Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

ФИЗИКА

Движение материальной точки по окружности

Задание №6 для 9-х классов
(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2014

Составитель: В.И. Плис, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задание №6 для 9-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2014, 24 с.

Срок отправления заданий по физике и математике – 25 апреля 2014 г.

Учащийся должен стараться выполнить все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Плис Валерий Иванович
Подписано в печать 28.03.14. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5.
Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 650. Заказ №57-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Кинематика движения точки по окружности

1.1. Линейная и угловая скорости

Важным частным случаем движения материальной точки по заданной траектории является движение по окружности. Рассмотрим движение материальной точки M по окружности радиуса R с центром в точке O.

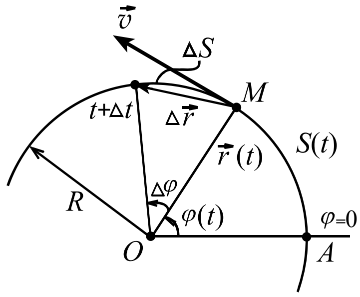

Рис. 1

В произвольный момент времени t положение точки на окружности однозначно определяется углом $\varphi(t)$, который радиус-вектор $\vec{r}(t)$ точки M образует с направлением начала отсчёта углов (рис. 1). Таким направлением будем считать направление OA. Другим способом задания положения точки на окружности является задание длины $S(t)$ дуги AM. Оба способа задания положения точки на окружности эквивалентны, так как угловая $\varphi(t)$ и дуговая $S(t)$ координаты связаны определением радианной меры угла

$$\varphi(t) = \frac{S(t)}{R}.$$

Рассмотрим перемещение $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$ точки M при движении по окружности за малый промежуток времени Δt. Это перемещение стягивается дугой длиной $\Delta S \approx |\Delta\vec{r}| = |\vec{v}|\Delta t$, а радиус-вектор точки M поворачивается при этом на угол $\Delta\varphi$. На такой же угол поворачивается и вектор скорости, *так как скорость* $\vec{v}$ *перпендикулярна* $\vec{r}$ – радиусу-вектору точки, т. к. направлена по касательной к окружности.

Линейной скоростью $v(t)$ точки называют отношение длины ΔS дуги ко времени Δt перемещения (при $\Delta t \to 0$):

$$v(t) = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{1}$$

Линейная скорость точки есть модуль (величина) вектора скорости. В системе СИ линейную скорость измеряют в м/с (метр в секунду).

Угловой скоростью $\omega(t)$ радиуса-вектора точки называют отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиуса-вектора ко времени Δt, за которое этот поворот был совершён (при $\Delta t \to 0$),

$$\omega(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{2}$$

С такой же угловой скоростью вращается и вектор скорости точки, так как линейная скорость $\vec{v} \perp \vec{r}$ – радиусу-вектору точки. В системе СИ угловую скорость измеряют в рад/с (радиан в секунду).

Следует отметить, что в учебных пособиях угловую скорость радиуса – вектора точки часто называют просто угловой скоростью, а в качестве единицы измерения угловой скорости указывают $1/\text{с}$ (обратную секунду, с$^{-1}$): последнее обусловлено тем, что радиан – величина безразмерная.

Замечая, что $\Delta\varphi(t) = \dfrac{\Delta S(t)}{R}$, приходим с учётом (1) и (2) к соотношению, связывающему линейную $v(t)$ и угловую $\omega(t)$ скорости при произвольном движении материальной точки по окружности радиуса R:

$$v(t) = \omega(t) \cdot R. \tag{3}$$

1.2. Равномерное движение по окружности. Период и частота обращения

Движение по окружности с постоянной по модулю скоростью называют равномерным движением по окружности. Из (3) следует, что при таком движении угловая скорость ω тоже постоянна. В этом случае её называют также циклической частотой.

Для описания равномерного движения по окружности наряду с циклической частотой ω удобно использовать *период обращения* T, определяемый как время, в течение которого совершается один полный оборот, и *частоту* ν *обращения* $\nu = \dfrac{1}{T}$, которая численно равна числу оборотов радиуса-вектора точки за единицу времени. В связи с этим говорят, что частота ν измеряется в оборотах в секунду.

Из определения (2) угловой скорости следует, что при равномерном движении по окружности величины ω, T и ν связаны соотношениями

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{4}$$

Размерности ω и ν одинаковы (1/с), так как эти величины различаются лишь числовым множителем 2π.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих применение введённых величин.

Пример 1. Считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса $R = 150$ млн км, найдите линейную скорость v Земли в её годичном движении вокруг Солнца.

Решение. Будем считать, что Земля совершает один полный оборот вокруг Солнца за 365 суток. Тогда период обращения Земли $T = 3{,}15 \cdot 10^7$ с. Далее из (3) и (4) находим

$$v = \frac{2\pi}{T} R = \frac{2 \cdot 3{,}14}{3{,}15 \cdot 10^7} \cdot 150 \cdot 10^9 \approx 30 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Рельсы игрушечной железной дороги образуют кольцо радиуса R. Вагончик M перемещается по рельсам, подталкиваемый стержнем AB, который вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг точки A, лежащей внутри кольца почти у самых рельсов (рис. 2). Как зависит от времени линейная скорость $v(t)$ вагончика? Считайте $0 \le \varphi_1 < \pi/2$.

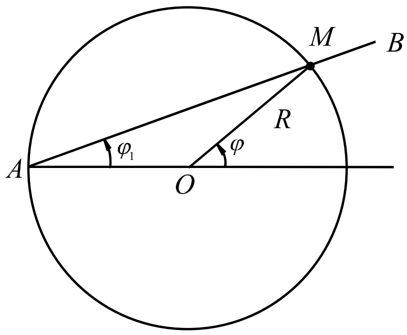

Рис. 2

Решение. Будем считать, что угол φ_1 отсчитывается от направления, задаваемого радиусом AO (точка O – центр окружности, по которой движется вагончик). Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω_1, следовательно, угол φ_1 растёт со временем по линейному закону $\varphi_1 = \omega_1 t$. Найдём зависимость от времени t угла φ поворота радиуса-вектора вагончика. Для этого заметим, что треугольник AOM равнобедренный, тогда $\angle OAM = \varphi_1$. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним несмежных, отсюда $\varphi = 2\varphi_1 = 2\omega_1 t$. Заметим, что угол $\varphi(t)$ растёт со временем по линейному закону и что угловая скорость ω вагончика при движении по рельсам постоянна и вдвое больше угловой скорости ω_1, с которой вращается стержень, т. е. $\omega = 2\omega_1$. Следовательно, вагончик движется по окружности равномерно, его линейная скорость от времени не зависит и равна

$$v = \omega \cdot R = 2 \cdot \omega_1 \cdot R.$$

1.3. Ускорение при равномерном движении по окружности

По определению ускорение $\vec{a}$ материальной точки есть векторная величина, равная отношению приращения вектора скорости ко времени, за которое произошло это приращение:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (\text{при } \Delta t \to 0). \qquad (5)$$

Найдём величину и направление ускорения $\vec{a}$ точки при равномерном движении по окружности. Допустим, что при этом движении радиус-вектор точки за время от t до $t+\Delta t$ совершил поворот на угол $\Delta\varphi$ (рис. 3). Из равнобедренного треугольника, иллюстрирующего соотношение $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$, найдём величину приращения вектора скорости, обусловленного только изменением направления (вращением) вектора скорости:

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = 2\cdot v\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = v\cdot\Delta\varphi.$$

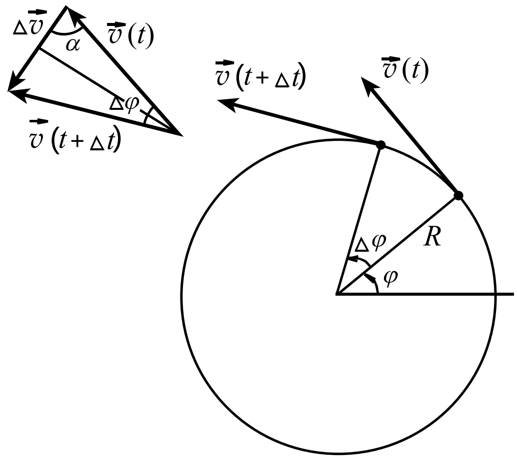

Рис. 3

Здесь учтено, что при малых аргументах, т. е. при $|x| << 1$, выполняется приближённое равенство $\sin x \approx x$, где x выражен в радианной мере. Тогда из соотношения (5) находим величину a вектора ускорения точки при равномерном движении по окружности:

$$a = \left|\vec{a}(t)\right| = \frac{\left|\Delta\vec{v}\right|}{\Delta t} = \frac{v\cdot\Delta\varphi}{\Delta t} = v\cdot\omega.$$

С учётом (3) и (4) последнее соотношение можно также представить в виде

$$a = \omega\cdot v = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\cdot\pi^2\cdot v^2\cdot R = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R. \qquad (6)$$

Установим направление вектора $\vec{a}$. Из (5) следует, что ускорение $\vec{a}$ и приращение $\Delta\vec{v}$ скорости – сонаправленные векторы. При $\Delta t\to 0$ угол $\Delta\varphi\to 0$ и $\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\to\frac{\pi}{2}$ (рис. 3), следовательно, в любой момент времени векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ взаимно перпендикулярны, при этом вектор ускорения направлен по радиусу к центру окружности и с радиусом – вектором $\vec{r}(t)$ точки связан соотношением (рис. 4):

$$\vec{a}(t) = -\omega^2\cdot\vec{r}(t). \qquad (7)$$

Так как вектор ускорения направлен к центру окружности, то такое ускорение называют центростремительным (радиальным, нормальным, т. е. направленным по внутренней нормали к траектории). Подчеркнём, что величина центростремительного ускорения (как видно из вывода) связана с угловой скоростью вращения вектора скорости.

Сформулируем вывод: *движение точки по окружности с постоянной по величине скоростью есть движение ускоренное, при этом вектор ускорения в любой момент времени направлен к центру окружности, а его величина постоянна и определяется из* (6).

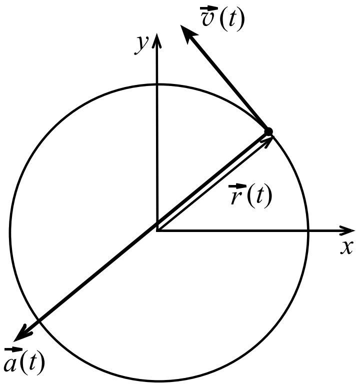

Рис. 4

Пример 3. Найдите скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ точек земной поверхности на широте $\varphi = 60^\circ$, обусловленные участием в суточном вращении Земли. Радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. Выберем указанную на рисунке 5 систему отсчёта. Начало отсчёта поместим в центр Земли, плоскость xy совпадает с плоскостью экватора, ось z совпадает с осью вращения планеты. В выбранной системе отсчёта любая точка земной поверхности на широте φ движется равномерно по окружности радиуса $r = R\cos\varphi$ (на рисунке 5 показана пунктиром) с периодом в одни сутки, т. е. $T = 86400$ с. Скорость любой точки направлена по касательной к такой окружности, а ускорение к её центру. Величины векторов скорости ускорения найдём из (3) и (6):

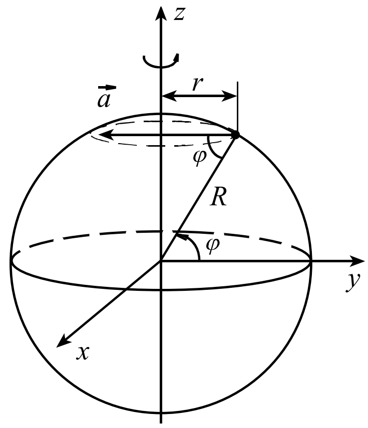

Рис. 5

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T} \approx 230\,\text{м/с},$$

$$a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi \approx 0{,}017\,\text{м/с}^2.$$

1.4. Ускорение при неравномерном движении по окружности

При неравномерном движении по окружности изменяется со временем не только направление вектора $\vec{v}$ скорости, но и его модуль v. В этом случае приращение $\Delta\vec{v}$ вектора скорости (рис. 6) может быть представлено в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$, где $\Delta\vec{v}_\tau$ – составляющая приращения скорости, сонаправленная с вектором скорости $\vec{v}$ и обусловленная приращением величины вектора скорости на $\Delta v_\tau = \Delta v = |\Delta\vec{v}|\cos\theta$; вторая составляющая $\Delta\vec{v}_n$ – нормальная (нами уже изучена), обусловлена (как и прежде) поворотом вектора скорости. Тогда естественно и ускорение представить в виде суммы касательной (тангенциальной) и нормальной составляющих:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{8}$$

Для проекций вектора ускорения на касательное и нормальное направления справедливы соотношения

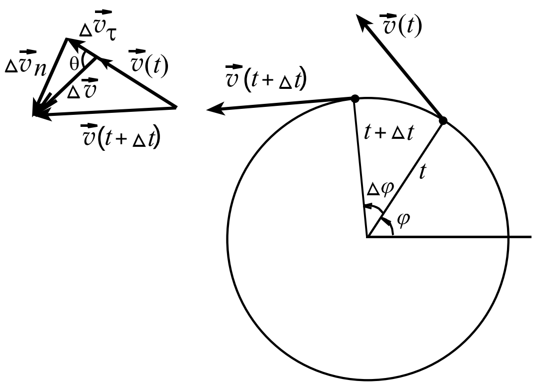

Рис. 6

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t},\ \ \Delta t \to 0,$$

$$a_n = \omega \cdot v = \frac{v^2}{R}. \tag{9}$$

Отметим, что касательная составляющая a_τ ускорения определяется скоростью изменения модуля вектора скорости, в свою очередь, нормальная (радиальная) составляющая a_n связана с угловой скоростью вращения вектора скорости. По теореме Пифагора

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{10}$$

Отметим, что движение по произвольной криволинейной траектории может быть представлено как последовательность перемещений по элементарным дужкам окружностей. Тогда соотношения (9), (10) *справедливы и при неравномерном движении материальной точки по произвольной криволинейной траектории, при этом величину* R *в формуле* (9) *для* a_n *называют радиусом кривизны траектории в рассматриваемой точке. Иначе говоря, это радиус элементарной дужки окружности, с которой в первом приближении совпадает траектория материальной точки в малой окрестности того места, где эта точка в данный момент находится.*

В заключение отметим, что при неравномерном движении по окружности угловая скорость ω зависит от времени. Скорость изменения ω со временем называют угловым ускорением ε, которое вводится по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ (при } \Delta t \to 0\text{)}. \qquad (11)$$

Если угловое ускорение постоянно, то зависимость угла поворота радиуса-вектора от времени (по аналогии с кинематикой равнопеременного движения по прямой) принимает вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Из (9) и (11) следует, что тангенциальная составляющая a_τ ускорения материальной точки и угловое ускорение ε связаны соотношением

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = R \cdot \varepsilon. \qquad (12)$$

Пример 4. Материальная точка движется по окружности радиуса R с постоянным угловым ускорением ε. Найдите зависимости от времени величин скорости v и ускорения a. В начальный момент времени точка покоилась.

Решение. Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость будет увеличиваться со временем по линейному закону

$$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t = \varepsilon \cdot t. \qquad (13)$$

Из (3) с учётом (13) находим

$$v(t) = R \cdot \omega(t) = R \cdot \varepsilon \cdot t.$$

Далее из соотношений (9), (12) и (13) находим проекции вектора ускорения на направления: тангенциальное $a_\tau = R \cdot \varepsilon$, нормальное $a_n = \omega^2 R = (\varepsilon \cdot t)^2 R$ и величину (модуль) ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \varepsilon \cdot R \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}.$$

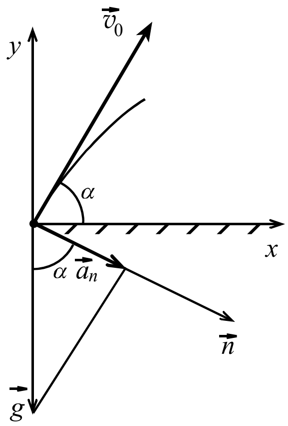

Рис. 7

Пример 5. Камень брошен со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В малой окрестности точки старта найдите радиус R кривизны траектории и угловую скорость ω вращения вектора скорости.

Решение. Для решения задачи воспользуемся соотношениями

$$R = \frac{v^2}{a_n}, \qquad \omega = \frac{a_n}{v}. \qquad \text{(см. (9))}.$$

В малой окрестности точки старта (рис. 7) $v = v_0$, нормальное ускорение a_n есть проекция ускорения свободного падения $\vec{g}$ на нормаль к траектории $a_n = g \cdot \cos\alpha$.

Из приведённых соотношений находим $R = \dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$, $\omega = \dfrac{g\cos\alpha}{v_0}$.

§2. Динамика движения по окружности

В инерциальной системе отсчёта основным уравнением динамики материальной точки является второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \,. \tag{14}$$

Рассмотрим подробнее *равномерное движение тела по окружности*, лежащей в плоскости XOY координатной системы. Из (7) и (14) следует, что при таком движении сумма сил, так же как и ускорение, в любой момент времени направлена к центру окружности. Тогда, переходя в (14) к скалярной форме записи, удобно перейти не к проекциям сил и ускорения на оси OX, OY инерциальной системы отсчёта, а на подвижное направление – направление внутренней нормали, считая положительным направление к центру окружности. Это приводит к соотношению:

$$m\,a_n = m\frac{v^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \ldots \,. \tag{15}$$

В рассматриваемом случае движение происходит в плоскости XOY. Тогда $a_z = 0$ и из (14) находим, что сумма проекций сил на направление OZ, перпендикулярное плоскости окружности, равна нулю:

$$0 = F_{1z} + F_{2z} + \ldots \,. \tag{16}$$

Таким образом, для решения задач динамики равномерного движения материальной точки по окружности необходимо:

1) в инерциальной системе отсчёта привести «моментальную фотографию» движущегося тела и указать приложенные к нему силы и сообщаемое этими силами ускорение,

2) составить уравнения (14) – (16) и решить полученную систему.

Отметим, что из (15) следует – *произведение массы тела на нормальное* (*радиальное, центростремительное*) *ускорение равно сумме нормальных проекций всех действующих на тело сил.* Эту сумму, стоящую в правой части (15), часто неудачно называют центростремительной силой. Из (14) видно, что никакой центростремительной силы в природе не существует. В инерциальной системе отсчёта движение по окружности всегда происходит под действием сил, обусловленных известными взаимодействиями. Такими силами являются силы тяжести, трения, реакции опоры и т. д.

Пример 6. Период обращения Луны вокруг Земли в геоцентрической системе отсчёта равен $T = 27{,}32$ суток. Зная радиус Земли $R = 6400$ км и ускорение свободного падения у её поверхности $g = 10$ м/с^2, найдите расстояние r до Луны.

Решение. Будем считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса r под действием силы притяжения к Земле.

Тогда из второго закона Ньютона (рис. 8) $m\vec{a} = m\vec{g}(r)$, переходя к проекциям силы притяжения и ускорения на нормальное направление, получаем:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}, \quad v^2 = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r} = g\frac{R^2}{r}.$$

Линейная скорость связана с периодом обращения и радиусом орбиты $v = \dfrac{2\pi r}{T}$. Из двух последних соотношений находим

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 3{,}8 \cdot 10^8\,\text{м}.$$

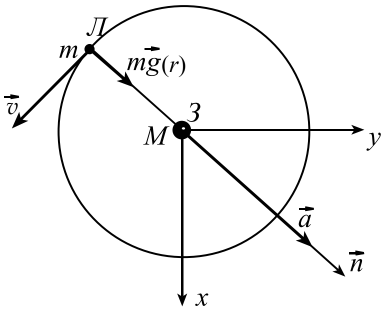

Рис. 8

Пример 7. Автомобиль движется в горизонтальной плоскости с постоянной по модулю скоростью по закруглению дороги – дуге окружности радиуса $R = 200$ м. Коэффициент трения скольжения шин по дороге $\mu = 0{,}1$. При какой скорости v автомобиля его не будет «заносить»? Ускорение свободного падения

$$g = 10\,\text{м/с}^2.$$

Решение. Инерциальная система отсчёта и силы, действующие на автомобиль, показаны на рис. 9. Такими силами являются: сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила сопротивления $\vec{F}_{\text{с}}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{с}} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

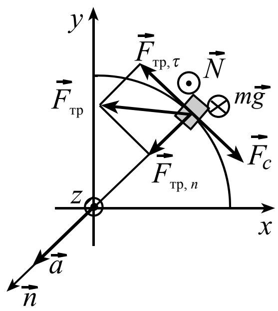

Рис. 9

Так как автомобиль движется по окружности равномерно, $\vec{F}_{\text{тр},\tau} = -\vec{F}_\text{с}$. Перейдём к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m\frac{v^2}{R} = F_{\text{тр},n} \quad (17)$$

и на вертикаль

$$0 = N - mg. \quad (18)$$

Величина силы трения ограничена $F_\text{тр} \le \mu N$. Тогда из (17), (18) следует, что при движении по окружности в горизонтальной плоскости $m\frac{v^2}{R} \le \mu mg$. Отсюда находим верхнюю оценку (при $F_\text{с} = 0$) скорости такого движения: $v \le \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}1 \cdot 10 \cdot 200} \approx 14$ м/с.

Пример 8. Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в $1/12$ окружности радиуса $R = 100$ м. С какой наибольшей по величине v скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию $\mu = 0{,}3$? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

Решение. На автомобиль в процессе разгона действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_\text{тр}$, которая сонаправлена с ускорением $\vec{a}$. Проанализируем изменение вектора ускорения со временем. Для этого удобно обратиться к тангенциальной a_τ и нормальной a_n составляющим ускорения. По условию a_τ постоянна, следовательно, величина скорости автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая a_τ связаны соотношением

$$v = \sqrt{2a_\tau s} = \sqrt{2a_\tau \cdot \frac{2\pi R}{12}}, \text{ отсюда } a_\tau = \frac{3v^2}{\pi R}.$$

Центростремительная составляющая ускорения определяется формулой $a_n = \frac{v^2}{R}$ и достигает наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора

$$a_{max} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{3v^2}{\pi R}\right)^2} = \frac{v^2}{R}\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует $N = mg$, а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение $a_{\max} = \dfrac{F_{\text{тр,max}}}{m} = \dfrac{\mu N}{m} = \mu g$.

Тогда наибольшая скорость в конце участка разгона равна

$$v = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}} \approx 15\text{м/с}.$$

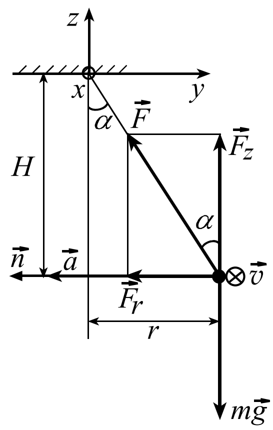

Рис. 10

Пример 9. Массивный шарик, подвешенный на лёгкой нити, движется равномерно по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 10). Расстояние от точки подвеса нити до плоскости, в которой происходит движение, равно H. Найдите период T обращения шарика. Ускорение свободного падения g.

Решение. Введём обозначения: L – длина нити, α – угол, образуемый нитью с вертикалью, $r = L\sin\alpha$ – радиус окружности, по которой движется шарик со скоростью v. Заметим, что $H = L\cos\alpha$. Обратимся к динамике. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{F}$ нити. Эти силы сообщают шарику направленное к центру окружности нормальное ускорение, по величине равное $a = \dfrac{4\pi^2}{T^2}r$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$, переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление и на вертикаль, получаем:

$$m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}r = F\sin\alpha, \tag{19}$$

$$0 = F\cos\alpha - mg. \tag{20}$$

С учётом (20) преобразуем (19) к виду:

$$m\frac{4\pi^2}{T^2}L\sin\alpha = mg\cdot\text{tg}\alpha, \quad \text{отсюда} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

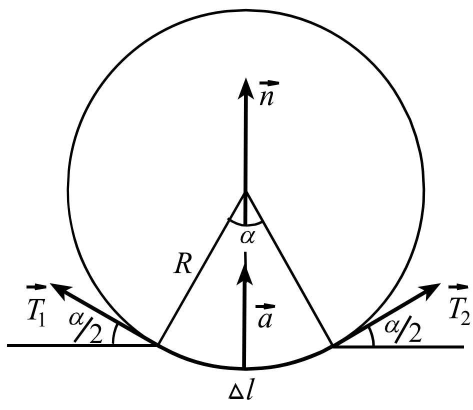

Рис. 11

Пример 10. Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной L, массой M и жёсткостью k, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω. Найдите радиус R вращающегося кольца.

Решение. Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной Δl. Его масса $\Delta m = \dfrac{M}{2\pi R}\Delta l$. На выделенный участок действуют силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (рис. 11), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю $T_1 = T_2 = T$. По второму закону Ньютона

$$\Delta m \cdot \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2.$$

Рассматриваемый элементарный участок под действием приложенных сил равномерно движется по окружности, следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно $\omega^2 R$. Переходя в математической записи второго закона Ньютона к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, получаем $\dfrac{M\,\Delta l}{2\pi R}\omega^2 R = 2T\sin(\alpha/2)$. Величина T упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением $(2\pi R - L)$ кольца законом Гука $T = k(2\pi R - L)$. При малых углах $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta l/(2R)$. С учётом этих соотношений уравнение движения принимает вид

$$\frac{M\,\Delta l}{2\pi R}\omega^2 R = 2k(2\pi R - L)\frac{\Delta l}{2R}.$$

Отсюда $R = \dfrac{2\pi k L}{4\pi^2 k - \omega^2 M}$. Из последней формулы следует, что при $\omega = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ кольцо должно неограниченно растягиваться, однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а с ростом ω кольцо разорвётся.

Пример 11. Определите вес P тела массой m на географической широте φ. Ускорение свободного падения g, Землю считайте однородным шаром радиуса R.

Решение. Напомним, что вес $\vec{P}$ тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Допустим, что тело лежит на поверхности вращающейся Земли, на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная к центру Земли, и сила реакции $\vec{N}$ (рис. 12). По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}$. Поэтому для определения веса тела найдём силу реакции $\vec{N}$. В инерциальной системе отсчёта тело равномерно движется по окружности радиуса $r = R \cdot \cos\varphi$ с периодом одни сутки, т. е. $T = 86400$ с, и циклической частотой

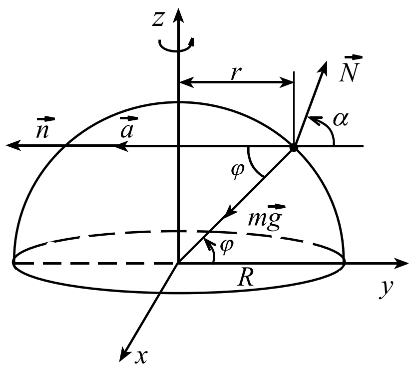

Рис. 12

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Ускорение тела по величине равно $a_n = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot R \cdot \cos\varphi$ и направлено к оси вращения Земли. Из этого следует, что равнодействующая сил тяжести и реакции Земли тоже должна быть направлена к оси вращения Земли. Тогда сила реакции образует с перпендикуляром к оси вращения некоторый угол $\alpha \neq \varphi$, иначе сумма сил, приложенных к телу, а следовательно, и ускорение были бы равны нулю. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$.

Перейдём к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m\omega^2 R\cos\varphi = mg\cos\varphi - N\cos\alpha$$

и на направление, перпендикулярное плоскости, в которой лежит окружность, $0 = -mg\sin\varphi + N\sin\alpha$. Исключая α из двух последних соотношений, находим вес тела:

$$P = N = \sqrt{(mg)^2 - m^2\omega^2 R(2g - \omega^2 R)\cos^2\varphi}.$$

Пример 12. Маленький деревянный шарик прикреплён с помощью нерастяжимой нити длиной $l = 30$ см ко дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити $r = 20$ см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения нить отклонится от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$? Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$.

Решение. Нить с шариком отклонится к оси вращения. Действительно, на шарик будут действовать три силы: сила $m\vec{g}$ тяжести, сила $\vec{T}$ натяжения нити и сила $\vec{F}_{\text{А}}$ Архимеда (рис. 13). Найдём эту силу. Обозначим объём шарика V, плотность дерева, из которого изготовлен шарик, $\rho_ш$, плотность воды $\rho_{\text{в}}$ и рассмотрим движение жидкости до погружения в неё шарика. Любой элементарный объём воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления (силы Архимеда) $F_{\text{А},z}$ уравновешивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объёме, горизонтальная составляющая $F_{\text{А},r}$ сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости шариком эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна $F_{\text{А},z} = \rho_{\text{в}} V g$, а направленная к оси вращения составляющая силы Архимеда по величине равна $F_{\text{А},r} = c_{\text{в}} V \omega^2 (r - l\sin\alpha)$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиуса $(r - l\sin\alpha)$ в горизонтальной плоскости. Из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}$.

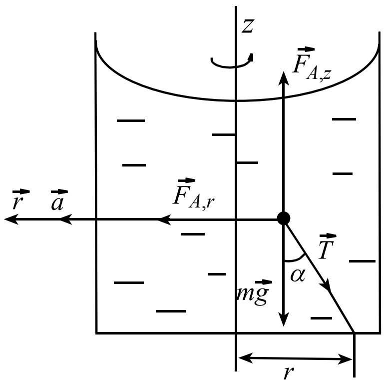

Рис. 13

Переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим:

$$\rho_{\text{в}} V g - \rho_{\text{ш}} V g - T\cos\alpha = 0,$$

проектируя силы и ускорения в горизонтальной плоскости на нормальное направление, получаем

$$\rho_{\text{ш}} V \omega^2 (r - l\sin\alpha) = \rho_{\text{в}} V \omega^2 (r - l\sin\alpha) - T\sin\alpha.$$

Исключая T из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость $\omega = \sqrt{\dfrac{g\ \text{tg}\alpha}{r - l\sin\alpha}} \approx 10{,}7\,\text{с}^{-1}$.

Пример 13. Определите радиус R горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, если известно, что при скорости $v = 90\,\text{км/ч}$ вес автомобиля в верхней точке мостика вдвое меньше веса на горизонтальной дороге. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. При движении по горизонтальной дороге вес тела равен силе тяжести.

Обратимся к движению автомобиля по мостику. Инерциальная система отсчёта и силы, действующие на автомобиль и на мостик, показаны на рис. 14.

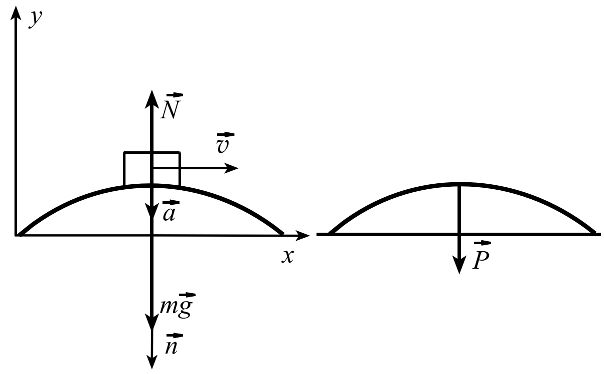

Рис. 14

Для автомобиля в верхней точке мостика по второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Перейдём в этом уравнении к проекциям сил и ускорения на нормальное направление: $mv^2/R = mg - N$. По условию $P = mg/2$, а по третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, тогда $N = mg/2$. Из полученных соотношений находим:

$$mv^2/R = mg/2, \quad \text{отсюда}$$

$$R = \frac{2 \cdot v^2}{g} = \frac{2 \cdot 25^2}{10} = 125\,\text{м}.$$

Рассмотрим два примера, в которых тела движутся по окружности неравномерно, при этом тангенциальное ускорение тоже изменяется. В этом случае наряду с законом Ньютона полезно привлекать закон изменения (или сохранения) механической энергии.

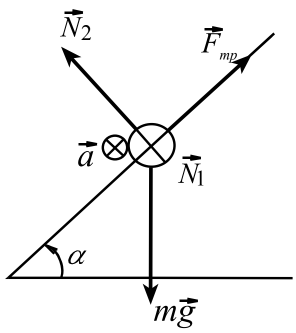

Рис. 15

Пример 14. По длинной проволочной винтовой линии радиуса R с шагом H, ось которой вертикальна, скользит бусинка. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке равен $\mu (\mu < H/2\pi R)$. Найдите установив\\\шуюся скорость v скольжения бусинки. Ускорение свободного падения g.

Решение. На бусинку действуют силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, при этом $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, здесь N_1 – горизонтальная составляющая, а N_2 лежит в одной плоскости с $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 15).

Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости составляющая N_1, сообщающая бусинке центростремительное ускорение, а с ней и сила трения будут расти по величине, так что естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью v. Для определения этой скорости перейдём в инерциальную систему отсчёта (ИСО), движущуюся по вертикали вниз со скоростью $v\sin\alpha$, α – угол наклона вектора скорости к горизонту, $\operatorname{tg}\alpha = H/2\pi R$. В выбранной ИСО бусинка равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью $v\cos\alpha$, при этом ускорение бусинки направлено по нормали к оси винтовой линии и по величине равно $(v\cos\alpha)^2/R$. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, находим $m\dfrac{(v\cos\alpha)^2}{R} = N_1$. В вертикальной плоскости $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}$, переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, находим $F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha$, $N_2 = mg\cos\alpha$.

Из этих соотношений с учётом $F_{\text{тр}} = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ получаем:

$$v = \left(gR/\mu\right)^{1/2}\left[\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \mu^2\right)\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right)\right]^{1/4}.$$

Пример 15. Гладкий жёлоб состоит из горизонтальной части AB и дуги окружности BD радиуса $R = 5$ м (рис. 16). Шайба скользит по горизонтальной части со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определите модуль a ускорения шайбы в точке C и угол β, который вектор $\vec{a}$ ускорения шайбы в этот момент составляет с нормалью к траектории в точке C.

Радиус OC образует с вертикалью угол $\alpha = 60^{\circ}$. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. Для нахождения ускорения a шайбы в точке C найдём тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения в этой точке. На тело, движущееся в вертикальной плоскости по дуге BD (рис. 16), в любой точке действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры

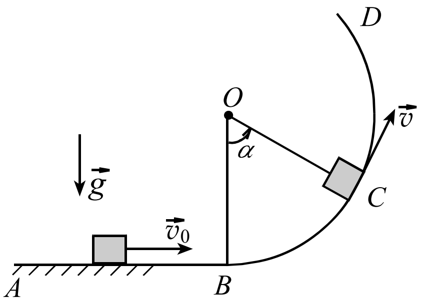

Рис. 16

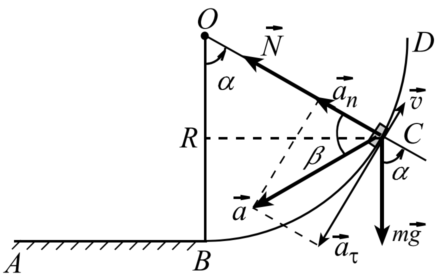

Рис. 17

$\vec{N}$. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Перейдём в этом уравнении к проекциям сил и ускорения на тангенциальное направление (на направление вектора скорости)

$$ma_\tau = -mg\sin\alpha.$$

Отсюда $a_\tau = -g\sin\alpha = -10\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx -8{,}7\,\text{м/с}^2$.

Для определения $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ найдём величину v скорости шайбы в точке C. Обратимся к энергетическим соображениям. При движении по горизонтальной части жёлоба скорость тела не изменяется вследствие отсутствия трения, а на вертикальной части жёлоба (как и на горизонтальной) сила нормальной реакции не совершает работу, т. к. эта сила перпендикулярна скорости. Следовательно, механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется. Потенциальную энергию шайбы на горизонтальной части жёлоба будем считать равной нулю. Тогда по закону сохранения механической энергии

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{v^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha),$$

отсюда

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} - 2g\left(1-\cos\alpha\right) = \frac{10^2}{5} - 2\cdot 10\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = 10\,\text{м/с}^2.$$

Величину a ускорения шайбы в точке C найдём по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \approx 13,2\,\text{м/с}^2.$$

В точке C вектор ускорения $\vec{a}$ образует с нормалью угол β такой, что $tg\beta = \dfrac{|a_\tau|}{a_n} \approx 0,87$, отсюда $\beta \approx 41^\circ$.

Пример 16. На горизонтальной поверхности лежит полушар массой $M = 100\,\text{г}$. Из его верхней точки без трения с нулевой начальной скоростью скользит шайба массой $m = 25\,\text{г}$. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при $\alpha = 10^\circ$. Найдите коэффициент μ трения скольжения полушара по поверхности. Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$.

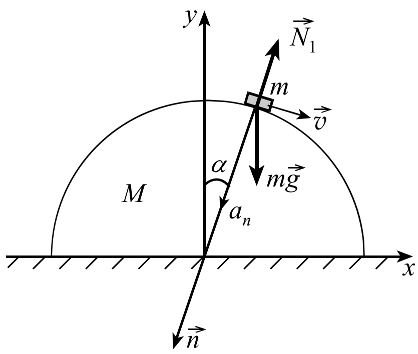

Рис. 18

Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}_1$ (рис. 18). Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, в момент начала движения полушара получаем $m\dfrac{v^2}{R} = mg\cos\alpha - N_1$.

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgR\left(1 - \cos\alpha\right).$$

Из этих соотношений находим величину действующей на шайбу в этот момент силы нормальной реакции: $N_1 = mg\left(3\cos\alpha - 2\right)$.

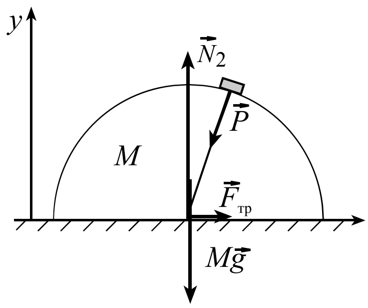

Рис. 19

На полушар действуют силы: тяжести $M\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}_2$, трения $\vec{F}_{тр}$ и вес $\vec{P}$ шайбы (рис. 19).

По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}_1$. В момент начала движения полушара из второго закона Ньютона

$$M\,\vec{a}_1 = M\,\vec{g} + \vec{P} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения $\vec{a}_1 = \vec{0}$ полушара на вертикальное направление, с учётом равенства $P = N_1$ получаем:

$$N_2 = Mg + P\cos\alpha = Mg + mg\left(3\cos\alpha - 2\right)\cos\alpha.$$

Переход к проекциям сил и ускорения полушара на горизонтальное направление позволяет определить величину силы трения:

$$F_{\text{тр}} = P\sin\alpha = mg(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha.$$

С ростом α сила $F_{\text{тр}}$ увеличивается, сила N_2 уменьшается. В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением $F_{\text{тр}} = \mu \cdot N_2$. Отсюда

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N_2} = \frac{m(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha}{M + m(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha} \approx 0,033.$$

Контрольные вопросы

Справочные данные:

Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = G\dfrac{M}{R^2} \approx 10\,\text{м}/\text{с}^2$; объём шара радиуса R равен $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

1. Восьмилопастной винт самолета фотографируют во время вращения с экспозицией $\tau = 0{,}02$ с. На фотографии видно, что за это время каждая лопасть повернулась на половину угла между двумя соседними лопастями. Вычислите угловую скорость ω вращения винта. Если длина лопасти $R = 5,4$ м, то какова линейная скорость v конца лопасти?

2. Примем в Примере № 2 Задания, что в начальный момент времени стержень совпадает с диаметром кольца, а через $\tau = 10$ с расстояние от вагончика до оси вращения уменьшается вдвое. Радиус игрушечной кольцевой железной дороги $R = 0,5$ м. Найдите величину a ускорения вагончика. Укажите направление вектора $\vec{a}$ ускорения вагончика в любой момент времени.

3. Линейная скорость конца стрелки часов $v = 0,35 \cdot 10^{-4}$ м/с, ускорение конца стрелки $a = 0,61 \cdot 10^{-7}$ м/с^2. Какая это стрелка – секундная, минутная, часовая? Ответ подкрепите расчётами.

4. В процессе выполнения этого задания Вы сидите за столом на вращающейся Земле. Вычислите Ваши личные линейную скорость и ускорение, обусловленные участием в суточном вращении Земли.

Во второй части этого упражнения Вам предлагается встать и расположить одну вытянутую руку параллельно оси вращения Земли, а другой указать направление вектора Вашего ускорения. Как именно Вы расположите вытянутые руки? Объясните Ваш выбор.

5. На сколько процентов (см. предыдущий контрольный вопрос). Ваш вес отличается от силы тяжести?

6. Колесо, частота вращения которого в момент начала торможения $\nu = 4,0$ с$^{-1}$, останавливается через $\tau = 30$ с. Определите величину ε углового ускорения колеса, считая это ускорение постоянным. Сколько оборотов совершит колесо за время торможения?

7. Под каким углом α к горизонту следует бросить камень так, чтобы центр кривизны малого участка траектории в окрестности её высшей точки лежал в той же горизонтальной плоскости, в которой лежит точка старта?

8. По сообщениям СМИ из всего добытого на Земле золота можно было бы «сделать» шар радиусом $R = 11$ м. Вычислите скорость v приповерхностного спутника такой планеты. Плотность золота $\rho = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

9. Обратимся к Примеру №13. При какой скорости v автомобиля, движущегося по тому же мостику, водитель на мгновение «побывает в невесомости»?

Задачи

1. Камень брошен под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Через некоторое время по траектории камня летит птица с постоянной скоростью $v = 2$ м/с. Найдите величину $\alpha_{\max}$ наибольшего и $\alpha_{\min}$ наименьшего ускорения птицы в таком полёте.

2. Три звезды массы m каждая, удалённые от других небесных тел, сохраняют в своем движении конфигурацию равностороннего треугольника со стороной L. Найдите период T обращения любой звёзды вокруг центра масс системы.

3. Прибор для измерения угловой скорости вращения состоит из гладкого Г – образного стержня, расположенного в горизонтальной плоскости, и муфточки A массы m, соединённой с пружинкой жёсткости k (рис.1). Второй конец пружины закреплён в точке B. Вся система вращается с некоторой постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Считая относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l_0}$ пружинки известным, найдите угловую скорость ω.

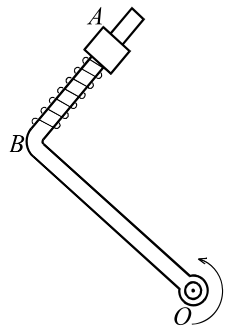

Рис. 1

4. На прошедшем в августе 2007 г. в Жуковском МАКС–2007 впервые в мире 5 тяжёлых истребителей Су–27 из пилотажной группы «Русские витязи» и четыре фронтовых истребителя МиГ–29 из пилотажной группы «Стрижи», пролетая мимо зрителей со скоростью $v_1 = 100$ м/с в плотном строю «ромб» (рис. 2), приблизительно за $\tau = 18$ с выполнили «бочку» (вращение строем на 360^0 вокруг горизонтальной оси; см. видео в интернете). Крайние истребители Су–27 удалены от истребителя в центре строя на $r = 30$ м. На какую величину Δv скорость крайних истребителей Су–27 должна превышать скорость истребителя в центре строя во время выполнения фигуры? Во сколько раз во время выполнения фигуры наибольшая сила давления на сиденье лётчика крайнего истребителя больше силы тяжести лётчика?

Рис. 2

5. Допустим, что опыт, в котором измеряется период обращения шарика, подвешенного на лёгкой нити и равномерно движущегося по окружности в горизонтальной плоскости, выполняется сначала на Земле, а затем на Луне. Если в этих опытах периоды обращения одинаковы, то в каком из опытов сила натяжения нити больше? Ответ подкрепите расчётом.

6. Трамвай, движущийся прямолинейно по горизонтальному рельсовому пути со скоростью $V_0 = 2$ м/с, въезжает на участок поворота – четверть окружности радиуса $R = 20$ м – и равномерно (по времени) набирая скорость, проезжает поворот. Постоянное в процессе поворота тангенциальное ускорение равно одной третьей начального нормального. При какой величине коэффициента трения скольжения пассажиры, сидящие в салоне, не будут скользить по сиденьям в ходе поворота?

7. Тонкая металлическая замкнутая цепочка массы m и длины L надета на гладкий круговой конус с углом при вершине 2α . Ось конуса вертикальна. Конус и цепочка вращаются с частотой ν вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью конуса. Цепочка лежит в горизонтальной плоскости. Найдите силу T натяжения цепочки.

8. Ротор ультрацентрифуги вращается вокруг вертикальной оси с частотой $n = 5,0 \cdot 10^4$ об/мин. На роторе закреплена пробирка с водой. Ось пробирки горизонтальна, направлена по радиусу ротора, дно пробирки находится на расстоянии $L = 10$ см от оси вращения. В пробирке у дна находится шарик объёмом $V = 0,1$ см^3 и массой $m = 0,25$ г. С какой по величине P силой шарик действует на дно пробирки в процессе вращения ультрацентрифуги? Плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

9. Бусинка массы m надета на гладкое проволочное кольцо радиуса R, плоскость которого наклонена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Кольцо жесткое и закреплено неподвижно. С какой по величине и направлению силой $\vec{P}$ действует бусинка на кольцо в момент прохождения нижней точки кольца, если бусинка начала движение из верхней точки кольца с пренебрежимо малой скоростью?

Дополнительная задача

1. Космонавт массой m = 100 кг находится вне космического корабля массой $M = 5{\cdot}10^3$ кг на легком фале длиной l = 64 м. Найдите величину T силы натяжения фала, если корабль расположен между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры масс. Считайте, что корабль движется по круговой орбите, высота которой над поверхностью Земли мала по сравнению с радиусом Земли. Гравитационным взаимодействием космонавта с кораблём пренебречь.