

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение дополнительного образования детей
«Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)»**

ФИЗИКА

Геометрическая оптика

Задание №5 для 11-х классов

(2013 – 2014 учебный год)



г. Долгопрудный, 2014

Составитель: В.П. Слободянин, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задания №5 для 11-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2014,
30 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 7 марта 2014 г

Составитель:

Слободянин Валерий Павлович

Подписано 27.01.14. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,88.

Уч.-изд. л. 1,67. Тираж 600. Заказ №43-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)
ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение**,
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение**,
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение**.

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ЗФТШ, 2014

Введение

Думаю, вы уже слышали, что свет – это совокупность огромного числа элементарных частиц – фотонов, обладающих двумя, казалось бы, взаимоисключающими свойствами: в некоторых экспериментах они ведут себя как обыкновенные частицы, а в некоторых – как электромагнитные волны. В межзвёздном пространстве эти волны-частицы мчатся с невероятно большой скоростью – $3 \cdot 10^8$ м/с. Впервые числовое значение скорости света вычислил в 1675 году датский астроном Оле Рёмер, догадавшийся связать время задержки выхода одного из спутников Юпитера из его тени, со временем распространения света вдоль диаметра орбиты Земли. Скорость эта столь велика, что искривлением траектории фотонов в гравитационном поле, как правило, пренебрегают. Принято обозначать скорость света в вакууме буквой c . Скорость v фотонов в веществе и их скорость в вакууме связаны простым соотношением:

$$vn = c, \quad (1)$$

где коэффициент n называется абсолютным показателем преломления соответствующего вещества. Показатель преломления вакуума равен 1 по определению. Здесь *под скоростью света подразумевается скорость движения соответствующих гребней (или узлов) электромагнитных волн*. Такая скорость называется фазовой. Подробнее об этом мы поговорим в следующем задании.

Траектории фотонов мы будем называть световыми лучами. О световом луче имеет смысл говорить лишь тогда, когда он входит в состав светового пучка, содержащего огромное множество подобных лучей. Обычно хорошим приближением луча служит пучок света от лазерной указки.

Существует широкий круг явлений, которые можно описать с помощью простой, но весьма эффективной теории, опирающейся на небольшое число специфичных для неё постулатов и законы геометрии. Речь пойдёт о геометрической оптике. Сформулируем основные постулаты этой теории.

§ 1. Постулаты геометрической оптики

1. *В прозрачной однородной среде свет распространяется прямолинейно.*
2. *Распространение любого светового пучка в среде не зависит от наличия других пучков света.*
3. *Освещённость любой сколь угодно малой части экрана, создаваемая несколькими световыми пучками, равна сумме освещённостей, создаваемых каждым пучком в отдельности.*

Когда узкий пучок параллельных лучей света достигает плоской границы раздела двух сред, он частично возвращается обратно (отражается). Падающий луч \vec{S}_1 и нормаль (перпендикуляр) N , проведённая к границе раздела сред в точку падения (рис. 1.1), образуют плоскость P , называемую **плоскостью падения**. Острый угол φ_1 , лежащий между падающим лучом и нормалью, назы-

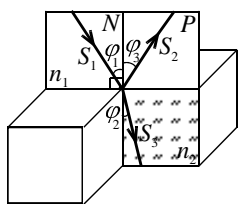


Рис. 1.1

вается **углом падения**. Отражённый луч \vec{S}_3 лежит в плоскости падения. Было бы странно, если бы после отражения он отклонился от этой плоскости в ту или иную сторону. Ведь свойства пространства по обе стороны от плоскости P абсолютно одинаковы. Острый угол φ_3 , лежащий между отражённым лучом и нормалью, называется **углом отражения**.

4. Угол падения равен углу отражения:

$$\varphi_1 = \varphi_3. \quad (1.1)$$

Эти четыре постулата стали обобщением огромного числа опытных фактов.

Теперь рассмотрим плоскую границу раздела двух **прозрачных** сред (пусть в них лучи света распространяются с разными скоростями). Луч, проникший из первой среды во вторую, изменит своё направление. О таком луче говорят, что он **преломился**. Преломлённый луч также лежит в плоскости падения P . Острый угол φ_2 , лежащий между прошедшим во вторую среду лучом \vec{S}_2 и нормалью N , называется **углом преломления**. При сравнении двух прозрачных веществ то из них, которое имеет больший показатель преломления, называется **оптически более плотным**. Следует заметить, что показатель преломления n , как правило, зависит только от частоты электромагнитной волны, распространяющейся в среде, но не зависит от величины угла падения и угла преломления.

5. Математическая связь между углами падения и преломления, а также показателями преломления соответствующих сред выражается в виде обобщённого закона Снелла (в латинской транскрипции – Снеллиуса):

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2. \quad (1.2)$$

Открытие датируется 1621 годом. Запомнить закон Снелла не просто, а очень просто: справа стоит произведение величин, относящихся к одной среде, а слева – к другой. Часто при записи закона Снелла вместо двух абсолютных показателей преломления n_1 и n_2 используют их отношение $n_2/n_1 = n_{21}$, называемое относительным показателем преломления второй среды относительно первой.

§ 2. Гипотезы Герона, Ферма, Веселага

Известный физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии Ричард Фейнман однажды сказал: «По мере развития науки нам хочется получить нечто большее, чем просто формулу. Сначала мы наблюдаем явления, затем с помощью измерений получаем числа и, наконец, находим закон, связывающий эти числа. Но истинное величие науки состоит в том, что мы можем найти такой способ рассуждения, при котором закон становится очевидным».

Эти слова в полной мере можно отнести к открытию Герона Александрийского, жившего приблизительно в середине I века н. э. Герон предположил, что свет от источника до приёмника распространяется по кратчайшему пути. Данная гипотеза делает излишним постулат № 1 геометрической оптики, ибо в однородной среде кратчайшее расстояние между двумя точками – прямая. Несложно показать, что и закон отражения вытекает из постулата Герона.

Но для света, проходящего через границу двух сред с различными показателями преломления, принцип Герона давал сбой. Только через полтора тысячелетия (в 1650 году) французский математик и физик Пьер Ферма устранил это затруднение. По идее Ферма свет распространяется между двумя точками вдоль такого пути, на преодоление которого требуется наименьшее время. Такой способ рассуждения получил впоследствии название *принцип наименьшего времени* Ферма. Опираясь на принцип Ферма, получим закон Снелла.

Задача 2.1. Зрочок наблюдателя находится на высоте H над поверхностью водоёма, а точечный источник света S – на глубине h . Расстояние от человека до источника (вдоль поверхности воды) равно L (рис. 2.1). Показатель преломления воды n_1 , воздуха $n=1$.

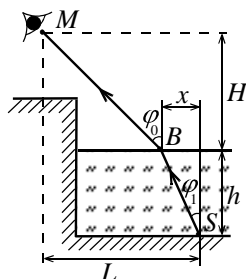


Рис. 2.1

Используя принцип Ферма, докажите, что свет от источника S до зрочка наблюдателя распространяется вдоль пути SBM , удовлетворяющего соотношению

$$n_1 \sin \varphi_1 = \sin \varphi_0.$$

Решение. Пусть проекция отрезка BS на поверхность воды равна x , тогда

$$BS = \sqrt{h^2 + x^2}, \quad MB = \sqrt{H^2 + (L-x)^2}.$$

$$t = \frac{SB}{v} + \frac{MB}{c} = \left(n_1 \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{H^2 + (L-x)^2} \right) / c. \quad (2.1)$$

Согласно принципу Ферма, время на преодоление пути от S до M минимально, а это значит, что $\frac{dt}{dx} = 0$ или $n_1 \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{L-x}{\sqrt{H^2 + (L-x)^2}} = 0$.

Из рис. 2.1 видим, что $\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \sin \varphi_1$, а $\frac{L-x}{\sqrt{H^2 + (L-x)^2}} = \sin \varphi_0$, откуда

следует: $n_1 \sin \varphi_1 = \sin \varphi_0$, что и требовалось доказать.

Здесь уместно ввести одно полезное определение, которое нам пригодится и в следующем задании по волновой оптике.

Рассмотрим однородную среду с показателем преломления n . Возьмём в ней две точки A и B . Соединим их линией. Пусть её длина l . Будем называть

оптической длиной линии произведение её длины на показатель преломления n . Если среда неоднородна, разобьём линию на участки, вдоль которых изменение показателя преломления можно не учитывать. Пусть l_i и n_i – длина и показатель преломления i -того участка. Оптическую длину линии определим как

$$L = \sum l_i n_i. \quad (2.2)$$

Обратите внимание на формулу (2.1), которую мы получили при выводе закона Снелла. В ней время пропорционально оптической длине линии между источником S и зрачком наблюдателя (коэффициент пропорциональности $1/c$). Значит, принцип Ферма можно переформулировать так: **оптическая длина луча между любыми двумя точками меньше оптической длины всякой другой линии, соединяющей те же точки.**

Позднее учёные заметили, что для света время прохождения пути от источника до приёмника может иметь не только минимум, но и локальный максимум. Пришлось подправлять принцип Ферма. Он стал звучать так: *луч света всегда распространяется в пространстве между двумя точками вдоль пути, время прохождения (оптическая длина) которого экстремально(а).*

Пример 1. Поместим точечный источник света S и приёмник света P рядом, в центре полусферы, внутренняя поверхность которой зеркальная (рис. 2.2). Пусть источник и приёмник разделены ширмой. **Оптическая длина луча от источника до приёмника для всех направлений одинакова.**

1) Возьмём на поверхности сферы точку A . Пусть в этой точке плоское зеркало касается поверхности полусферы. Удалим полусферу (рис. 2.3). В соответствии с принципом Ферма, свет от S к P будет распространяться по пути SAP , причём **оптическая длина соответствующего луча будет минимальна.**

2) Если исходной полусферы в точке A касается новая полусфера меньшего радиуса (рис. 2.4), то свет по-прежнему будет распространяться по пути SAP , но, в этом случае **оптическая длина луча будет максимальна.**

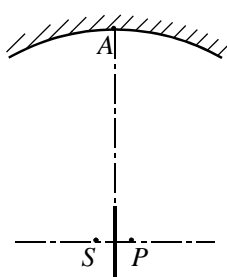


Рис. 2.2

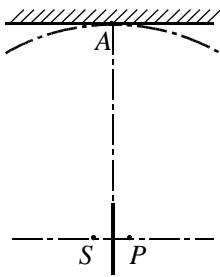


Рис. 2.3

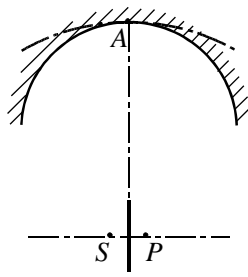


Рис. 2.4

На этом история принципа Ферма не закончилось. В середине 60-х годов прошлого века советский физик Виктор Григорьевич Веселаго предположил возможность существования сред с отрицательным показателем преломления. Он разработал теорию распространения электромагнитных волн в таких средах (см. журнал «Успехи физических наук», том 92, № 517, 1967 г). И вот в 2000 году в научных журналах появилось сообщения о том, что созданы композитные материалы (позднее их стали называть **метаматериалами**), необычные электродинамические свойства которых легко объяснить, если допустить, что в них коэффициент преломления отрицателен. Например, луч, преломившись на границе с метаматериалом, отклоняется в сторону, противоположную той, в которую он отклонялся бы в случае с $n > 0$ (рис. 2.5).

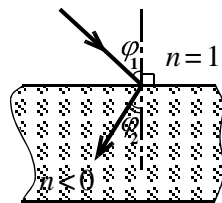


Рис. 2.5

В очередной раз пришлось подправлять принцип Ферма. Теперь в формулу (2.2) показатель преломления n_i нужно подставлять с соответствующим знаком.

Открытие метаматериалов вызвало в физике настоящий бум. Ими заинтересовались военные (есть идеи, как с помощью сред с отрицательным показателем преломления делать самолёты-невидимки). Большие вложения средств в исследования метаматериалов делают фирмы, занимающиеся телекоммуникацией...

§ 3. Явление полного отражения света

Рассмотрим явление прохождения света через плоскую границу раздела двух сред, когда показатель преломления n_1 первой среды больше соответствующего показателя n_2 второй среды. Для этого запишем закон Снелла в виде:

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2, \quad (3.1)$$

где n_{12} – относительный показатель преломления. Заметим, что $n_{12} > 1$.

Внимание! При формальных вычислениях левая часть уравнения (3.1) может оказаться больше 1. Но, справа стоит синус, значение которого всегда ≤ 1 . Как разрешается это противоречие?

Если n_{12} не на много превышает единицу (например, равно 1,5), а угол падения ϕ_1 мал, почти все излучение проходит во вторую среду.

Увеличение угла ϕ_1 сопровождается увеличением угла ϕ_2 , как того требует формула (3.1), и ростом доли излучения, отражённого от границы раздела сред. При этом, естественно, падает доля излучения, проникающего во вторую среду. Эта тенденция усиливается по мере приближения угла ϕ_2 к 90° . Нако-

нец, при некотором угле φ_1 угол φ_2 достигает 90° , и всё падающее на границу раздела сред излучение будет отражаться обратно. Соответствующий угол падения φ_1 можно найти из условия

$$n_{12} \sin \varphi = 1, \quad \text{или}$$

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{1}{n_{12}} = \varphi_{\text{п.о.}} \quad (3.2)$$

В научной литературе этот угол получил специальное название — *предельный угол полного отражения*. При углах $\varphi_1 > \varphi_{\text{п.о.}}$ во вторую среду излучение также проникать не будет. Этим и снимается противоречие между физической и математической стороной описанного явления преломления света.

Контрольный вопрос. Обычно световоды делают в виде тонких стеклянных нитей, центральная часть которых — «сердцевина» — состоит из вещества с малым коэффициентом поглощения и показателем преломления n_1 . Это вещество, как правило, очень чувствительно к химическим и механическим воздействиям. Снаружи «сердцевина» защищена «рубашкой» — прочным стеклом с показателем преломления n_2 , стойким к воздействию влаги и химических веществ. Какой из показателей преломления меньше, n_1 или n_2 ? Поясните почему?

Ответ. Чтобы на пути от передатчика к приёмнику свет не вышел из «сердцевины», «рубашку» световода делают из стекла с таким показателем преломления n_2 , чтобы на границе «сердцевина» — «рубашка» происходило полное отражение. Это возможно при $n_2 < n_1$.

§ 4. Плоские зеркала

Теперь приступим к построению изображений в плоских зеркалах. Пусть над зеркалом находится точечный источник света S . При построении его изображения необходимо использовать, *по крайней мере*, два произвольных луча, отражающихся от плоскости, совпадающей с плоскостью зеркала.

Методика построения изображения понятна из рис. 4.1. С практической точки зрения один из лучей (луч. 1) целесообразно пустить вдоль нормали к плоскости зеркала.

Если пучок лучей, вышедших из точки S , в результате отражения, преломления или искривления в неоднородной среде сходится в точке S_1 , то точка S_1

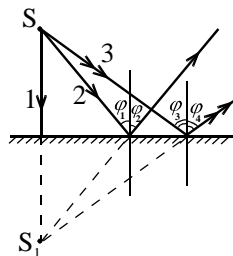


Рис. 4.1

называется **действительным изображением** точки S . Если же S_1 получено в результате пересечения продолжений этих лучей в направлении, обратном направлению распространения света, то изображение называется **мнимым**. Таким образом, S_1 — мнимое изображение точки S .

Задача 4.1. Лампочка L настольной лампы находится на расстоянии $L_1=0,6$ м от поверхности стола и $L_2=1,8$ м от потолка. Нить накала лампочки можно считать точечным источником света. На столе лежит осколок плоского зеркала в форме треугольника со сторонами 5 см, 6 см и 7 см.

1) На каком расстоянии x от потолка находится изображение нити накала лампочки?

2) Найти форму и размеры «зайчика» полученного на потолке от осколка зеркала (МФТИ, 1996).

Решение. Выполним рисунок, поясняющий смысл задачи. Обратите внимание на следующее обстоятельство: зеркало находится на столе на произвольном расстоянии от лампы (рис. 4.2). Несложно показать, что $L_1=L_3$. Следовательно $x = 2L_1 + L_2 = 0,6 \text{ м} \times 2 + 1,8 \text{ м} = 3 \text{ м}$.

Для определения формы и размера «зайчика» удобно рассмотреть лучи S_2 и S_3 , «исходящие» от мнимого изображения L_1 .

Т. к. плоскости зеркала и потолка параллельны, форма зайчика будет подобна зеркалу. Найдём коэффициент подобия. Если длина стороны зеркала h , а соответствующая ей длина стороны «зайчика» H , то можно записать пропорцию: $h/H = L_3/x$, из которой следует: $H = 5 h$. Таким образом, длины сторон «зайчика» равны 25 см, 30 см и 35 см соответственно.

Примечание. Как видно из рис. 4.2, весь свет, отражённый зеркалом, должен лежать в конусе, ограниченном лучами S_2 и S_3 , с вершиной в точке L_1 . В действительности мы можем видеть точки падения лучей на отражающую поверхность из любого места над зеркалом. Это происходит благодаря тому, что часть излучения рассеивается во все стороны, в том числе и в направлении глаз наблюдателя. Рассеянный свет возникает главным образом на дефектах поверхности: налипших пылинках, царапинах и других неровностях размером в несколько десятков микрометров (микрон). Чем больше неровностей, тем лучше видна отражающая поверхность. Белая писчая бумага так сильно ис-

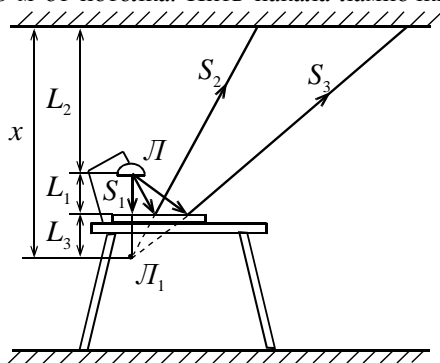


Рис. 4.2

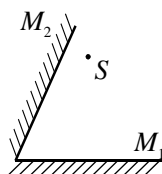


Рис. 4.3

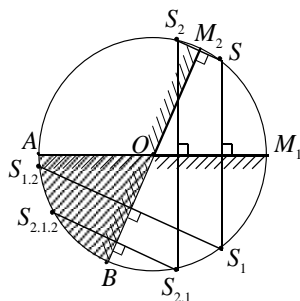


Рис. 4.4

пещрена неровностями, что практически не даёт зеркального отражения. Говорят, что такая поверхность отражает *диффузно*. Но зато она хорошо видна из разных мест.

Задача 4.2. В архиве Снеллиуса нашли чертёж, на котором были изображены точечный источник света S и два зеркала M_1 и M_2 , образующие двугранный угол 70° (рис. 4.3). От времени чернила выцвели, и невозможно было разглядеть, сколько изображений источника S давала такая система зеркал. Восстановить все изображения источника S . Сколько изображений источника S можно увидеть в такой системе зеркал?

Решение. Источник света и его изображение расположены симметрично относительно плоскости отражающего зеркала. Если получившееся изображение окажется с отражающей стороны второго зеркала, оно даст ещё одно изображение и т. д. Заметьте, что все изображения лежат на окружности, проведённой из точки O через источник S (рис. 4.4).

1) S_1 – изображение точечного источника S в зеркале M_1 ;

2) $S_{1,2}$ – изображение мнимого источника S_1 в зеркале M_2 . Источник $S_{1,2}$ не даст изображений, т. к. он лежит с обратной (не отражающей) стороны плоскостей, образованных зеркалами M_2 и M_1 .

3) S_2 – мнимое изображение точечного источника S в зеркале M_2 ;

4) $S_{2,1}$ – изображение источника S_2 в зеркале M_1 ;

5) $S_{2,1,2}$ – изображение источника $S_{2,1}$ в зеркале M_2 .

Источник $S_{2,1,2}$ не может дать изображение, т. к. он, как и источник $S_{1,2}$, лежит с обратной (не отражающей) стороны плоскостей зеркал M_1 и M_2 .

Следовательно, в зеркале можно увидеть 5 изображений источника S . Вообще любое изображение, оказавшееся в секторе AOB (он затемнён), не может более отразиться в зеркалах M_1 и M_2 .

§ 5. Приближение параксиальной оптики

Поскольку физика по своей сути – наука экспериментальная, в ней почти всегда получаются приближённые результаты. Тому много причин: неточности измерительной аппаратуры, приближённый характер используемых законов, неточность вычислительных приборов и т. д. Учитывая всё это, физики иногда уже сами исходные формулы сознательно записывают в приближённом виде. Это здорово облегчает им жизнь, упрощает вычисления и экономит время. Давайте рассмотрим одно из таких полезных упрощений. Называется оно *приближение параксиальной оптики*, а суть его заключается в том, что рассматриваются только те лучи, которые на своём пути незначительно отклоняются от исходного направления. В дальнейшем все углы, если это не оговаривается специально, будем выражать в радианах. Полезно запомнить два соотношения:

$$1^\circ = 0,01745 \text{ рад}, \quad 1 \text{ рад} = 57,3^\circ.$$

Если угол φ мал (менее 10°), то, как правило, можно считать

$$\cos \varphi \approx 1, \text{ а } \operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi.$$

Закон Снелла в параксиальном приближении выглядит предельно просто:

$$n_1 \varphi_1 = n_2 \varphi_2. \quad (5.1)$$

Задача 5.1. Луч света падает из воздуха на невозмущённую водную поверхность под углом $\varphi = 10^\circ$. Найти угол преломления по точной формуле (1.2) и приближённой (5.1). На сколько процентов приближённый результат отличается от точного? (Для воды $n = 4/3$.)

Решение. Согласно (1.2) $\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 / n$, откуда следует, что по точной формуле (сохраняем 4 значащих цифры) $\varphi_{2т} = 0,1306$ рад, в то время как по приближённой формуле $\varphi_{2п} = \varphi_1 / n = 0,1309$. Относительная погрешность приближённых вычислений $\left| \frac{\varphi_{2т} - \varphi_{2п}}{\varphi_{2т}} \right| \cdot 100\% \approx 0,2\%$, т. е. менее процента!

§ 6. Сферические зеркала

Трудно встретить человека, который бы не видел сферических зеркал. В самом деле, кто из нас не любовался сверкающими разноцветными шарами на новогодней ёлке, кто не потешался над своим изображением, искажённым сферической поверхностью.

Наверное, вы обращали внимание и на то, что чем дальше предмет от зеркала, тем правильнее его пропорции. Законами построения таких «правильных» изображений мы и займёмся.

Проведём через центр S сферы оптическую ось X . Поместим на ней точечный источник света S . Пусть SM – произвольный луч от источника до зеркала, φ_1 – угол падения, φ_2 – угол отражения. Если продолжить отражённый луч за зеркало (внутри шара), то на его пересечении с осью X (попутно ось X играет роль второго луча) будет лежать изображение S_1 источника S . Найдём аналитическую связь между углами φ_1 и φ_2 (рис. 6.1).

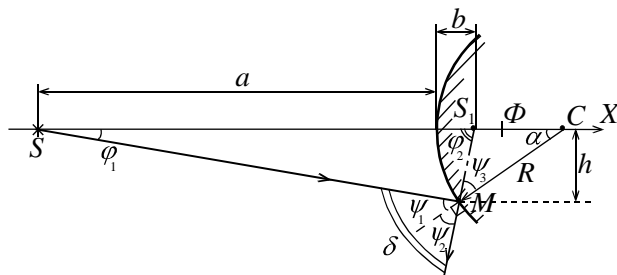


Рис. 6.1

Для треугольника SM_1S_1 угол δ – внешний, а по теореме о внешнем угле треугольника

$$\delta = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (6.1)$$

Для треугольника MS_1C угол φ_2 – внешний. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\varphi_2 = \alpha + \psi_3. \quad (6.2)$$

Так как $\psi_1 = \psi_2$ (по закону отражения), то $\delta = 2\psi_2$. Углы ψ_2 и ψ_3 равны как вертикальные, следовательно

$$\delta = 2\psi_3. \quad (6.3)$$

Подстановка (6.3) в (6.2) даёт: $\varphi_2 = \alpha + \frac{\delta}{2}$, откуда $\delta = 2(\varphi_2 - \alpha)$.

Подставим последнее выражение в (6.1): $2(\varphi_2 - \alpha) = \varphi_1 + \varphi_2$, или

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\alpha. \quad (6.4)$$

Смотрите! Если зафиксировать точку M на зеркале, то угол α тоже окажется фиксированным. Если теперь смещать источник S вдоль оси X , то углы φ_1 и φ_2 будут изменяться, но их разность окажется неизменной. В пределе, при удалении S влево на бесконечно большое расстояние угол φ_1 обратится в ноль, а φ_2 станет равным 2α . Заметим, что в приближении параксиальной оптики расстояние h от точки M до оси X много меньше радиуса R сферического зеркала. Следовательно, можно записать приближённые равенства:

$$\varphi_1 \approx \frac{h}{a}, \quad \varphi_2 \approx \frac{h}{b}, \quad \alpha \approx \frac{h}{R}.$$

Их подстановка в (6.4) даст: $\frac{h}{b} - \frac{h}{a} = 2\frac{h}{R}$,

или, после сокращения на h : $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{2}{R}$.

В силу произвольности выбора точки M легко сделать вывод, что и широкий пучок параллельных лучей, распространяющихся вдоль оптической оси, соберётся на расстояние $R/2$ от центра сферы в точке F , называемой *фокусом* сферического зеркала. Обозначим это расстояние символом F :

$$F = R/2, \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{F}. \quad (6.6)$$

Величину, обратную фокусному расстоянию, называют оптической силой сферического зеркала. Единица оптической силы называется *диоптрией* (дптр). Оптическая сила зеркала с $F = 1$ м равна 1 дптр.

Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и отстоящая от поверхности сферического зеркала (и центра сферы) на расстояние $R/2$, называется *фокальной плоскостью*.

Используя приближение параксиальной оптики, мы получили удобные формулы для построения изображений точечных источников в выпуклых

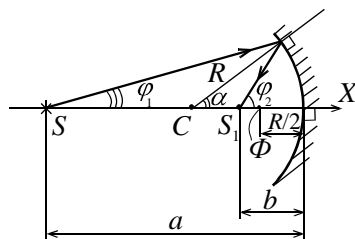


Рис. 6.2

сферических зеркалах. Несложно обобщить полученные результаты на случай вогнутых сферических зеркал (см. рис. 6.2). В этом случае

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha, \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (6.8)$$

Замечательно то, что подобного рода формулы получаются и для линз.

§ 7. Преломление света в тонком клине

Прежде чем приступить к изучению свойств тонкой линзы, давайте рассмотрим отклонение узкого пучка света от первоначального направления при прохождении через тонкий клин (рис. 7.1). Пусть n – показатель преломления материала клина, α – преломляющий угол при вершине клина $\alpha \ll 1$, φ_1 – угол падения света на первую грань клина. Найдём угол δ отклонения луча от исходного направления.

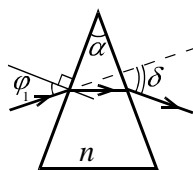


Рис. 7.1

Задачу будем решать в параксиальном приближении. Для наглядности угол α изобразим сильно увеличенным (рис. 7.2).

Запишем приближённый закон Снелла для обеих преломляющих поверхностей клина:

$$\varphi_1 = n\psi_1, \quad \varphi_2 = n\psi_2. \quad (7.1)$$

Для каждой из них найдём угол отклонения:

$$\delta_1 = \varphi_1 - \psi_1 = (n-1)\psi_1, \quad \delta_2 = \varphi_2 - \psi_2 = (n-1)\psi_2. \quad (7.2)$$

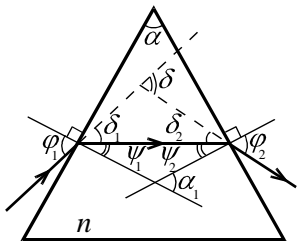


Рис. 7.2

По теореме о внешнем угле треугольника искомый угол

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (n-1)(\psi_1 + \psi_2). \quad (7.3)$$

По той же теореме $\psi_1 + \psi_2 = \alpha_1$. Теперь заметим, что углы α и α_1 равны, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. В итоге мы получим:

$$\delta = (n-1)\alpha_1 = (n-1)\alpha. \quad (7.4)$$

Любопытный результат: в параксиальном приближении угол отклонения не зависит от угла падения и остаётся постоянной величиной при любом (малом) угле падения.

§ 8. Тонкие линзы

Применим разработанную нами методику для исследования свойств оптических линз. Из произвольной точки C_1 проведём сферическую поверхность радиуса r_1 , разделяющую пространство на две половины. Пусть в левой половине пространства показатель преломления равен n_1 , а в правой – n_2 ,

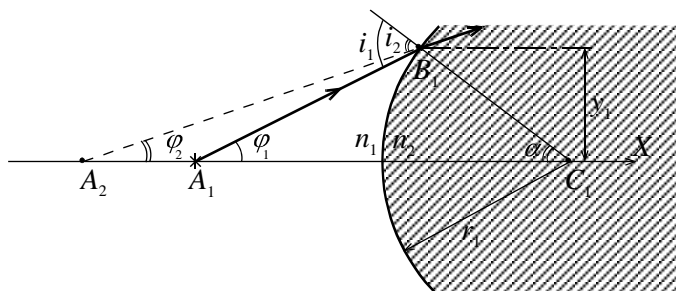


Рис. 8.1

причём для определённости будем считать, что $n_2 > n_1$. Проведём через точку C_1 ось X (рис. 8.1). Это – главная оптическая ось системы. Поместим на ней точечный источник света A_1 и рассмотрим один из лучей, распространяющихся от этого источника вправо до точки B_1 , лежащей на границе раздела двух сред. Для треугольника $A_1B_1C_1$ угол падения i_1 – внешний, поэтому в соответствии с теоремой о внешнем угле треугольника $i_1 = \varphi_1 + \alpha$.

В точке B_1 луч света преломится и, изменив направление своего движения, пойдёт так, как будто он был испущен в точке A_2 и все время распространялся прямолинейно. Для треугольника $A_2B_1C_1$ внешним будет угол преломления i_2 , и поэтому $i_2 = \varphi_2 + \alpha$. Подставим найденные выражения для углов i_1 и i_2 в приближённый закон Снелла (5.1): $n_1 i_1 = n_2 i_2$. Получится

$$(\varphi_1 + \alpha)n_1 = (\varphi_2 + \alpha)n_2. \quad (8.1)$$

В рамках приближения параксиальной оптики $\alpha = y_1 / r_1$, поэтому из (8.1) следует:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_2 n_2 = p_1 y_1. \quad (8.2)$$

Здесь мы ввели величину $p_1 = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$, называемую *оптической силой преломляющей поверхности*. Данное обозначение весьма полезно, т. к. оптическая сила зависит только от свойств этой поверхности и одинакова для всех лучей!

Теперь предположим, что на пути луча оказалась другая сферическая поверхность с радиусом r_2 , разделяющим пространство на области с показателями преломления n_2 и n_3 . Среду с показателем преломления n_2 , ограниченную поверхностями r_1 и r_2 , назовём *линзой*.

Введём одно определение: радиус кривизны оптической поверхности считается положительным, если центр кривизны расположен справа от неё, в противном случае *радиус будет отрицательным*.

Пусть $n_2 > n_3$ и r_2 – отрицателен. Рассуждая аналогично ранее рассмотренному случаю, мы получим:

$$\varphi_2 n_2 - \varphi_3 n_3 = p_2 y_2, \quad (8.3)$$

где

$$p_2 = \frac{n_3 - n_2}{r_2}. \quad (8.4)$$

Поскольку в уравнения (8.2) и (8.3) входит общее слагаемое: $\varphi_2 n_2$, мы можем объединить эти два уравнения в одно, исключив $\varphi_2 n_2$:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_3 n_3 = (p_1 y_1 + p_2 y_2). \quad (8.5)$$

Если расстояние между боковыми поверхностями линзы столь мало, что изменение высоты луча внутри линзы при любом φ_1 можно не учитывать (не забывая, что угол φ_1 мал), то такая линза называется *тонкой*.

Для тонкой линзы мы можем опустить индексы у высоты луча «у». Тогда (8.5) примет вид:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_3 n_3 = (p_1 + p_2) y. \quad (8.6)$$

Из (8.6) следует первый вывод: оптическая сила двух близко расположенных преломляющих поверхностей равна их сумме:

$$P_{\text{общ}} = p_1 + p_2.$$

Применительно к тонкой линзе этот вывод можно сформулировать так: оптическая сила линзы равна сумме оптических сил её преломляющих поверхностей.

Если справа и слева от линзы находится воздух (это наиболее типичная ситуация), то $n_1 = n_3 = 1$, и

$$p_{\text{общ}} = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.7)$$

формула (8.5) стала ещё проще:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_F. \quad (8.8)$$

В правой части (8.8) стоит выражение $\varphi_F = y \cdot p_{\text{общ}}$, где

$$p_{\text{общ}} = \frac{1}{F} = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (8.9)$$

Здесь F имеет размерность длины. Её физический смысл мы скоро выясним.

Будем считать острый угол между лучом света и положительным направлением оси X положительным, если он отсчитывается от оси X против часовой стрелки. В противном случае угол будет отрицательным. В принятых нами обозначениях угол φ_3 отрицателен, т. к. он отсчитывается от главной оптической оси по часовой стрелке. Точно также отрицателен и радиус r_2 (см. определение на стр. 14). Если брать только абсолютные величины углов, то вместо (8.8) следует записать

$$|\varphi_1| + |\varphi_3| = \varphi_F. \quad (8.10)$$

Для тонкой линзы формула (8.10) позволяет дать простую и красивую физическую интерпретацию. Начнём отодвигать источник света всё дальше и дальше от линзы. Угол φ_1 при этом будет уменьшаться, и в пределе обратится в 0, а угол φ_3 станет равным φ_F .

Вот и проявляется физический смысл величины F . Все лучи, проходящие параллельно главной оптической оси системы (независимо от расстояния y до неё), преломившись в линзе, соберутся в одной точке, называемой *фокусом*, и отдалённой от линзы на расстояние F . Величина F называется *фокусным расстоянием* линзы. Стал ясен и физический (геометрический) смысл отношения $y/F = \varphi_F$, где φ_F – это угол, под которым из фокуса линзы видна точка, в которой произошло преломление падающего луча. Если принять $y = R$ (где R – радиус оправки линзы), то смысл соотношения (8.10) станет ещё проще: сумма углов, под которыми виден край собирающей линзы из точек расположения источника света и его изображения, есть величина постоянная, равная углу, под которым из фокуса виден этот же край (рис. 8.2).

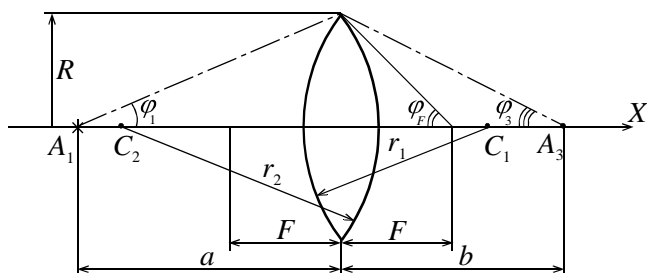


Рис. 8.2

В задачах углы задают редко. Обычно известно расстояние от линзы до предмета или до его изображения и фокусное расстояние. Учитывая, что $|\varphi_1| \approx \frac{R}{a}$, $\varphi_F \approx \frac{R}{F}$, а $|\varphi_3| \approx \frac{R}{b}$, мы из (8.10) после сокращения на R получим знаменитое выражение для формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (8.11)$$

Стоит отметить, что, хотя для практических вычислений формула (8.11) значительно удобнее формулы (8.10), в последней записи совершенно исчезает ясное физическое содержание полученного нами закона, которому подчиняются все оптические лучи, проходящие через тонкие собирающие линзы.

Наконец, важно помнить, что формулы линзы получены нами в приближении параксиальной оптики и поэтому не следует их абсолютизировать.

Теперь попробуем извлечь пользу из полученных нами формул. Совершенно ясно, что если источник приблизить к линзе настолько, что он окажется к ней ближе, чем её передний фокус, то для сохранения смысла формулы (8.10) будет необходимо перед абсолютным значением величины угла φ_3 взять минус. Это означает, что изображение источника стало мнимым и находится с

той же стороны от линзы, что и источник. Формулы же (8.10) и (8.11) примут вид

$$|\varphi_1| - |\varphi_3| = \varphi_F, \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (8.13)$$

Для наших рассуждений мы выбрали собирающую линзу. Но полученные формулы носят общий характер.

В самом деле, вернёмся к выражению (8.9). В нём величина $(n_2 - 1)$ положительная, а вот радиусы r_1 и r_2 могут иметь разные знаки. Всё зависит от того, с какой стороны находится центр кривизны соответствующих поверхностей. Мы уже видели, что для двояковыпуклой линзы $r_1 > 0$, $r_2 < 0$. А если линза двояковогнутая, т. е. ($r_1 < 0$, $r_2 > 0$), то фокусное расстояние окажется отрицательным, а значит *отрицательной* (рассеивающей) будет и линза. Иногда знак кривизны преломляющих поверхностей линзы задают иначе. Говорят, что если данная поверхность линзы выпуклая, её радиус кривизны положителен, а если вогнутая – отрицателен. При внимательном анализе оказывается, что оба подхода дают одинаковые результаты.

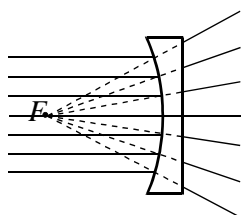


Рис. 8.3

Если фокусное расстояние линзы отрицательное, это приводит к перестановке переднего и заднего фокусов линзы. Фактически мы будем наблюдать следующее: параллельный пучок, падающий слева на линзу, после преломления всегда будет расходиться, причём исследователю, стоящему справа от линзы, будет казаться, что источник находится в переднем фокусе линзы (рис. 8.3).

При желании вы легко можете обобщить наши результаты на случай, когда линза находится не в воздухе, а в среде с показателем преломления n , отличным от 1, или когда слева и справа от линзы находятся среды с различными показателями преломления, или когда центры кривизны обеих поверхностей линзы лежат с одной стороны, или...

§ 9. Построение изображений, даваемых тонкой линзой

Предположим, что у нас есть тонкая собирающая линза Л. Поместим слева от нее на расстоянии, большем фокусного, вертикальную стрелку AB .

Пустим луч 1 из точки B на линзу параллельно главной оптической оси (рис. 9.1). Преломившись в линзе, луч пойдёт через задний фокус вправо вниз. Луч 2 пустим из точки B через передний фокус. Преломившись в линзе, он пойдёт вправо параллельно главной оптической оси. Существует точка B_1 , в которой оба луча пересекутся. B_1 есть изображение точки B . Любой другой луч, например 3, вышедший из точки B и прошедший сквозь линзу, должен пройти и через точку B_1 . Аналогичным образом построим изображение точки A и других точек, образующих стрелку AB . Итак, имея линзу и предмет AB , мы построили его изображение.

Отметим два достаточно общих свойства линзы: прямую линию она отображает в прямую; если в пространстве предметов прямая перпендикулярна главной оптической оси, то и её изображение окажется перпендикулярным этой оси. Вообще говоря, углы в пространстве предметов и пространстве изображений различны. Это прекрасно иллюстрирует рис. 9.2.

Квадрат $ABCD$ линза «превратила» в трапецию $A_1B_1C_1D_1$. Если справа и слева от линзы находится одна и та же среда, то для построения изображения точки часто оказывается удобным использовать ещё один «замечательный» луч — тот, который идёт через центр линзы. На рис. 9.1 он отмечен как луч 3. Этот луч, проходя через линзу, не меняет своего направления и так же, как и первые два луча, проходит через точку B_1 . Иногда такие лучи, проходящие через центр линзы, за их «несгибаемость» называют *побочной оптической осью*. Но с лучами, проходящими через центр линзы, нужно быть вниматель-

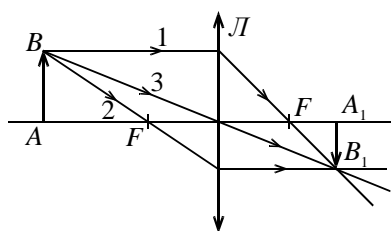


Рис. 9.1

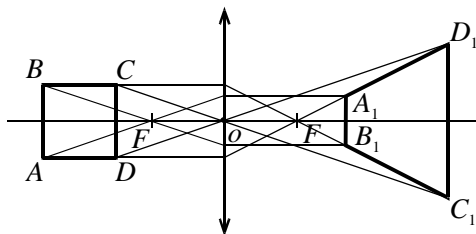


Рис. 9.2

ными. Если слева и справа от линзы находятся среды с различными показателями преломления (например, вода и воздух), то таких испытаний побочная ось не выдерживает и... сгибается!

Для изображений действительных предметов, даваемых тонкими собирающими линзами, полезно запомнить следующую таблицу.

Расстояние от линзы до предмета	Изображение прямое или перевёрнутое	Изображение действительное или мнимое	Изображение увеличенное или уменьшенное
$a < F$	прямое	мнимое	увеличенное
$F < a < 2F$	перевернутое	действительное	увеличенное
$a > 2F$	перевернутое	действительное	уменьшенное

Эта таблица – для положительной линзы. Если вы попытаетесь заполнить такую таблицу для отрицательной линзы, то убедитесь, что она всегда даёт прямое, мнимое, уменьшенное изображение действительного предмета. Отсюда, в частности, следует важный вывод: прямое изображение действительного предмета всегда мнимое.

Задача 9.1. Показать с помощью построения (рис. 9.3) направление, вдоль которого пришёл к линзе луч AB .

Решение. Прежде всего, при решении задач подобного рода ищут фокальные плоскости. Для этого следует провести через оптический центр O линзы побочную ось, параллельную одной из половинок луча, преломившегося в линзе. Проведём побочную ось параллельно лучу KL . Проверьте самостоятельно, что эта методика работает и для луча LM . Продолжим луч LM влево до пересечения в точке $F_{\text{л}}$ с побочной оптической осью. Эта точка лежит в

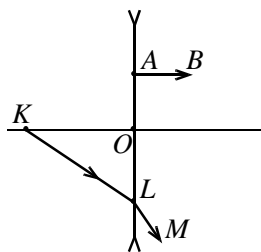


Рис. 9.3

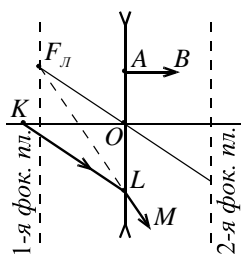


Рис. 9.4

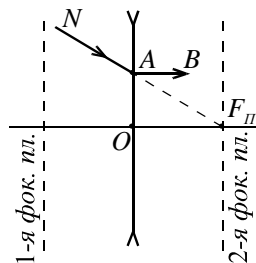


Рис. 9.5

фокальной плоскости. Другая фокальная плоскость находится справа от линзы на том же расстоянии. Теперь проводим через оптический центр линзы вторую побочную ось параллельно лучу AB . В нашем случае она совпадает с оптической осью системы. Интересующий нас луч должен пройти через точку A и точку $F_{\text{п}}$ пересечения построенной оси с фокальной плоскостью (рис. 9.5). Таким образом, луч AB до преломления в линзе распространялся вдоль прямой NA .

§ 10. Глаз и очки

Строение глаза (как оптического прибора) показано на рис. 10.1. Прочная шаровидная оболочка глаза, называемая склерой, в передней части более выпукла и совершенно прозрачна. Эта часть называется роговицей (1). За ней находится прозрачная водянистая масса (2), за ней – радужная оболочка (3), в центре которой есть круглое отверстие – зрачок. Диаметр зрачка может изменяться, регулируя тем самым диаметр проникающего в него светового пучка. Описанное устройство напоминает камеру-обскуру. Сразу за радужной оболочкой находится хрусталик (4), охваченный кольцевой мышцей (5).

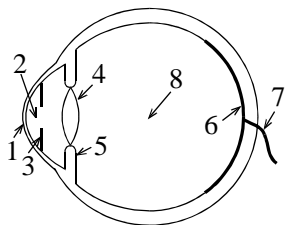


Рис. 10.1

Задняя внутренняя стенка склеры выстлана сетчаткой (6), состоящей из светочувствительных элементов. Именно от них раздражение по зрительному нерву (7) передаётся в мозг. Пространство между хрусталиком и сетчаткой заполнено стекловидным телом (8). Хрусталик (4) – это своеобразная двояковыпуклая линза (её показатель преломления возрастает от периферии к центру), с помощью которой на сетчатке создаётся резкое изображение рассматриваемых предметов. Кольцевая мышца, охватывая хрусталик и изменяя его кривизну, позволяет всё время создавать на сетчатке резкое изображение рассматриваемых предметов, независимо от расстояния до них (этот процесс называется аккомодацией). При нормальном зрении дальняя точка (т. е. наиболее удалённая точка, чётко фокусируемая на сетчатке) лежит в бесконечности и фиксируется без усилий. Ближняя точка располагается на расстоянии от 10 до 22 см от глаза (в зависимости от возраста человека). У разных людей в силу тех или иных причин могут наблюдаться отклонения от указанных границ аккомодации. У близоруких людей дальняя точка лежит на конечном расстоянии (иногда весьма небольшом), а у дальнозорких увеличено расстояние до ближней точки. Чтобы компенсировать указанные дефекты зрения, обычно применяют очки. Очки позволяют создать изображение предмета на таком расстоянии, на котором глаз может увидеть его резким. Очевидно, изображение, создаваемое линзами очков, должно быть прямым (какой прок от перевернутого изображения?), а прямое изображение всегда мнимое (см. абзац, следующий за таблицей в конце § 8). Для человека с нормальным зрением расстояние в 25 см является оптимальным для рассматривания деталей предмета без чрезмерного утомления глаз. Поэтому это расстояние называется *расстоянием наилучшего зрения*.

Изложенной выше информации вполне достаточно для того, чтобы суметь правильно подобрать очки или контактные линзы.

Задача 10.1. Дальнозоркий человек резко видит предметы, расположенные не ближе 1 метра от него. Какие контактные линзы ему следует носить, чтобы, читая книгу, он держал её на расстоянии $L = 25$ см?

Примечание: оптическая сила $P = F^{-1}$, где F выражено в метрах, измеряется в диоптриях (дптр).

Решение. Как уже говорилось ранее, контактная линза должна создавать прямое мнимое изображение книги на расстоянии $b = 1$ м. Саму книгу человек держит на расстоянии $a = 0,25$ м. Применим формулу линзы: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = P$. Численная подстановка даёт $P = +3$ дптр. Следовательно, человек, о котором говорится в задаче, нуждается в положительных контактных линзах с оптической силой $P = +3$ дптр.

§ 11. Поперечное и продольное увеличение

Рассмотрим линейный предмет AB , находящийся перед оптической системой (например, линзой) и его изображение A_1B_1 (рис. 11.1).

Определение. Увеличением оптической системы называется отношение величины изображения предмета к величине самого предмета.

Здесь полезно выделить два основных случая.

1) Предмет лежит в плоскости, расположенной перпендикулярно главной оптической оси системы. Возникающее при этом увеличение называется поперечным. Будем обозначать его Γ .

Для тонких линз все необходимые формулы вы можете получить самостоятельно, поэтому ниже предлагается только окончательный результат:

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{b-F}{F} = \frac{F}{a-F}. \quad (11.1)$$

Все размеры следует брать с соответствующими знаками.

Иногда наряду с поперечным увеличением Γ используют угловое увеличение Γ_φ . По определению

$$\Gamma_\varphi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \quad (11.2)$$

(Углы φ_1 и φ_2 изображены на рис. 11.2). Несложно доказать, что $\Gamma_\varphi \cdot \Gamma = 1$.

2) Предмет расположен вдоль главной оптической оси и лежит на ней. Возникающее при этом увеличение называется продольным. Получим формулу для продольного увеличения, создаваемого тонкой линзой:

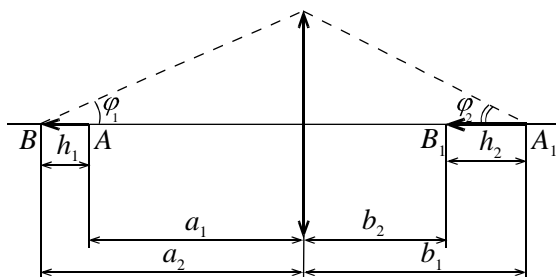


Рис. 11.2

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}. \quad (11.3)$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}. \quad (11.4)$$

Объединим (11.3) и (11.4):

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{b_1 - b_2}{b_1 b_2} \Rightarrow \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{b_1}{a_1} \frac{b_2}{a_2}.$$

Поскольку $|b_1 - b_2| = h_2$, $|a_2 - a_1| = h_1$ и $\frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1$, $\frac{b_2}{a_2} = \Gamma_2$, окончательно запишем, что продольное увеличение

$$\Gamma_{12} = \frac{h_2}{h_1} = \Gamma_1 \Gamma_2 \quad (11.5)$$

Если $h_1 \ll a_1$, a_2 и $h_2 \ll b_1$, b_2 , то

$$\Gamma_{12} \approx \Gamma^2. \quad (11.6)$$

Задача 11.1. Букашка ползёт со скоростью $v_0 = 0,2$ см/с в сторону тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 6$ см вдоль прямой, параллельной главной оптической оси линзы и отстоящей от оси на расстояние $a = 3$ см (рис. 11.3). Найти скорость перемещения изображения букашки, когда она находится на расстоянии $F/2$ от плоскости линзы.

Решение. Допустим, что за малый промежуток времени Δt букашка проползла расстояние $\Delta x = v_0 \Delta t$. В соответствии с формулой (11.5) изображение букашки сместится вдоль оси линзы на расстояние $\Delta x_1 = \Delta x \Gamma^2$, где

$$\Gamma = \frac{F}{a - F} = \frac{6}{3 - 6} = -2.$$

Знак «минус» означает, что изображение мнимое, т. е. находится с той же стороны от линзы, что и букашка (рис. 11.4). Из построения видно, что перемещение изображения букашки

$$\Delta l = \Delta x_1 / \cos \alpha.$$

В прямоугольном треугольнике $F'FA$ катеты AF и FF' относятся, как 1:2. Отсюда находим $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$. Следовательно, скорость перемещения изображения букашки

$$v_1 = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1}{\cos \alpha \cdot \Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Gamma^2}{\cos \alpha} = v_0 \frac{\Gamma^2}{\cos \alpha}.$$

Численный ответ: $v_1 \approx 0,9$ см/с.

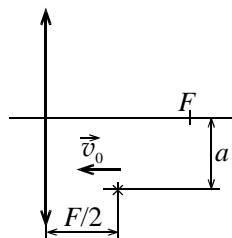


Рис. 11.3

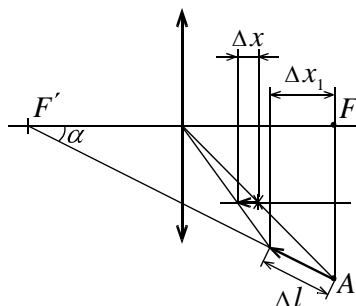


Рис. 11.4

Примечание. В данной задаче приближения параксиальной оптики не выполняются, поэтому использованные нами формулы также неточны. Полученный ответ нужно рассматривать только, как весьма приближённый, и вычисление v_1 с большей точностью не правомерно (в решениях этой задачи автор встречал ответ $v_1 = 0,894$ см/с).

Иногда требуется получить увеличенное мнимое изображение мелких предметов. В этом случае применяют лупу или микроскоп.

Лупа – это положительная линза с небольшим фокусным расстоянием ($10\text{мм} < F < 100\text{мм}$), располагаемая между рассматриваемым предметом и глазом. Обычно лупу располагают непосредственно возле глаза (как очки), а предмет – вблизи фокуса так, чтобы его мнимое изображение находилось на расстоянии наилучшего зрения a_n . При этом оказывается, что видимое увеличение предмета

$$N \approx \frac{a_n}{F}. \quad (11.7)$$

Микроскоп, как и лупа, увеличивает видимые угловые размеры исследуемых объектов. Но поскольку фокусное расстояние системы линз, входящих в микроскоп, ещё меньше, чем у лупы, то его увеличение (см. формулу (11.7)) может достигать нескольких сотен!

§ 12. Примеры решения задач

Задача 12.1. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране Э, расположенном на расстоянии $L = 4,9F$ от циферблата наручных часов Ц, получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой $R = 1,5$ см (рис. 12.1). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата часов и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения кончика изображения стрелки на экране? (МФТИ, 1997 г.)

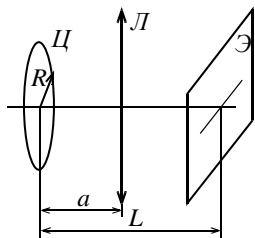


Рис. 12.1

Решение. Запишем уравнение тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} = \frac{1}{F} \Rightarrow a^2 - La + LF = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 3,5F; \quad a_2 = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 1,4F.$$

Так как по условию изображение уменьшенное, то $a = 3,5F$, следовательно,
 $b = L - a = 1,4F$, увеличение $\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{1,4}{3,5} = 0,4$.

Длина изображения стрелки $R' = R\Gamma = 1,5\text{ см} \cdot 0,4 = 0,6\text{ см}$, скорость

$$v = R' \omega = R' \frac{2\pi}{T} = 0,6 \frac{2\pi}{60} \approx 0,063\text{ см/с}.$$

Задача 12.2. На главной оптической оси тонкой положительной линзы диаметром D находится точечный источник света. Из линзы выходит расходящийся пучок лучей с максимальным углом отклонения лучей от главной оптической оси α . Определить максимальный угол отклонения β , если вместо положительной линзы на то же место поставить отрицательную линзу того же диаметра и с тем же фокусным расстоянием. Расстояние между источником и линзой равно d (МФТИ, 1982 г.).

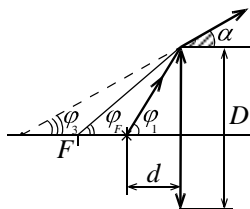


Рис. 12.2

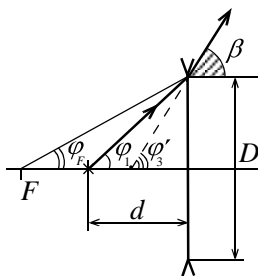


Рис. 12.3

Решение. Максимальный угол отклонения луча от оптической оси будет наблюдаться при прохождении луча через край линзы (на расстоянии $D/2$ от её оптического центра). В приближении параксиальной оптики для положительной линзы (формула (8.12)) запишем: $\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_F$, где (рис. 12.2):

$$\varphi_1 \approx \frac{D}{2d}, \quad (12.1)$$

а $\varphi_3 = \alpha$ по построению, следовательно,

$$\varphi_1 - \alpha = \varphi_F \quad (12.2)$$

Для отрицательной линзы $\varphi'_3 - \varphi'_1 = \varphi_F$ (см. рис. 12.3). Но по построению

$$\varphi'_3 = \beta \Rightarrow \beta - \varphi_1 = \varphi_F. \quad (12.3)$$

Решая совместно уравнения (12.2) и (12.3), получаем:

$$\beta = 2\varphi_1 - \alpha,$$

или, с учётом (12.1):

$$\beta = \frac{D}{d} - \alpha.$$

Некоторые учащиеся решили задачу «точно». В этом случае они получили ответ:

$$\beta = \arctg[D/d - \alpha].$$

Но, строго говоря, это превышение точности того приближения, в котором были получены формулы тонкой линзы.

Задача 12.3. Тонкая линза создаёт на экране изображение предмета в 20 раз большее, чем предмет. Экран передвинули вдоль оси линзы на 4 м. Чтобы получить резкое изображение, предмет пришлось переместить на 40 см. Каким, при этом, стало увеличение? В какую сторону – к линзе или от линзы – переместили предмет? (МФТИ, 1982 г.)

Решение. Продольное увеличение $\Gamma_{12} = \left| \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \right|$, где

$$|b_1 - b_2| = 4 \text{ м}, \quad |a_1 - a_2| = 0,4 \text{ м} \Rightarrow \Gamma_{12} = 10.$$

По условию $\Gamma_1 = 20$. Согласно формуле (11.5),

$$\Gamma_{12} = \Gamma_1 \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_2 = \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_1} \Rightarrow \Gamma_2 = \frac{10}{20} = 0,5.$$

Таким стало поперечное увеличение.

По определению $\Gamma = \frac{b}{a}$. Так как Γ уменьшилось, расстояние от предмета до линзы должно быть увеличено. Следовательно, предмет переместили от линзы.

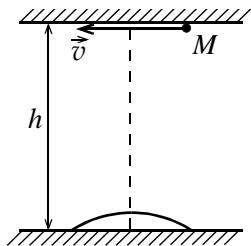


Рис. 12.4

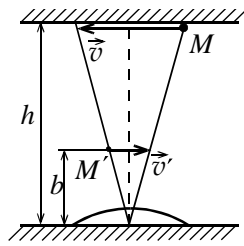


Рис. 12.5

Задача 12.4. В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см. По потолку ползёт муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала $h = 220$ см (рис. 12.4).

1) На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе?

2) Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы? (МФТИ, 1998 г.)

Решение. Луч света после прохождения линзы отражается от зеркала и проходит сквозь линзу ещё раз. Таким образом, оптическая сила системы «линза + зеркало» в два раза больше оптической силы одной линзы: $P_{\text{сист}} = 2/F$.

Расстояние от центра зеркала (и линзы) до изображения мухи найдём с помощью формулы линзы:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{h} = \frac{2}{F} \Rightarrow b = \frac{hF}{2h - F}; \quad b = 22 \text{ см.}$$

Скорость изображения мухи найдём из соотношения подобия (рис. 12.5):

$$\frac{v\Delta t}{h} = \frac{v'\Delta t}{b} \Rightarrow v' = v \frac{b}{h}; \quad v' = 0,2 \text{ см/с.}$$

Задача 12.5. Тонкая плосковогнутая линза с фокусным расстоянием $F = 15$ см приклеена плоской стороной к стенке аквариума, заполненного водой ($n = 4/3$). На линзу под углом α к главной оптической оси падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от её оптического центра, не изменяет своего направления. Найти h , если $\tan \alpha = 0,08$ (МФТИ, 1993 г.).

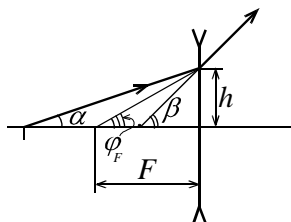


Рис. 12.6

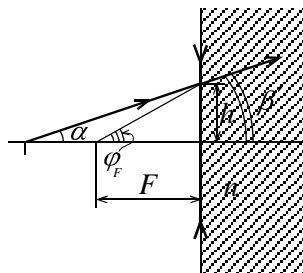


Рис. 12.7

Решение. Если бы за линзой не было аквариума осью (рис. 12.6), то

$$\beta - \alpha = \varphi_F. \quad (12.4)$$

Наличие аквариума приводит к тому, что

$$\beta = n\beta', \quad (12.5)$$

где β' – угол между лучом в воде и главной оптической осью (рис. 12.7). По условию $\beta' = \alpha$. Решая (12.4) и (12.5), получим:

$$\varphi_F = (n-1)\alpha.$$

С другой стороны, $\varphi_F = h/F$, $h = F(n-1)\alpha$. Численная подстановка даёт: $h = 0,4$ см.

Указание: не переписывайте условия контрольных вопросов и задач! Сразу записывайте их решения.

Контрольные вопросы

1*. Почему в летний день солнечные лучи, проходящие сквозь небольшие промежутки между листьями кроны деревьев, образуют на поверхности земли «зайчики» округлой формы (рис. 1), а не в форме многоугольников, подобных отверстиям, сквозь которые они пробиваются?



Рис. 1

2. В лист картона, лежащий перед вертикально установленным плоским зеркалом M_1 , воткнули две булавки A

и B (рис. 2). В какое место на штриховой линии следует воткнуть третью булавку C , которая сможет закрыть изображения булавок A и B ?

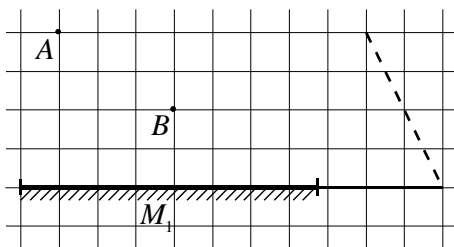


Рис. 2

3*. В плоском зеркале наше изображение оказывается перевернутым справа налево (например, правая рука выглядит как левая). Почему наше зеркальное изображение не перевернуто ещё и вверх ногами? Что действительно переворачивает зеркало?

4. Два зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 100^\circ$, внутри которого находится точечный источник света S . Сколько изображений источника S можно увидеть в такой системе?

5. Во время рыбной ловли туземцы при бросании дротика в рыбу делают поправку на преломление света в воде (рис. 3). Выше или ниже видимого изображения следует целиться, чтобы поразить добычу?

6. Толченное стекло непрозрачно. Почему оно становится прозрачным, если его погрузить в сосуд с водой?

7*. Тонкий стеклянный клин ($n_1 = 1,48$) погрузили в сосуд с сероуглеродом ($n_2 = 1,63$). Луч света падает на левую грань клина под малым углом φ (рис. 4). Выберите правильное утверждение:

А. Луч света, прошедший сквозь клин, отклонится от исходного направления вверх;

Б. Луч света, прошедший сквозь клин, отклонится от исходного направления вниз;

В. Результат зависит от того, в какую сторону от нормали к поверхности клина отсчитывается угол φ .

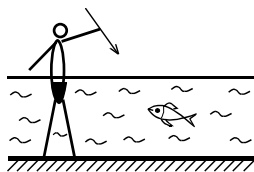


Рис. 3

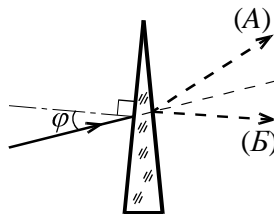


Рис. 4

8. Имеются две линзы – собирающая и рассеивающая. Как, не измеряя их фокусные расстояния, определить, у какой из линз фокусное расстояние меньше?

9. Точечный источник S и его изображение S_1 находятся на главной оптической оси линзы на одном и том же расстоянии $L \neq 0$ от плоскости линзы. Какая это линза – собирающая или рассеивающая? Чему равно фокусное расстояние линзы?

10. Тонкая плосковогнутая линза плоской стороной касается поверхности воды. Из воздуха на оптический центр линзы падает луч света под углом $\alpha = 12^\circ$. Какой угол β будет составлять этот луч с главной оптической осью в воде? Показатель преломления света в воде $n = 4/3$.

Задачи

1. Угол α между плоскостью зеркала и падающим лучом в k раз меньше угла φ между падающим и отраженными лучами. Вычислите угол α . Отдельно рассмотрите случай для $k = 7$.

2. На двух стенах тренажерного зала висят 3 одинаковых плоских зеркала (рис. 5). Какое максимальное количество своих изображений видит спортсмен, стоящий в центре зала? Какое максимальное количество изображений спортсмена одновременно может видеть сторонний наблюдатель? В каких областях зала для этого он должен находиться? Решение сопроводить поясняющим рисунком. План тренажерного зала (вид сверху) с расположением зеркал и всеми необходимыми размерами приведен на схеме. Считать спортсмена не слишком крупным (почти точечным).

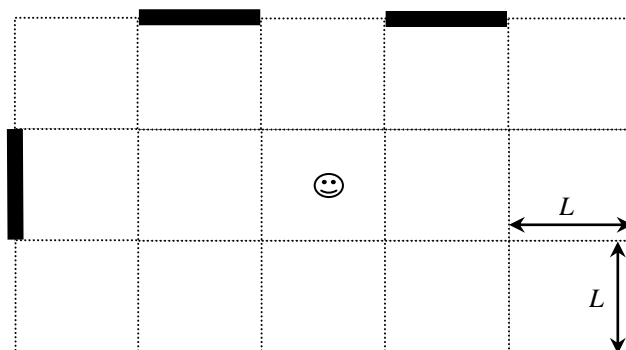


Рис. 5

3. Луч света падает из воздуха на плоскопараллельную стеклянную пластинку. Угол падения $\varphi = 50^\circ$. Угол между отраженным и преломленным лучами $\beta = 100^\circ$. Вычислите показатель преломления стекла.

4. Луч света падает на плоскую границу раздела двух сред под углом 30° , а преломляется под углом 15° . Вычислите предельный угол полного отражения.

5. Два одинаковых по форме тонких клина с разными показателями преломления n_1 и n_2 плотно прижаты друг к другу так, что образуют плоскопараллельную пластинку (рис. 6). Угол α при вершине каждого из клиньев равен $0,02$ рад. Луч света, падающий на такую пластинку, отклоняется на угол $\delta = 4,6$ мрад. На сколько отличаются друг от друга показатели преломления клиньев?

6. В сосуд с водой ($n_0 = 4/3$) погрузили два одинаковых по форме тонких клина с разными показателями преломления n_1 и n_2 . Клинья плотно прижаты друг к другу так, что образуют плоскопараллельную пластинку (рис. 6). Угол α при вершине каждого из клиньев равен $0,02$ рад. Луч свет, падающий на такую пластинку, отклоняется на угол $\delta = 4,6$ мрад. На сколько отличаются друг от друга показатели преломления клиньев?

7. На главной оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F находится точечный источник света S . Найдите расстояние x от источника до ближайшего фокуса линзы, если оно равно расстоянию от этого фокуса до изображения источника

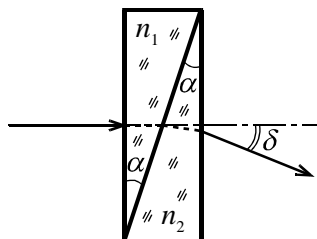


Рис. 6

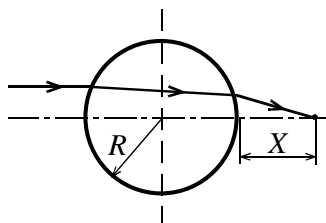


Рис. 7

8*. Стрелка AB перпендикулярна главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Расстояние от стрелки до экрана, на котором получилось её чёткое изображение, равно $L = 81$ см. Если линзу передвинуть вдоль её главной оптической оси на расстояние $l = 9$ см, то изображение вновь окажется чётким. Каково фокусное расстояние линзы?

9. Узкий пучок света, проходящий перпендикулярно оси симметрии цилиндра радиуса R , фокусируется на расстоянии X от его поверхности (рис. 7). Вычислите показатель преломления вещества, заполняющего цилиндр, если $X = kR$. Рассмотрите случаи $k = \{0; 0,5; 1,0\}$.