.

Предлагаем читателям самостоятельно рассмотреть вторую систему и убедиться в том, что она решений не имеет.

Упражнения

Решить следующие уравнения и неравенства

1 (МАМИ, 1974). $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-3}<\left(\frac{1}{5}\right)^{7}$.

2 (МТИММП, 1974). $9^x+15^x=25^x$.

3 (МАМИ, 1974). $\log_9 x+\log_9 x^2=\frac{\log_9 x}{\log_9 x^2}$.

4 (МИИГАиК, 1975). $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{4}\lg 16-\lg 4^{\sqrt{x+0{,}25}}$.

5 (МИТХТ, 1974). При каких значениях a уравнение
$x^2-(2^a-1)x-3(4^{a-1}-2^{a-2})=0$
имеет действительные корни?

6 (Станкин, 1975). $2\left(2^{\sqrt{x}}+3\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}-\sqrt[\sqrt{x}-1]{4^2}=0$.

7 (МИФИ, 1974). $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

8 (МАИ, 1974). $\log_{\sqrt{5-2x}}(x-1-|x-2|)=\log_{5-2x}(3|x-2|-3x+7)$.

9 (МИФИ, 1974). $x^2\cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^x=2^{1+\sqrt{2x+1}}+x^2\cdot 2^{x-2}$.

10 (МАТИ, 1974). $\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-7}{2x-4}>0$.

11 (МИРЭА, 1974). $\log_{\frac{9}{2}}\left(4^{x^2+4x}+2^{x^2+4x-1}-\frac{1}{2}\right)<1$.