**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей**
**«Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института (государственного университета)»**

# МАТЕМАТИКА

## Планиметрия

Задание №2 для 11-х классов

(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2013

*Составитель*: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №2 для 11-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2013, 32 с.

**Дата отправления заданий по физике и математике – 28 октября 2013 г.**

**Составитель:**
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Подписано 03.07.13. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0.
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1000. Заказ №9-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

***e-mail: zftsh@mail.mipt.ru***

**Наш сайт: www.school.mipt.ru**

## Решение планиметрических задач

Основное внимание, как во всех Заданиях, уделяется методам и приёмам решения задач. Именно решение задач делает изучение вообще, и геометрии в частности, активным. Ведь каждая решённая задача – это некоторый поиск и, пусть небольшое, но открытие. «То, что вы были принуждены открыть сами, оставляет в вашем уме дорожку, которой вы сможете воспользоваться, когда в том возникнет необходимость» (это слова немецкого физика XVII столетия Лихтенберга, который известен своими афоризмами).

Итак, если хотите научиться решать задачи, приобрести навыки решения – учитесь этому, разбирайте решения в учебнике и нашем Задании, повторяйте эти решения (ведь так учатся всему), а затем пробуйте свои силы. У Вас получится.

Задание состоит из четырёх параграфов. В параграфе 1 повторяются признаки подобия треугольников, решается несколько характерных задач на эту тему, повторяются свойства медиан, биссектрис и высот треугольника. Второй параграф посвящён свойствам касательных, хорд, секущих, вписанных и описанных четырёхугольников. В параграфе 3 рассматривается применение теорем синусов и косинусов, разобраны задачи, решение которых требует применение тригонометрии. Почти все эти темы разбирались в заданиях по геометрии в 9 и 10 классах ЗФТШ, поэтому более простые утверждения здесь приводятся без доказательства. Тем, кто поступил в ЗФТШ в 11 класс, рекомендуется доказать эти утверждения самостоятельно, а те, кто учится в ЗФТШ не первый год, найдут много новых интересных задач среди тех 18, подробные решения которых приведены в задании.

Задание оканчивается контрольными вопросами и задачами для самостоятельного решения; они оценены по трудности в очках, которые указаны в скобках после номера. Знаком * «звёздочка» отмечены более трудные вопросы и задачи.

За правильный ответ и верное решение задачи ставится полное число очков, за недочёты и ошибки определённое число очков снимается.

Работу над заданием рекомендуется начать с внимательного чтения его и самостоятельного решения (после ознакомления) всех приведённых в нём задач. Ответы на контрольные вопросы следует давать подробные, со ссылками на соответствующие теоремы учебника или данного задания, с доказательствами своих ответов. В случае отрицательного ответа должен быть приведён опровергающий пример. Приведём примеры ответов на контрольные вопросы.

**Вопрос 1.** Можно ли утверждать, что треугольник равнобедренный, если его биссектриса является медианой?

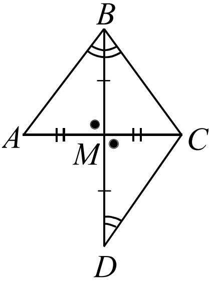


Рис. 1

**Ответ:** Да, можно. Докажем это. Пусть в треугольнике $ABC$ биссектриса $BM$ является медианой: $AM = MC$ (рис.1). На продолжении биссектрисы $BM$ отложим отрезок $MD$, равный $MB$. Треугольники $ABM$ и $CDM$ равны по первому признаку: у них углы при вершине $M$ равны как вертикальные и $AM = CM$, $BM = MD$. Из равенства треугольников следует

$$CD = AB \qquad (1)$$

и $\angle CDM = \angle ABM$. Но $\angle ABM = \angle CBM$, поэтому $\angle CDM = \angle CBM$, т. е. в треугольнике $BCD$ углы при основании $BD$ равны. По теореме этот треугольник равнобедренный: $BC = CD$. Отсюда и из (1) заключаем: $BC = AB$. Утверждение доказано.

**Вопрос 2.** Могут ли длины сторон треугольника быть меньше 1мм, а радиус описанной окружности больше 1км?

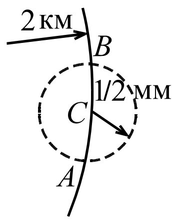



Рис. 2

**Ответ:** Да, могут. Приведём пример. Из точки $C$, лежащей на окружности радиуса 2 км, дугой радиуса 1/2мм отмечаем точки $A$ и $B$, лежащие на большей окружности (рис. 2); очевидно, $AC = CB = 1/2$ мм.

Треугольник $ABC$ вписан в окружность радиуса 2км, а его наибольшая сторона $AB < AC + BC = 1$ мм.

**Вопрос 3.** Можно ли через точку окружности провести три равные между собой хорды?

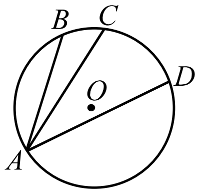



Рис. 3

**Ответ:** Нет, нельзя. Действительно, предположим противное, т. е. предположим, что хорды $AB$, $AC$ и $AD$ окружности с центром в точке $O$ равны между собой (рис. 3). Тогда точки $B, C$ и $D$ одинаково удалены от точки $A$, т. е. они лежат на окружности с центром в точке $A$. Однако, этого не может быть, так как две окружности с разными центрами не могут иметь более двух общих точек. Значит предположение неверно.

**Вопрос 4.** Верно ли, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$?

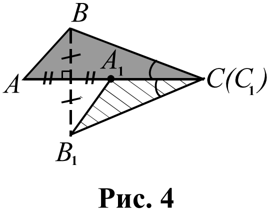



Рис. 4

**Ответ:** Нет, например, на рис. 4 показаны треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$, для которых, как легко видеть, выполнены все заданные равенства, но $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$, т. к. $AC \neq A_1C_1$.

Итак, при утвердительном ответе надо либо привести доказательство того, что данное утверждение верно (как в ответе на вопрос 1), либо привести конкретный пример реализации заданных условий (как в ответе на вопрос 2).

**При отрицательном ответе надо либо привести рассуждения, приводящие к противоречию заданных условий аксиоме, теореме или определению (как в ответе на вопрос 3), либо построить один опровергающий пример (как в ответе на вопрос 4).**

После повторения тем в §1 – 3 в заключительном четвёртом параграфе обсудим вопросы подходов к решению, важность хорошего рисунка, выбора переменных, а также остановимся на некоторых ошибках, допускаемых учащимися и абитуриентами.

***Это задание вместе с присланным решением будут Вам полезны при подготовке к экзаменам***.

## § 1. Подобие треугольников. Отношение площадей подобных треугольников. Свойства медиан, биссектрис и высот

Две фигуры $F$ и $F'$ называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия, т. е. таким преобразованием, при котором расстояния между двумя точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз. Если фигуры $F$ и $F'$ подобны, то пишется $F \sim F'$. Напомним, что <u>в записи подобия треугольников $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ предполагается, что вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах,</u> т. е. $A$ переходит в $A_1$, $B$ – в $B_1$, $C$ – в $C_1$. Из свойств преобразования подобия следует, что **у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.** В частности, если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

### Признаки подобия треугольников

Два треугольника подобны:

1) если два угла одного соответственно равны двум углам другого;
2) если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами, равны;
3) если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого.

Из признаков подобия следует утверждения, которые удобно использовать в решении задач:

1°. **Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие в различных точках, отсекает треугольник, подобный данному.**

2°. **Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает на них отрезки, пропорциональные данным сторонам,** т. е. если $MN \| AC$ (рис. 5), то

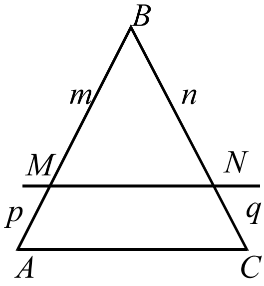



**Рис. 5**

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}=\frac{m+p}{n+q}.$$

3°. **Если прямая пересекает две стороны треугольника и отсекает на них пропорциональные отрезки, то она параллельна третьей стороне,** т. е. если (см. рис. 5)

$$\frac{m}{n}=\frac{m+p}{n+q} \quad \text{или} \quad \frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

то $MN$ параллельна $AC$ (доказательство было дано в задании для 9 класса).

**Задача 1.** Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям, пересекает боковые стороны трапеции в точках $M$ и $N$. Найти длину отрезка $MN$, если основания трапеции равны $a$ и $b$.

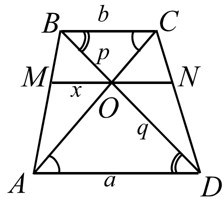



**Рис. 6**

$\Delta$ Пусть $O-$ точка пересечения диагоналей трапеции (рис. 6). Обозначим $AD=a, BC=b, MO=x, BO=p, OD=q$.

1. $$\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \\ \triangle BOC \sim \triangle DOA \\ \text{(по двум углам)} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{p}{q}. \qquad (1)$$

2. $$\left.\begin{array}{l} MO \parallel AD \\ \Delta MBO \sim \Delta ABD \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{p}{p+q}. \qquad (2)$$

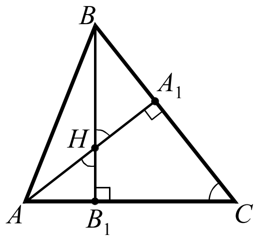
Из (1) и (2) следует $x=a\dfrac{p}{p+q}=a\dfrac{p/q}{p/q+1}=\dfrac{ab}{a+b}$, т. е. $MO=\dfrac{ab}{a+b}.$

Аналогично устанавливаем, что $NO = \dfrac{ab}{a+b}$, поэтому $\boxed{MN = \dfrac{2ab}{a+b}}$.

Результат этой задачи, как утверждение, верное для любой трапеции, следует запомнить. ▲

Напомним лемму о высотах, доказанную в задании 1 для 9-х классов:

**если две высоты треугольника пересекаются, то произведение отрезков одной высоты равно произведению отрезков другой высоты.**




Доказательство.

$\Delta HA_1B \sim \Delta HB_1A, \Rightarrow \dfrac{HA_1}{HB_1} = \dfrac{BH}{AH},$ то $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$. Попутно отметим, что $\angle AHB_1 = \angle C$.

**Задача 2.** Высоты $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $H$ (рис. 7), при этом $AH = 3HA_1$ и $BH = HB_1$. Найти косинус угла $ACB$ и площадь треугольника $ABC$, если $AC = a$.

$\Delta$ Обозначим $HA_1 = x, HB_1 = y.$

1. Точка $H$ – середина высоты. Если отрезок $MH$ проходит через точку $H$ и параллелен основаниям, то $MN$ – средняя линия; $MN = \dfrac{a}{2}.$

2. $\Delta HA_1N \sim \Delta AA_1C \Big| \Rightarrow \dfrac{HN}{AC} = \dfrac{x}{4x},\ HN = \dfrac{1}{4}a.$ Значит $MH = HN = \dfrac{a}{4}$ и $AB_1 = B_1C = a/2$. Треугольник $ABC$ равнобедренный, $AB = BC$.

3. $\angle B_1BC = 90^\circ - C,$ поэтому

$$\underline{\angle BHA_1 = \angle AHB_1 = \angle C} \text{ и}$$

$$\Delta HA_1B \sim \Delta HB_1A \Big| \Rightarrow \frac{HA_1}{HB_1} = \frac{BH}{AH}, \text{ т. е.}$$

$$\underline{AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1}.$$

Это означает, что если две высоты треугольника пересекаются, то произведение отрезков одной высоты равно произведению отрезков другой высоты (доказана лемма о высотах).

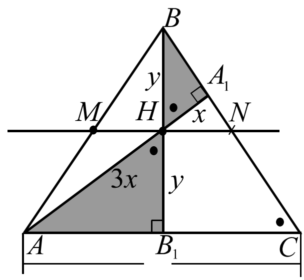



**Рис. 7**

Итак $3x\cdot x=y\cdot y,\ y=x\sqrt{3},\quad \cos C=\cos\left(\angle AHB_1\right)=\dfrac{y}{3x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

4. $\Delta AHB_1: AB_1^2=\left(3x\right)^2-y^2,\ \dfrac{a^2}{4}=6x^2,\ x=\dfrac{a}{2\sqrt{6}},\ y=\dfrac{a}{2\sqrt{2}},$ тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BB_1=ay=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}.\ \blacktriangle$$

Справедливо также следующее утверждение:

**если продолжения высот $AA_1$ и $BB_1$ тупоугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$, то справедливо равенство $AH\cdot HA_1=BH\cdot HB_1$.** (докажите самостоятельно)

Из определения подобия фигур следует, что в подобных фигурах все соответствующие линейные элементы пропорциональны. Так, **отношение периметров подобных треугольников равно отношению длин соответствующих сторон.** Или, например, в подобных треугольниках отношение радиусов вписанных окружностей (также и описанных окружностей) равно отношению длин соответствующих сторон. Это замечание поможет нам решить следующую задачу.

**Задача 3.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины $C$ прямого угла проведена высота $CD$ (рис. 8). Радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$, равны соответственно $r_1$ и $r_2$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

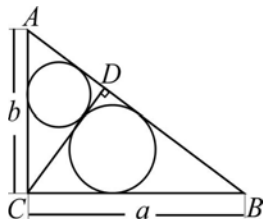



**Рис. 8**

$\Delta$ Обозначим искомый радиус $r$, положим $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Из подобия прямоугольных треугольников $ACD$ и $ABC$ (у них равные углы при вершине $A$) имеем $\dfrac{r}{r_1}=\dfrac{c}{b}$, откуда $b=\dfrac{r_1}{r}c$. Прямоугольные треугольники $BCD$ и $BAC$ также подобны, поэтому $\dfrac{r}{r_2}=\dfrac{c}{a}$, – откуда $a=\dfrac{r_2}{r}c$. Так как $a^2+b^2=c^2$, то, возводя в квадрат выражения для $a$ и $b$ и складывая их, получим $\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 c^2 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 c^2 = c^2$ или $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = 1$. Находим $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ▲

Напомним, что **площади подобных фигур относятся как квадраты соответствующих линейных элементов.** Для треугольников это утверждение можно сформулировать так: **площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.** Рассмотрим характерную задачу на эту тему.

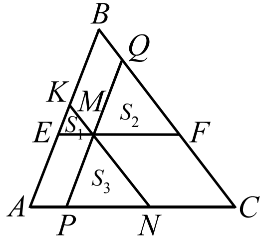



**Рис. 9**

**Задача 4.** Через точку $M$, лежащую внутри треугольника $ABC$, проведены три прямые, параллельные его сторонам. При этом образовались три треугольника (рис. 9), площади которых равны $S_1$, $S_2$ и $S_3$. Найти площадь треугольника $ABC$.

Δ Легко видеть, что треугольники $EKM$, $MQF$ и $PMN$ подобны треугольнику $ABC$.

Пусть $S$ – площадь треугольника $ABC$, тогда

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{EM}{AC}\right)^2; \ \frac{S_2}{S} = \left(\frac{MF}{AC}\right)^2; \ \frac{S_3}{S} = \left(\frac{PN}{AC}\right)^2.$$

Отсюда находим

$$EM = \sqrt{\frac{S_1}{S}}AC, \ MF = \sqrt{\frac{S_2}{S}}AC, \ PN = \sqrt{\frac{S_3}{S}}AC.$$

А т. к. $EM = AP$, $MF = NC$, то

$$EM + PN + MF = AP + PN + NC = AC.$$

Таким образом, $AC = AC \cdot \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)$, откуда следует

$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2. \ ▲$$

– · – · – · –

В заданиях 9-го и 10-го классов были доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** (О медианах).

**1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения каждая медиана делится в отношении 2 : 1, считая от вершины.**

**2. Три медианы, пересекаясь, разбивают треугольник на 6 треугольников с общей вершиной, площади которых равны между собой.**

(На рис. 10 площадь каждого из треугольников с вершиной $M$ и основанием – половиной стороны, равна $\frac{1}{6}S_{ABC}$). (Точка пересечения медиан называется центром тяжести треугольника).

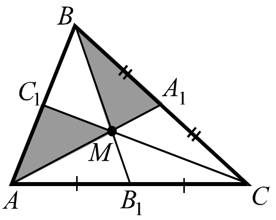



**Рис. 10**

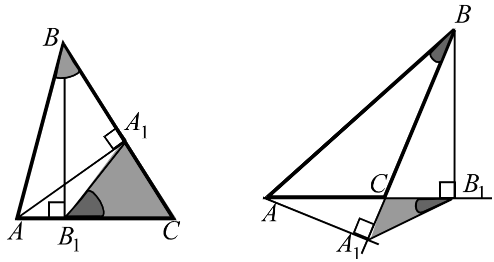



**Рис. 11**

**Теорема 2.** (О высотах).

**1. Три высоты треугольника или три прямые, на которых лежат высоты, пересекаются в одной точке. (Эта точка называется ортоцентром).**

**2. Если соединить основания двух высот $AA_1$ и $BB_1$ треугольника $ABC$, то образуется треугольник, подобный данному: $\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC$ (рис. 11).**

Коэффициент подобия равен $\cos C$, если угол $C$ острый, и равен $|\cos C|$, если угол $C-$ тупой.

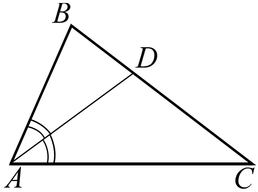



**Рис. 12**

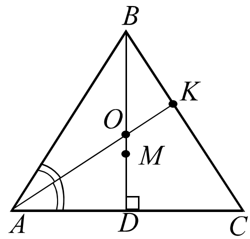



**Рис. 13**

**Теорема 3. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е.** если $AD$ – биссектриса треугольника $ABC$ (рис. 12), то

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

**Задача 5.** В равнобедренном треугольнике основание равно 8, высота к основанию равна 3 (рис. 13).

Найти расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис треугольника.

Δ В равнобедренном треугольнике высота к основанию является также медианой и биссектрисой, точка пересечения медиан и точка пересечения биссектрис лежат на $BD$. Точка $M$ пересечения медиан по теореме 1 делит $BM$ в отношении

$$BM : MD = 2 : 1 \text{ т. е. } BM = \frac{2}{3}BD = 2.$$

Если биссектриса угла $A$ пересекает высоту $BD$ в точке $O$, то $AO$ – биссектриса угла $A$ в треугольнике $ABD$ и по теореме 3 $\frac{BO}{OD}=\frac{AB}{AD}$. Так как $AD=4$, $AB=5$, то $\frac{BO}{OD}=\frac{5}{4}$ и $BO=\frac{5}{9}BD=\frac{5}{3}$. Находим искомое расстояние $OM$:

$$OM = BM - BO = \frac{1}{3}. \blacktriangle$$

– • – • – • –

<u>Задача о «делении отрезка».</u> Как правило, такие задачи решаются дополнительным построением – проведением прямой, параллельной рассекающей, и использованием подобия или теоремы о пересечении сторон угла параллельными прямыми. Общий подход к решению таких задач даёт теорема Менелая (далее напомним формулировку и доказательство, в задании 9-го класса это уже было сделано).

**Задача 6.** Точка $D$ лежит на стороне $BC$, точка $K$ – на стороне $AB$ треугольника $ABC$, прямые $AD$ и $CK$ пересекаются в точке $O$ (рис. 14). Найти отношение $AO:OD$, если $AK:KB=1:3$ и $BD:DC=2:3$.

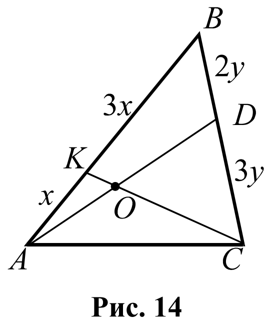



**Рис. 14**

Δ Расставим на рисунке данные о делении сторон. Чтобы решение стало более понятным, сделаем ещё один рисунок (рис. 14а), на нём проведём $DS \parallel CK$.

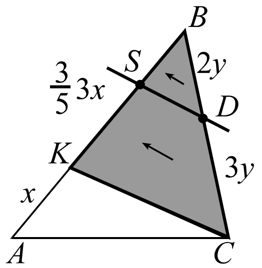



**Рис. 14а**

Рассматриваем треугольник $KBC$. Из $DS \parallel CK$ по утверждению $2^{\circ}$ на стр. 6 следует $KS : KB = CD : CB$, откуда $KS = \frac{3}{5} \cdot 3x = \frac{9}{5}x$. (Ставим это на рисунке).

На этом этапе удобно сделать ещё один рисунок (рис. 14б), либо на рисунке 14а провести прямую $AD$ и отметить точку $O$.

В треугольнике $ASD$ по построению $SD \parallel KO$. По утверждению $2^{\circ}$ имеем $AO : OD = AK : KS$, откуда следует $AO : OD = 5 : 9$. ▲

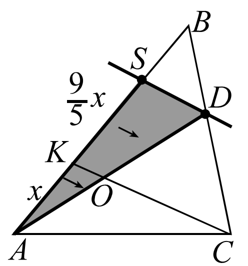



**Рис. 14б**

**Теорема** (Менелая) о треугольнике и секущей.

**Точки $A_1$ и $C_1$, расположенные на сторонах $BC$ и $AB$ треугольника $ABC$, и точка $B_1$, расположенная на продолжении стороны $AC$ за точку $C$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда имеет место равенство:**

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \qquad (*)$$

□ Пусть точки $B_1, A_1, C_1$ лежат на одной прямой.

Проводим $CK \parallel AB$

$$\Delta A_1CK \backsim \Delta A_1BC_1 \Big| \Rightarrow \frac{CK}{C_1B} = \frac{A_1C}{BA_1};$$

$$\Delta B_1AC_1 \backsim \Delta B_1CK \Big| \Rightarrow \frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}.$$

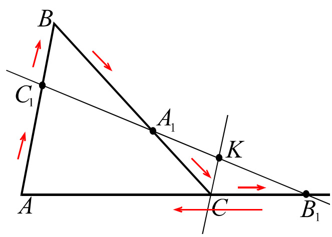



**Рис. 15а**

Почленно перемножив, получим $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{CB_1}$, откуда и следует

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

(стрелочки на рис. 15а показывают последовательность взятия отрезков, движение начинается в точке $A$ и в ней же заканчивается).

2. Пусть имеет место равенство (*). Через две точки $B_1$ и $A_1$ проводим прямую, точку пересечения с отрезком $AB$ обозначаем $C_2$ (рис. 15б). Точки $A_1, B_1$ и $C_2$ лежат на одной прямой, по доказанному имеет место $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

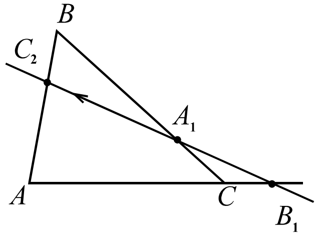



**Рис. 15б**

Сравнивая с равенством (*), устанавливаем, что $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$ и показываем, что точки $C_2$ и $C_1$ совпадают. ■

Применим теорему Менелая к решению задачи 6 (см. рис. 14): рассматриваем треугольник $BAD$ и секущую $CK$ (она определяет три точки: $K, O, C$). Имеем: $\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AO}{OD} \cdot \frac{DC}{CB} = 1$, т. е. $\frac{3x}{x} \cdot \frac{AO}{OD} \cdot \frac{3y}{5y} = 1$, откуда $\frac{AO}{OD} = \frac{5}{9}$.

Дополнение. Если при тех же условиях задачи 6 требуется определить какую часть площади треугольника составляет, например, площадь $4^{\text{х}}$ угольника $KODB$, то полезно сначала решить задачу о «делении отрезка» и найти, например, $AO : OD = 5/9$, а затем использовать тот факт, что площади треугольников с одинаковыми высотами относятся как длины их оснований:

$$S_{ABC} = S;\ S_{ADC} = \frac{3}{5}S \text{ (т. к. } DC = \frac{3}{5}BC\text{);}$$

$$S_{OCD} = \frac{9}{14}S_{ADC} = \frac{9}{14}\left(\frac{3}{5}S\right) = \frac{27}{70}S \text{ (т. к. } OD = \frac{9}{14}AD\text{);}$$

$$S_{KCB} = \frac{3}{4}S \text{ (т. к. } BK = \frac{3}{4}AB\text{), поэтому}$$

$$S_{KODB} = S_{KCB} - S_{OCD} = \frac{3}{4}S - \frac{27}{70}S = \frac{51}{140}S.$$

## § 2. Свойства касательных, хорд, секущих. Вписанные и описанные четырёхугольники

**Свойство 1** (свойство касательных). **Если из точки к окружности проведены две касательные, то длины отрезков от этой точки до точек касания равны и прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, делит угол между касательными пополам (рис. 16).** Используя это свойство, легко решить следующую задачу.

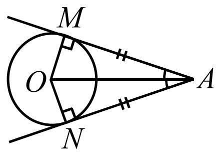



**Рис. 16**

**Задача 7.** На основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ расположена точка $D$ так, что $AD = a$ и $CD = b$. Окружности, вписанные в треугольники $ABD$ и $DBC$, касаются прямой $BD$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Найти отрезок $MN$.

$\Delta$ Пусть $a > b$. Точки касания окружностей со сторонами треугольника $ABC$ обозначим $P, Q, E$ и $F$ (рис. 17). Положим $BM = z, MN = x,\ ND = y$. По свойству касательных $DE = y$, $QD = x + y$, $AQ = AP = a - (x + y)$, $EC = CF = b - y$, $PB = BM = z$, $BF = BN = z + x$ (рис. 17а).

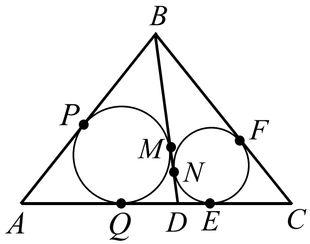



**Рис. 17**

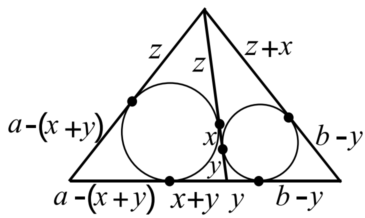



**Рис. 17а**

Выразим боковые стороны:
$AB = z + a - x - y$, $BC = z + x + b - y$. По условию $AB = BC$; получим $z + a - x - y = z + x + b - y$, откуда находим $x = \dfrac{a-b}{2}$. Если $a < b$, рассуждая аналогично, получим $x = \dfrac{b-a}{2}$. Итак: $MN = \dfrac{|a-b|}{2}$. ▲

Четырёхугольник называется описанным около окружности, если окружность касается всех его сторон.

**Теорема 4. В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противолежащих сторон равны.**

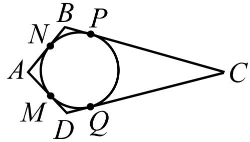



**Рис. 18**

□ Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 18).
По свойству касательных $AM = AN$, $NB = BP$, $PC = CQ$ и $QD = DM$, поэтому $AM + MD + BP + PC = AN + NB + CQ + QD,$ что означает $AD + BC = AB + CD$.

Докажем обратное утверждение. Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны удовлетворяют условию $AB + CD = BC + AD$. Положим $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$.

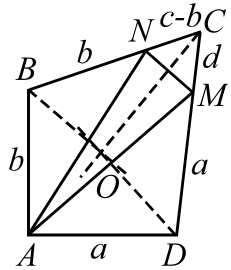



**Рис. 19**

По условию $a + c = b + d$, что равносильно $c - b = d - a$.
Пусть $d > a$. Отложим на большей стороне $CD$ меньшую сторону $DM = a$ (рис. 19). Так как в этом случае $c > b$, то также отложим $BN = b$, получим три равнобедренных треугольника $ABN$, $ADM$ и $MCN$.

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, отсюда следует, что если провести биссектрисы углов $B, C$ и $D$, то они разделят пополам соответственно отрезки $AN$, $MN$ и $AM$ и будут им перпендикулярны. Это означает, что биссектрисы будут *серединными перпендикулярами* трёх сторон треугольника $ANM$, а они по теореме пересекаются в одной точке. Обозначим эту точку $O$. Эта точка одинаково удалена от отрезков $AB$ и $BC$ (лежит на $OB$), $BC$ и $CD$ (лежит на $OC$) и $CD$ и $AD$ (лежит на $OD$), следовательно, точка $O$ одинакова удалена от всех четырёх сторон четырёхугольника $ABCD$ и является центром вписанной окружности. Случай $d = a$, как более простой, рассмотрите самостоятельно. ■

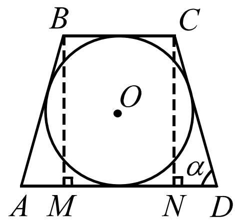



**Рис. 20**

**Задача 8.** Равнобокая трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если длины оснований равны $a$ и $b$.

Δ Пусть в равнобокой трапеции $ABCD$ $BC = b$, $AD = a$ (рис. 20). Эта трапеция равнобокая

$(AB = CD)$, она описана около окружности, следовательно, $AB + CD = AD + BC$. Отсюда получаем: $AB = CD = \dfrac{a+b}{2}$.

Проведём $BM$ и $CN$ перпендикулярно $AD$. Трапеция равнобокая, углы при основании равны, следовательно, равны и треугольники $ABM$ и $DCN$ и $AM = ND$.
По построению $MBCN$ – прямоугольник, $MN = BC = b$, поэтому $AM = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(a - b)$. Из прямоугольного треугольника $ABM$ находим высоту трапеции $ABCD$:

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Очевидно, что высота трапеции равна диаметру окружности, поэтому радиус вписанной окружности равен $\boxed{r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}}$. ▲

<u>Очень полезная задача.</u> Заметим, что из решения также следует, что в равнобокой описанной трапеции $\boxed{\cos\alpha = \frac{a-b}{a+b}}$.

**Свойство 2** (угол между касательной и хордой).
***Градусная мера угла, образованного хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключённой между его сторонами*** **(рис. 21).**

□ Рассматриваем угол $NAB$ между касательной $NA$ и хордой $AB$. Если $O$ – центр окружности, то $OA \perp AN$, $\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \alpha$. Сумма углов треугольника равна 180º, следовательно, угол $AOB$ равен $2\alpha$. Итак, $\alpha = \angle NAB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

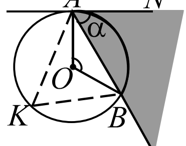


**Рис. 21**

Обратим внимание, что угол $NAB$ равен любому вписанному углу $AKB$, опирающемуся на ту же дугу $AB$.

Случай $\alpha \geq 90^\circ$ рассматривается аналогично. ■

Из этого свойства следует важная теорема «о касательной и секущей», которая часто используется при решении задач.

**Теорема 5.** Пусть к окружности проведены из одной точки касательная $MA$ и секущая $MB$, пересекающая окружность в точке $C$

(рис. 22). Тогда справедливо равенство $MA^2 = MB \cdot MC$, т. е. **если из точки *M* к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки *M* до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки *M* до точек её пересечения с окружностью.**

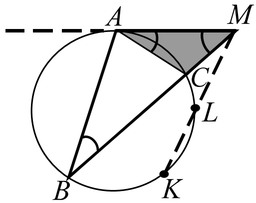



**Рис. 22**

□ Угол $MAC$ образован хордой и касательной, $\angle MAC = \angle ABC$. Так как в треугольниках $MAC$ и $MBA$ угол $M$ – общий, то по двум углам они подобны. Из подобия следует: $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MA}$. Откуда получаем:

$$MA^2 = MB \cdot MC. \ ■$$

**Следствие.** *Если из точки* $M$ *к окружности проведены две секущие:* $MB$, *пересекающая окружность в точке* $C$, *и* $MK$, *пересекающая окружность в точке* $L$ (рис. 22), *то справедливо равенство* $MB \cdot MC = MK \cdot ML$.

□ Проведём касательную $MA$. По доказанной теореме $MA^2 = MB \cdot MC$ и $MA^2 = MK \cdot ML$, следовательно

$$MB \cdot MC = MK \cdot ML. \ ■$$

**Задача 9.** Окружность проходит через вершины $C$ и $D$ трапеции $ABCD$, касается боковой стороны $AB$ в точке $B$ и пересекает большее основание $AD$ в точке $K$ (рис. 23). Известно, что $AB = 5\sqrt{3}$, $BC = 5$ и $KD = 10$. Найти радиус окружности.

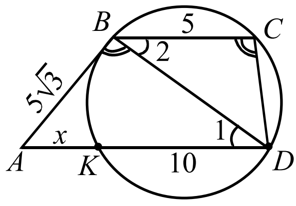



**Рис. 23**

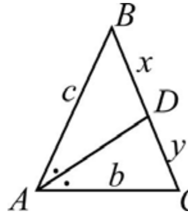
Δ 1. Пусть $AK = x$, тогда $AD = 10 + x$. *По теореме о касательной и секущей* $AB^2 = AK \cdot AD$, т. е. $75 = x(x+10)$, откуда $x = 5$. Итак, $AD = 15$.

2. Заметим теперь, что угол $ABD$ между касательной $AB$ и хордой $BD$ равен вписанному углу $BCD$, а из параллельности прямых $AD$ и $BC$ следует равенство углов 1 и 2. По первому признаку подобия $\Delta ABD \sim \Delta DCB$. Из подобия имеем $\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$. Из последнего равенства находим, что $BD^2 = AD \cdot BC$, т. е. $BD = \sqrt{AD \cdot BC} = 5\sqrt{3}$, а из первого равенства находим $CD = \frac{AB \cdot BD}{AD} = 5.$

3. Так как $KB = CD$ ($KBCD$ – вписанная трапеция, она равнобокая), и $KB^2 + BD^2 = KD^2$, то $\angle KBD = 90^\circ$ и $KD$ – диаметр окружности.

Значит её радиус равен 5. ▲

**Теорема 6.** **Пусть $AD$ – биссектриса треугольника $ABC$ (рис. 24), тогда $AD = \sqrt{AB \cdot AC - DB \cdot DC}$** (в обозначениях рисунка 24 $\boxed{AD = \sqrt{bc - xy}}$).




**Ри. 24**

□ Опишем около треугольника $ABC$ окружность, точку пересечения прямой $AD$ и окружности обозначим $K$ (рис. 24а).

□ Опишем около треугольника $ABC$ окружность, точку пересечения прямой $AD$ и окружности обозначим $K$ (рис. 24а).

Обозначим $AD = z$, $DK = m$. $\Delta ABD \backsim \Delta AKC$ ($\angle ABD = \angle AKC$ и $\angle 1 = \angle 2$). Из подобия следует $\frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC}$, т. е. $\frac{c}{z+m} = \frac{z}{b}$, откуда

$$z^2 + zm = bc, z^2 = bc - zm.$$

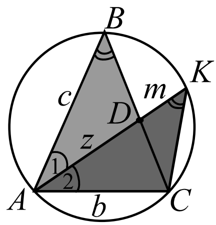



**Рис. 24а**

*По свойству пересекающихся хорд* $AD \cdot DK = BD \cdot CD$, т. е. $z \cdot m = x \cdot y$, тогда $z^2 = bc - xy, z = \sqrt{bc - xy}$. ■

**Теорема 7.** **Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна $180^\circ$.**

Из этой теоремы следует:

а) *из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность;*

б) *около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобокая.*

**Задача 10.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AD$ и $BF$ пересекаются в точке $O$ (рис. 25). Известно, что точки $F, O, D$ и $C$ лежат на одной окружности и что $DF = \sqrt{3}$. Найти площадь треугольника $ODF$.

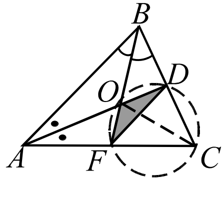



**Рис. 25**

Δ Так как $\angle BAO = \frac{1}{2} \angle A$ и $\angle ABO = \frac{1}{2} \angle B$, то

$$\angle DOF = \angle AOB = \pi - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B).$$

Четырёхугольник $DOFC$ вписан в окружность, по теореме 7 $\angle DOF = \pi - \angle C$, т. е. $\pi - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \pi - \angle C$, откуда, учитывая, что $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$, находим $\angle C = \frac{\pi}{3}$.

Теперь заметим, что точка $O$ – точка пересечения биссектрис, $CO$ – биссектриса угла $C$, следовательно, углы $OCD$ и $OCF$ равны друг другу. Это вписанные углы, поэтому вписанные углы $ODF$ и $OFD$ равны им и равны друг другу. Таким образом,

$$\angle ODF = \angle OFD = \frac{1}{2}\angle C = \frac{\pi}{6}.$$

Треугольник $DOF$ равнобедренный с основанием $DF = \sqrt{3}$ и углом при основании 30º. Находим его высоту, опущенную из вершины $O$, и площадь треугольника $ODF$: $S = \frac{1}{2}\ h \cdot DF = \frac{\sqrt{3}}{4}$. ▲

## §3. Теоремы косинусов и синусов. Применение тригонометрии к решению геометрических задач

Как обычно, в треугольнике $ABC$ стороны, противолежащие углам $A, B$ и $C$, обозначим $a, b$ и $c$. Справедливы две теоремы, устанавливающие соотношения между сторонами и углами треугольника, утверждения которых можно кратко записать так:

**теорема косинусов:** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$;

**теорема синусов:** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

Покажем на примерах, как применяются эти теоремы.

**Задача 11.** Доказать, что **в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон**.

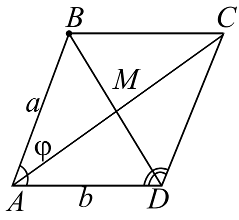



**Рис. 26**

Δ Пусть в параллелограмме $ABCD$ длины сторон равны $a$ и $b$, длины диагоналей равны $d_1$ и $d_2$: $AC = d_2$, $AB = DC = a$, $BD = d_1$ (рис. 26). Если $\varphi = \angle BAD$, то $\angle ADC = 180^\circ - \varphi$. Из треугольников $ABD$ и $ACD$ по теореме косинусов будем иметь: $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$, $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(180^\circ - \varphi\right)$. Складывая почленно эти равенства и учитывая, что $\cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -\cos\varphi$, получим требуемое равенство $\boxed{d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2}$. ▲

**Следствие.** Из решения данной задачи легко получить выражение медианы $m_c$ треугольника через его стороны $a, b$ и $c$. Пусть в треугольнике $ABD: AB = a$, $AD = b$, $BD = c$; $AM -$ медиана, $AM = m_c$ (рис. 26). Достроим этот треугольник $ABD$ до параллелограмма $ABCD$ и воспользуемся результатом задачи 11, получим:

$$c^2 + (2m_c)^2 = 2a^2 + 2b^2, \text{ откуда } \boxed{m_c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}}.$$

**Задача 12.** На стороне $AD$ ромба $ABCD$ взята точка $M$, при этом $MD = \frac{3}{10}AD$ и $BM = MC = 11$. Найти площадь треугольника $BCM$.

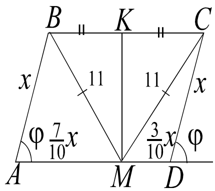



**Рис. 27**

Δ 1. Обозначим длину стороны ромба $x$, $\angle BAD = \varphi$ (рис. 27). По условию $MD = \frac{3}{10}x$. Следовательно, $AM = \frac{7}{10}x$. Из треугольников $ABM$ и $MCD$ по теореме косинусов получаем:

$$BM^2 = x^2 + \left(\frac{7}{10}x\right)^2 - 2x\,\frac{7}{10}x\,\cos\varphi,$$

$$MC^2 = x^2 + \left(\frac{3}{10}x\right)^2 - 2x\,\frac{3}{10}x\,\cos\left(180^\circ - \varphi\right).$$

Приравниваем правые части (по условию $BM = MC$), подставляем $\cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -\cos\varphi$, сокращаем на $x^2$, приводим подобные члены и получаем $\cos\varphi = \frac{1}{5}$. Подставляя найденное значение $\cos\varphi$ и $BM = 11$ в первое равенство, находим $x = 10$.

2. В равнобедренном треугольнике $BMC$ основание равно 10, находим высоту $MK$:

$$MK = \sqrt{BM^2 - BK^2} = \sqrt{BM^2 - \frac{1}{4}BC^2} = \sqrt{96},$$

тогда площадь треугольника $BMC$ равна $\frac{1}{2}BC \cdot MK = 20\sqrt{6}$. ▲

**Задача 13.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) проведена биссектриса $AD$ (рис. 28). Найти радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности, если $AD$ =4 и $DC = \sqrt{6}$.

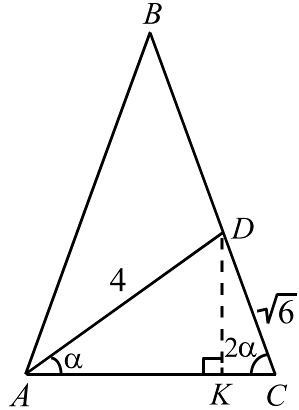



**Рис. 28**

Δ 1. Углы при основании $AC$ в треугольнике $ABC$ равны, обозначим $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle DAC = \alpha$. По теореме синусов из треугольника $ADC$ следует $\frac{4}{\sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{\sin\alpha}$, откуда $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Находим: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{3}$ и $\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. Вычисляем сторону $AC$:

$$AC = AK + KC = AD\cos\alpha + DC\cos 2\alpha = \frac{5}{3}\sqrt{6}.$$

3. Как следует из теоремы синусов, **радиус $R$ описанной около треугольника $ABC$ окружности может быть найден из равенства**

$$R = \frac{AC}{2\sin B}, \text{ т. е. } R = \frac{AC}{2\sin(180^\circ - 4\alpha)} = \frac{AC}{4\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = \frac{15\sqrt{3}}{8}. ▲$$

В решении следующих задач существенно используется знание тригонометрических тождеств, умение решать тригонометрические уравнения. Подобные задачи не рассматривались в заданиях 9 – 10 классов, поскольку большинство учащихся в то время не обладало знаниями по тригонометрии в достаточном объёме.

В этих задачах в качестве неизвестной выбирается некоторый угол и по данным задачи и известным метрическим соотношениям составляется тригонометрическое уравнение или система уравнений. Их составление и решение является основным этапом всего решения задачи, а искомые элементы определяются через значения тригонометрических функций введённого угла.

**Задача 14.** Точки $K$ и $M$ расположены соответственно на стороне $BC$ и высоте $BD$ остроугольного треугольника $ABC$. Треугольник $AMK$ – равносторонний (рис. 29). Найти его площадь, если $AD = 3$, $DC = \frac{11}{2}$, $BK : KC = 10 : 1$.

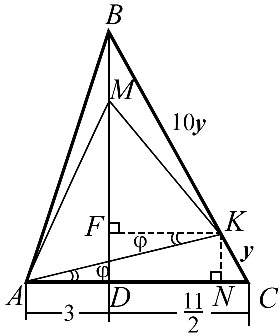



**Рис. 29**

Δ 1. Обозначим сторону правильного треугольника $AMK$ через $x$, $\angle KAC = \varphi$ (рис. 29). Пусть $FK \parallel AC$ и $KN \perp AC$. Из подобия треугольников $CKN$ и $CBD$ следует $NC = \frac{1}{11} DC = \frac{1}{2}$. Тогда $DN = 5$ и $AN = 8$.

2. Заметим, что $\angle FKA = \varphi$ и $\angle MKF = \frac{\pi}{3} - \varphi$. Из прямоугольных треугольников $AKN$ и $MKF$ следует $AN = AK\cos\varphi$ и $FK = MK\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$, т. е. $8 = x\cos\varphi$ и $5 = x\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$. Из тригонометрического уравнения $5\cos\varphi = 8\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$ получаем $\cos\varphi = 4\sqrt{3}\sin\varphi$, и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

3. По формуле $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$ находим $\cos\varphi = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ и $x = \frac{8}{\cos\varphi} = \frac{14}{\sqrt{3}}$. Площадь правильного треугольника со стороной $x$ равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Находим $S_{AMK} = \frac{49\sqrt{3}}{3}$. ▲

Обратим внимание, что в этой задаче один треугольник повёрнут относительно другого. В качестве промежуточной переменной и был введён этот угол поворота.

**Задача 15.** Окружность проходит через вершины $A$ и $B$ треугольника $ABC$, пресекает стороны $BC$ и $AC$ в точках $M$ и $N$ соответственно (рис. 30). Известно, что $AB = 4,$ $MN = 2$ и $\angle ACB = \arcsin\frac{3}{5}$. Найти радиус окружности.

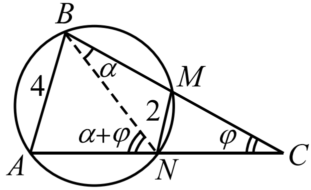



**Рис. 30**

Δ 1. Обозначим $\angle ACB = \varphi$, тогда $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\varphi -$ острый угол, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Надо найти радиус окружности, поэтому разумно ввести вписанный угол: $\angle NBM = \alpha$. Угол $ANB -$ внешний для треугольника $BNC$, поэтому $\angle ANB = \alpha + \varphi$.

2. Если $R -$ радиус окружности, то $AB = 2R\sin(\alpha+\varphi)$ и $MN = 2R\sin\alpha$, т. е. получаем систему: $4 = 2R\sin(\alpha+\varphi)$ и $2 = 2R\sin\alpha$. Исключая $R$, придём к уравнению $2\sin\alpha = \sin(\alpha+\varphi)$.

Так как $\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha = \frac{4}{5}\sin\alpha + \frac{3}{5}\cos\alpha,$ то уравнение приводится к виду

$$10\sin\alpha = 4\sin\alpha + 3\cos\alpha,\ 6\sin\alpha = 3\cos\alpha,\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}.$$

3. Находим: $\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$ тогда $R = \frac{MN}{2\sin\alpha} = \sqrt{5}.$ ▲

***Важное замечание.*** В задаче 15 угловая величина была задана значением $\arcsin\frac{3}{5}$. По определению функции $y = \arcsin x$ это означало, что заданный угол острый и $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. Мы заменили условие $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$ равносильным ему. Аналогично следует поступать во всех задачах, условия которых содержат значения обратных тригонометрических функций для величин углов. Например, если угол задан в виде $\alpha = \pi - \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, то это означает, что $\alpha -$ тупой угол, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и могут быть найдены, если окажется необходимым, значения $\cos 2\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ и т. п.

Некоторые учащиеся, проводя решение задачи в общем виде и подставляя числовые данные лишь в конце (что, заметим, обычно делает решение громоздким), получают, например, ответ для длины стороны в виде $a = 3\sin\left(2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Если далее это значение не записано в виде $a = 2\sqrt{2}$, то решение не считается доведённым до конца. Т. е. ответ задачи, когда угловая величина задана значением обратной тригонометрической функции, не должен содержать значения тригонометрических и обратных тригонометрических функций (если только сама искомая величина не является углом).

В заключение параграфа решим задачу об определении угла треугольника. Обратим внимание, что решение требует отбора в соответствии с условием задачи.

**Задача 16.** В треугольнике $ABC$ высота $BD$, медиана $CM$ и биссектриса $AK$ пересекаются в точке $O$ (рис. 31).

Найти угол $A$, если известно, что он больше $60^\circ$ и $AM = \sqrt{3}\cdot OM$.

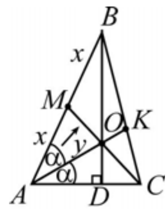



**Рис. 31**

$\Delta$ 1. Обозначим $AM = x$ (тогда $AB = 2x$), $\angle BAC = 2\alpha$ и $AO = y$. Из прямоугольных треугольников $AOD$ и $ABD$ имеем: $AD = y\cos\alpha$ и $AD = 2x\cos 2\alpha$. Выражаем $y = \dfrac{2x\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$.

2. Применяем теорему косинусов к треугольнику $AMO$, учитывая, что $MO^2 = \dfrac{1}{3}x^2$: $\dfrac{x^2}{3} = x^2 + y^2 - 2xy\cdot\cos\alpha$.

Подставляем выражение для $y$, сокращаем на $x^2$, приводим уравнение к виду $2\cos^2\alpha + 12\cos^2 2\alpha - 12\cos 2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 0$. Используем тождество $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, получаем уравнение

$$6\cos^2 2\alpha - 5\cos 2\alpha + 1 = 0.$$

Находим: $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{3}$ или $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$.

3. По условию $2\alpha = \angle BAC$, $2\alpha > \dfrac{\pi}{3}$, значит $\cos 2\alpha < \dfrac{1}{2}$, поэтому $\cos 2\alpha = \cos A = \dfrac{1}{3}$, $\angle A = \arccos\dfrac{1}{3}$. ▲

## § 4. Рисунок в геометрической задаче

В заключении остановимся на еще не обсуждавшемся в этом задании вопросе о роли рисунка в решении геометрических задач.

Некоторые учащиеся и абитуриенты ограничиваются небрежным мелким рисунком, на котором даже трудно разобрать, какие обозначения к чему относятся, какие прямые перпендикулярны или параллельны, в каких точках имеет место касание и т. п. Кое-кому из них всё же удаётся верно решить задачу, но в большинстве случаев, особенно в задачах, требующих ряда шагов рассуждений и вычислений, такой рисунок скорее мешает решению, а не способствует успеху.

*Рисунок в геометрической задаче – это удобный для восприятия наглядный способ записи условий задачи, фиксирующий и удерживающий внимание решающего,* он даёт повод к размышлению и может стать помощником в решении задачи, подсказать правильный путь в поисках решения. (Посмотрите, например, на рис. 27, 28, 29). Именно поэтому к построению рисунка полезно относиться вдумчиво. Сначала, чтобы понять задачу, её условия переводят на геометрический язык: делают от руки небольшой предварительный рисунок и отмечают на нём (если таковые есть) равные углы, пропорциональность отрезков, перпендикулярность и т. п. И лишь обдумав, как надо изменить рисунок, чтобы он соответствовал условиям задачи, делают аккуратный и достаточно большой рисунок, чтобы на нём уместились все введённые обозначения углов, отрезков и данные задачи. В ряде случаев «хороший» рисунок получается не с первой попытки и при его построении уже начинается процесс решения задачи, так как используются определения и известные геометрические факты относительно входящих в условие задачи элементов геометрической конфигурации.

Когда словами записываются геометрические свойства входящих в задачу элементов, устанавливаются метрические соотношения типа $AB = AK + KB$, $AK = PQ$ и т. п., проводятся некоторые вычисления, то охватить их взглядом, увидеть в целом, сделать нужный вывод бывает совсем непросто, а вот увидеть на рисунке след собственных рассуждений и не терять этого из виду обычно удаётся.

Мы говорим о работе с рисунком в процессе поиска решения. При окончательном изложении решения задачи каждое заключение должно быть обосновано (чаще всего ссылками на известные теоремы курса, реже – дополнительным доказательством). Сам по себе рисунок, даже самый аккуратный, выполненный циркулем и линейкой, ничего не доказывает, всё, что «увидено» из чертежа, должно иметь логическое обоснование.

И ещё одно замечание. Если задача не получается, «упирается», не достаёт ещё какого-то одного соотношения, связи элементов – вернитесь к условию задачи и вновь обсудите каждый входящий в него геометрический элемент. Скорее всего, вами использованы не все их свойства, сделаны не все возможные выводы.

Поясним наши рассуждения о рисунке и работе с ним примерами решения двух задач олимпиад МФТИ.

**Задача 17.** Продолжения медиан $AE$ и $CF$ треугольника $ABC$ (рис. 32) пересекают описанную около него окружность в точках $D$ и $N$ соответственно так, что $AD:AE = 2:1$ и $CN:CF = 4:3$. Найти углы треугольника.

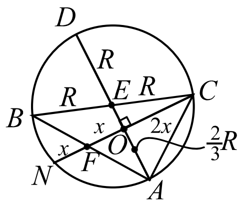


**Рис. 32**

Δ Делаем предварительный рисунок (кстати, его удобнее всего рисовать, начиная с окружности), отмечаем, что $BE = EC$ и $ED = AE$ (это следует из условия $AD = 2AE$). Две хорды $BC$ и $AD$, пересекаясь, делятся пополам. По свойству пересекающихся хорд $AE \cdot DE = BE \cdot CE$, откуда следует, что $AE = BE = DE = CE$. Точка $E$ одинаково удалена от точек $A$, $B$, $D$ и $C$ окружности, значит точка $E$ – центр окружности. Отсюда следует, что $BC$ и $AD$ – диаметры, и $\angle A$ – прямой (опирается на диаметр). Поскольку далее должна рассматриваться медиана $AE$, а нами установлено, что $AE = DE = BE = CE$, то удобно ввести обозначение $AE = R$.

Обсудим следующие условия задачи: $FN = \dfrac{1}{3}FC$. Обозначим $FN = x$, тогда $FC = 3x$. Наконец обратим внимание, что в задаче есть две медианы треугольника, значит надо воспользоваться свойством медиан: пересекаясь, они делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Итак, если обозначить через $O$ точку пересечения медиан, то

$$AO = \frac{2}{3}R,\ \ CO = 2x \text{ и } OF = x.$$

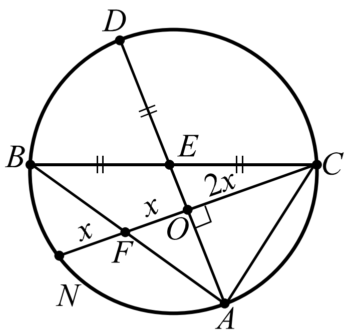


**Рис. 33**

Выполняем хороший большой рисунок с учётом всех установленных фактов. Посмотрим внимательно на рис. 33 и подумаем, может быть, еще что-то можно установить? Да! Хорда $CN$, пересекая диаметр $AD$, делится пополам, значит $CN \perp AD$. Отразим и этот последний факт.

Теперь **решение.**

1. По свойству пересекающихся хорд

$$AO \cdot OD = CO \cdot ON, \text{ т. е. } \frac{2}{3}R \ \frac{4}{3}R = 4x^2,$$

откуда $x^2 = \frac{2}{9}R^2$.

2. Из прямоугольного треугольника $COA$ по теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{(2x)^2 + \left(\frac{2}{3}R\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

3. Из прямоугольного треугольника $ABC$ находим

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Ответ:** $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle C = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. ▲

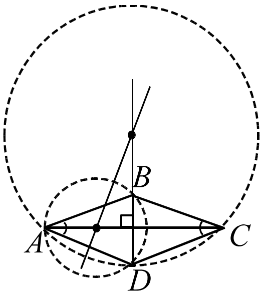


**Рис. 34**

**Задача 18.** Длина стороны ромба $ABCD$ равна 4. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников $ABD$ и $ACD$, равно 3. Найти радиусы окружностей.

Δ Строим первый пробный рисунок (рис. 34) и начинаем рассуждать.

Поскольку в условии задачи задано расстояние между центрами, то необходимо установить их положение. Будем помнить, что четырёхугольник $ABCD$ – ромб, характеризующие его свойства – диагонали, пересекаясь, делятся пополам и перпендикулярны друг другу. Центр окружности, описанной около треугольника, есть точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Треугольники $ABD$ и $ACD$ <u>имеют общую сторону $AD$</u>, следовательно, <u>оба центра ле-</u>

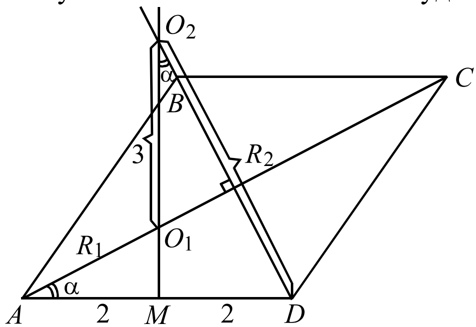


**Рис. 35**

жат на серединном перпендикуляре отрезка $AD$. Кроме того, центр $O_1$ окружности, описанной около треугольника $ABD$, лежит на прямой $AC$ (это серединный перпендикуляр отрезка $BD$), а центр $O_2$ окружности, описанной около треугольника $ACD$, лежит на прямой $BD$ (это серединный перпендикуляр отрезка $AC$). Итак, центры окружностей – это точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка $AD$ с прямыми $AC$ и $BD$.

Вот теперь строим новый рисунок, на который наносим также числовые данные задачи. Обратим внимание, что окружности рисовать уже нет необходимости.

Обозначим $AO_1 = R_1$ и $DO_2 = R_2$ и, поскольку имеем несколько подобных треугольников, вводим ещё угол $\angle MAO_1 = \alpha$. Записываем вполне очевидные выводы:

$$1.\ \Delta AO_1M,\ \angle M = 90^\circ,\ \angle MAO_1 = \alpha \ \Rightarrow\ 2 = R_1\cos\alpha,\quad O_1M = R_1\sin\alpha.$$

$$2.\ \Delta DO_2M,\ \angle M = 90^\circ,\ \angle MO_2D = \alpha \ \Rightarrow\ 2 = R_2\sin\alpha,\quad O_2M = R_2\cos\alpha.$$

$$3.\ \text{По условию } O_1O_2 = 3,\ \text{т. е. } O_2M - O_1M = 3 \ \Rightarrow\ R_2\cos\alpha - R_1\sin\alpha = 3.$$

Итак, получили систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$R_1, R_2, \alpha:\ \begin{cases} 2 = R_1\cos\alpha. \\ 2 = R_2\sin\alpha, \\ 3 = R_2\cos\alpha - R_1\sin\alpha. \end{cases}$$

Решать эту систему можно по-разному, например, исключив $R_1$ и $R_2$, получить тригонометрическое уравнение

$$3 = 2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \ 2\mathrm{tg}^2\alpha + 3\mathrm{tg}\alpha - 2 = 0,\ \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}\ \text{(угол } \alpha - \text{острый)},$$

тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $R_1 = \sqrt{5}$, $R_2 = 2\sqrt{5}$. ▲

В этой задаче, оказавшейся совсем не простой для абитуриентов, трудность для многих была заключена в построении рисунка, обнажающего условие задачи и направляющего решение.

## Сводка полезных формул

### Формулы площади треугольника:

$S=\frac{1}{2}ah$ ($a$ – основание, $h$ – высота к $a$).

$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$ ($a,b$ – стороны, $C$ – угол между ними).

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона, $2p=a+b+c$).

$S=pr$ ($p$ – полупериметр, $r$ – радиус вписанной окружности).

$S=\frac{abc}{4R}$, где $R$ – радиус описанной окружности.

$S=\left(p-a\right)r_a$, где $p$ – полупериметр, $r_a$ – радиус вневписанной окружности, касающейся стороны $a$.

### Формула площади трапеции:

$S=\frac{a+b}{2}h$ ($a$ и $b$ – основания, $h$ – высота)

$S=c\cdot m$ ($c$ – боковая сторона, $m$ – расстояние до неё от середины другой боковой стороны).

### Формула площади параллелограмма:

$S=ah$ ($a$ – сторона, $h$ – высота к $a$)

$S=ab\cdot\sin\alpha$ ($a$ и $b$ – стороны, $\alpha$ – величина угла между ними)

### Формула площади выпуклого четырехугольника:

$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$ ($d_1$ и $d_2$ – диагонали, $\varphi$ – величина угла между ними).

### Формула параллелограмма:

($a$ и $b$ – стороны, $d_1$ и $d_2$ – диагонали)

$$d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right).$$

### Формула медианы треугольника через 3 стороны

$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

### Формула биссектрисы $AD$ треугольника $ABC$:

1) $AD=\frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2}$, $\left(b=AC, c=AB\right)$.

2) $AD=\sqrt{bc-xy},\ \left(x=BD,\ y=DC,\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{c}{b}\right).$

**Формула для равнобокой трапеции**

$d^2=c^2+ab$ ($a$ и $b-$ основания, $c-$ боковая сторона, $d-$ диагональ).

## Контрольные вопросы

**1(4).** Существует ли треугольник $ABC$, в котором

**а)** $\sin A+\sin B=\sin C$?

**б)** $a\cos B=b\cos A$?

**2(4). а)** Треугольник $ABC-$прямоугольный, $\angle C=90°$, с катетами $a$ и $b$ и гипотенузой $c$. Как доказать, что радиус вписанной в треугольник окружности равен $\dfrac{a+b-c}{2}$?

**б)** Дан треугольник $ABC$. Через точку $D$ стороны $AB$ проведена прямая, которая отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Как доказать, что эта окружность совпадает с окружностью, вписанной в треугольник $ABC$?

**3(5). а)** В каком отношении биссектриса угла треугольника делит противолежащую углу сторону?

**б)** Биссектриса $AD$ треугольника $ABC$ делит сторону $BC$ на отрезки $BD=3$ и $DC=2$. Медиана $BM$ пересекает биссектрису $AD$ в точке $O$. Чему равно отношение $BO:OM$? Какую часть площади треугольника $ABC$ составляет площадь четырёхугольника $MODC$?

**4(5). а)** В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB=4,$ $BC=12$ биссектриса $BD$ равна 3. Чему равна сторона $AC$?

**б)*** Биссектриса угла $B$ треугольника $ABC$ пересекает описанную около него окружность в точке $S$. Точка $O_1-$ центр вписанной в треугольник окружности. Как доказать, что $SA=SC=SO_1$?

**5(5). а)** В каком отношении делится каждая из медиан треугольника их общей точкой пересечения?

**б)** Существует ли треугольник $ABC$, в котором $m_b=15,$ $m_c=9,$ $AB=14$?

в) Чему равна площадь треугольника $ABC$, в котором $m_b=15$, $m_c=9,$ $AB=16$?

**6(3). а)** Как выражается медиана треугольника через три его стороны?

**б)** В равнобедренном треугольнике с основанием $a=3$ медиана к боковой стороне $b$ равна этой стороне. Чему равно $b$?

**7(5). а)** Чему равен наибольший угол в треугольнике $ABC$ с высотами $h_a = 4, h_b = 5, h_c = 12$ ?

**б)** В треугольнике $ABC$ проведены высоты $BB_1$ и $CC_1$. Известно, что $BC = 6,\ B_1C_1 = 3\sqrt{3}$ . Чему равен угол $A$? Во сколько раз площади треугольника $AB_1C_1$ меньше площади треугольника $ABC$ ?

**8(5). а)** Как доказать формулу $S_{ABC} = r_a\left(p - a\right)$, где $S_{ABC}$ – площадь треугольника $ABC, a = BC,\ p$ – полупериметр, а $r_a$ – радиус вневписанной окружности, которая касается стороны $a$ и продолжений двух других сторон?

**б)** Треугольник $ABC$ – равнобедренный: $AB = BC$. Известно, что периметр его $P = 16,\ r_{AB} = 4, r_{AC} = 6$ . Чему равны стороны $AB$ и $AC$ ?

**9(4). а)** Как выражается радиус $R$ окружности через хорду окружности $a$ и опирающийся на неё вписанный угол $\alpha$ ?

**б)** Около трапеции описана окружность, основания трапеции равны 3 и 4, боковые стороны равны 2. Чему равен радиус окружности?

**10(3). а)** Как измеряется угол между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности?

**б)** Около прямоугольного треугольника $ABC\left(\angle C = 90°\right)$ описана окружность, $AC = 4,\ BC = 3$ . Чему равно расстояние от точки $A$ до касательной, проходящей через точку $C$ ?

**в)*** Две окружности внутренне касаются в точке $B$, меньшая окружность касается также хорды $AC$ большей окружности в точке $D$. Доказать, что $BD$ – биссектриса угла $ABC$ (лемма Архимеда).

**11(6). а)** Когда в четырёхугольник можно вписать окружность?

**б)** В трапецию $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ вписана окружность с центром в точке $O$ . Чему равны углы $AOB$ и $COD$ ?

**в)** Трапеция $ABCD$ – прямоугольная ( $AB \perp AD$ и $AB \perp BC$ ), она описана около окружности в точке $O$ . Известно $OC = \sqrt{5},\ OD = 2\sqrt{5}$ . Чему равен радиус окружности?

**Задачи**

**1(6).** В треугольнике $ABC$ площади $6\sqrt{5}$ стороны $AB$ и $BC$ равны 4 и 7. Найти третью сторону и радиус вневписанной окружности, касающейся наибольшей стороны.

**2(5).** Окружность радиуса $R$ проходит через вершину $A$ равнобедренного треугольника $ABC$ , касается основания $BC$ в точке $B$ и пересекает сторону $AC$ в точке $D$. Найти длину боковых сторон, если $DC = 7AD$ .

**3(5).** Окружность, вписанная в равнобокую трапецию $ABCD\ (AD \| BC,\ AD > BC)$, касается боковой стороны $CD$ в точке $N$ и основания $AD$ в точке $M$. Диагональ $BD$ пересекает отрезок $MN$ в точке $K$, $MK : KN = 5 : 2$. Периметр трапеции равен 30. Найти основания и радиус окружности.

**4(5).** В прямоугольном треугольнике $ABC\left(\angle C = 90^\circ\right)$, высота $CH$ равна 7, биссектриса $CK$ равна 35/4. Найти катеты и площадь треугольника $ABC$. (Докажите, что биссектриса $CK$ делит пополам угол между высотой $CH$ и медианой $CM$ ).

**5(6).** В треугольнике $ABC$ биссектрисы пересекаются в точке $O$. Прямая $BO$ пересекает описанную около треугольника $ABC$ окружность в точке $S$. Найти длину отрезка $OS$, и площадь четырёхугольника $AOCS$, если $AC = \sqrt{3+\sqrt{3}}$, $\angle B = 30^\circ$ и $\angle C = 45^\circ$.

**6(6).** Две окружности внутренне касаются в точке $B$, меньшая окружность касается в точке $D$ хорды $AC$ большей окружности. Известно, что $AB = 2 \cdot BC$, $AC = 12$ и $BD = 2\sqrt{10}$. Найти радиусы окружностей.

**7(5).** Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные $CD$ и $EF$, их точки касания с меньшей окружностью $D$ и $E$, а с большей $C$ и $F$. Известно, что $DE = 8,\ EF = 20$. Найти радиусы окружностей.

**8(6).** Треугольник $ABC$ равнобедренный, $\angle ABC = \arccos\frac{7}{9}$, $AC = 10$. В треугольнике расположены две окружности, они касаются друг друга внешне и каждая касается основания $AC$ и боковой стороны. Радиус одной окружности в 2 раза больше радиуса другой. Найти радиусы.

**9(7**). Продолжение биссектрисы $BD$ треугольника $ABC$ пересекает описанную около треугольника окружность в точке $S$. Окружность, описанная около треугольника $ADS$ пересекает прямую $AB$ в точке $K,\ AB = 8,\ AK = 1,\ \angle A = 60^\circ$. Найти $BC$.

**10(6).** В треугольнике $ABC$ биссектриса $BD$ равна стороне $AB$, $AC = 7,\ \angle ABC = 2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$. Найти стороны треугольника $ABC$ и расстояние между точками касания прямой $AC$ окружностями, вписанных в треугольники $ABD$ и $CBD$.