Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей
«Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института (государственного университета)»

МАТЕМАТИКА

Стереометрия

Задание №5 для 10-х классов

(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2013

Составитель: А.С. Кочерова, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 10-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2013, 20 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 3 марта 2014 г.

Составитель:
Кочерова Анна Сергеевна
Подписано 20.12.13. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,25.
Уч.-изд. л. 1,115. Тираж 550. Заказ №36-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московской обл.,141700,
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

1. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Напомним основные *определения*.

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

При решении многих задач по стереометрии часто используются следующие теоремы.

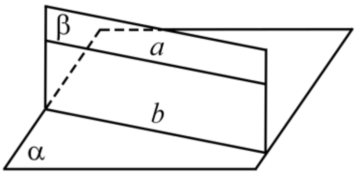


Рис. 1

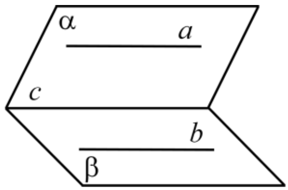


Рис. 2

Теорема 1. (Теорема о линии пересечения). Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения *плоскостей* параллельна данной прямой.

□ Пусть плоскость β пересекает плоскость α по прямой b и проходит через прямую a такую, что $a \parallel \alpha$ (рис. 1). Тогда прямые a и b лежат в плоскости β, причём $a \cap b = \varnothing$ (иначе точка их пересечения лежала бы в плоскости α, что противоречит параллельности прямой a и плоскости α). Следовательно, $a \parallel b$. ■

Теорема 2. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

□ Пусть $a \parallel b$, где $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, причём $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 2). Докажем, что $c \parallel a$ и $c \parallel b$.

Действительно, поскольку $b \subset \beta$ и $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$ по признаку параллельности прямой и плоскости. Далее по теореме о линии пересечения получим $c \parallel a$. Аналогично доказывается, что $c \parallel b$. ■

Теорема 3. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

□ Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a, а прямая b параллельна α и β. Возьмём на прямой a точку M и проведём плоскость γ через b и M (рис. 3). Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a_1, а плоскость β – по прямой a_2. По теореме о линии пересечения $a_1 \parallel b$ и $a_2 \parallel b$. Но прямые a_1 и a_2 имеют общую точку M, следовательно, это одна и та же прямая – прямая a. Итак, $a \parallel b$. ■

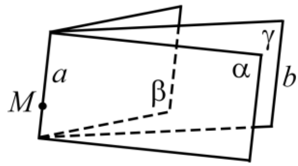


Рис. 3

Пример 1. Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

□ Пусть a скрещивается с b. Возьмём на прямой a точку A и проведём через неё прямую b', параллельную прямой b (в плоскости, проходящей через A и b). Через a и построенную прямую проведём плоскость α. Аналогично строим плоскость β (рис. 4). По признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \beta$. ■

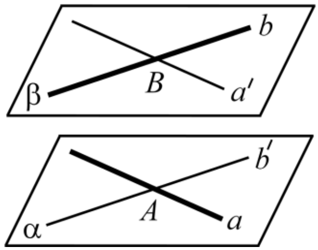


Рис. 4

2. Об изображении фигур в стереометрии

В стереометрии используется плоский чертёж или *изображение* – любая фигура, подобная параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость. Поскольку грани многогранников – многоугольники, лежащие в различных плоскостях, для начала изучим, как изображаются многоугольники.

Справедливо следующее утверждение: изображением данного треугольника может служить любой треугольник. Для изображения многоугольника выделяют в нём три вершины A_1, A_2, A_3. Затем строят изображение треугольника $A_1A_2A_3$ в виде произвольного треугольника. Изображения остальных вершин многоугольника строятся уже однозначно согласно свойствам параллельного проектирования.

Пример 2. Постройте изображение правильного шестиугольника $ABCDEF$.

□ Пусть O – центр шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 5). Треугольник ABO изображается произвольным треугольником $A'B'O'$. Так как при параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные, то точка C переходит в точку пересечения прямых, параллельных AO и AB, проходящих через B и O соответственно. А точки

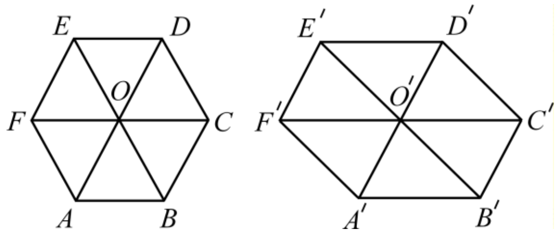
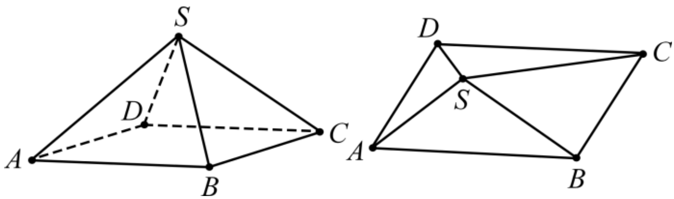


Рис. 5

оригинала, симметричные относительно точки O, переходят в точки изображения, симметричные относительно O'. Таким образом получаем точки C', D', E', F'. ■

Справедливо следующее утверждение: изображением данного тетраэдра может служить любой четырёхугольник с проведёнными в нём диагоналями (не обязательно выпуклый). Для изображения многогранника выделяют в нём четыре вершины A_1, A_2, A_3, A_4. Затем строят изображение тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ в виде произвольного четырёхугольника с проведёнными в нём диагоналями. Изображения остальных вершин многогранника строятся уже однозначно.

Пример 3. Постройте изображение правильной четырёхугольной пирамиды.



а) **б)**

Рис. 6

□ Изобразим сначала три ребра, выходящие из одной вершины основания, например, из A (см. рис. 6). Это можно сделать произвольно. Далее, два других ребра основания изображаются однозначно в силу параллельности уже построенным отрезкам. Остается только соединить изображение вершины пирамиды с изображениями вершин основания. ■

3. Сечения многогранников

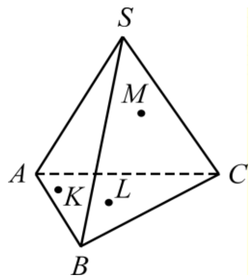
Определение. Если пересечением многогранника и плоскости является многоугольник, то он называется *сечением* многогранника указанной плоскостью.

Мы будем заниматься решением следующей задачи: на данном изображении многогранника построить изображение его сечения данной плоскостью.

По сложившейся традиции пишут «построить сечение многогранника», опуская слово «изображение». Способ задания секущей плоскости может быть разным: например, тремя точками, не лежащими на одной прямой, двумя точками и условием параллельности некоторой прямой, одной точкой и условием параллельности некоторой плоскости, и т. п.

Сначала рассмотрим самый простой случай:

1) секущая плоскость задана тремя точками, две из которых лежат в плоскости одной грани многогранника, а третья – в плоскости грани, смежной с первой.

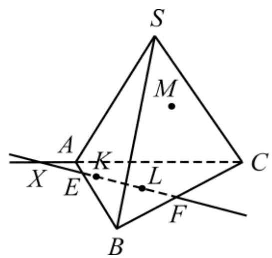


7а)

Пример 4. Построить сечение пирамиды *SABC* плоскостью, проходящей через точки *K, L* и *M* (рис. 7а)

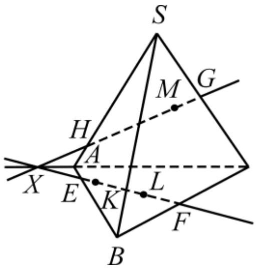
$$K \in (ABC),\ L \in (ABC),$$
$$M \in (ASC)).$$

□ Для решения поставленной задачи построим линии пересечения секущей плоскости с гранями пирамиды. Предположим, что плоскость *KLM* (которую мы обозначим α) построена. Так как плоскости α и *ABC* имеют общую точку *K,* то они пересекаются по прямой, проходящей через *K* (согласно аксиоме пересечения плоскостей), а так как эти плоскости имеют ещё одну общую точку – точку L, то прямая *KL* является линией пересечения плос-

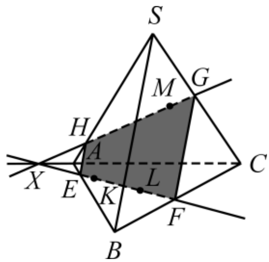


7б)

костей α и ABC. Отсюда вытекает следующее построение: проведём прямую KL до пересечения с отрезками AB и BC в точках E и F (рис. 7*б*). Пусть эта прямая пересечёт прямую AC в точке X. Будем рассуждать аналогично: точки X и M лежат как в плоскости α, так и в плоскости ASC, следовательно, прямая XM – их линия пересечения, поэтому строим прямую XM до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G (рис. 7*в*). Повторяя рассуждения по той же схеме, делаем вывод, что плоскости α и ASB пересекаются по прямой EH, а плоскости α и BSC – по прямой FG. Поэтому для завершения построения остаётся соединить точку E с точкой H и точку F с точкой G (рис. 7*г*). Единственность решения вытекает из аксиомы плоскости. ■



7в)



7г)

Проведённое построение было основано на нахождении линий пересечения секущей плоскости с плоскостями граней многогранника – так называемых *следов* секущей плоскости на плоскостях граней. Отсюда и происходит название метода построения сечений, который мы сейчас использовали, – *метод следов*.

В случае, если прямые KL и AC окажутся параллельными, нужно воспользоваться теоремами о параллельности в пространстве. Эти же теоремы применяются и в случае, если одним из условий задачи является параллельность некоторой прямой, некоторой плоскости или двум скрещивающимся прямым.

Пример 5. Построить сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α, проходящей через точку K, лежащую на SS_1 ($S_1 \in (ABC)$) внутри $SABC$, параллельно скрещивающимся рёбрам AB и SC (рис. 8*а*).

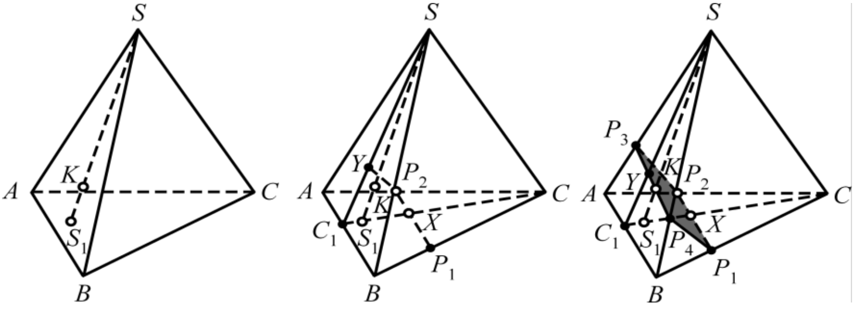


Рис. 8

□ Построим плоскость SC_1C. На этой плоскости строим прямую KX – след секущей плоскости α. Так как SC параллельна α, то линия пересечения KX плоскостей α и SCS_1 параллельна прямой SC.

Пусть $CS_1 \cap AB = C_1$, $C_1S \cap KX = Y$. Так как AB параллельна α, то линия пересечения плоскостей α и ABC параллельна прямой AB. Поэтому, проводим через X прямую $P_1P_2 \parallel AB$, где P_1 – точка пересечения этой прямой с BC, а P_2 – точка пересечения с AC. Аналогично, через Y проводим прямую $P_3P_4 \parallel AB$, где P_3 – точка пересечения этой прямой с BS, а P_4 – точка пересечения с AS. Следовательно, $P_1P_2P_3P_4$ – искомое сечение. ■

4. Применение проектирования при построении сечений

Теперь рассмотрим более сложные ситуации, когда нет двух точек в плоскости одной грани многогранника, принадлежащих также и сечению.

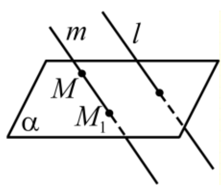
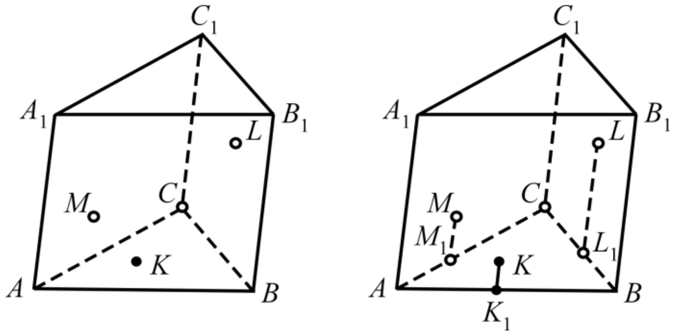


Рис. 9

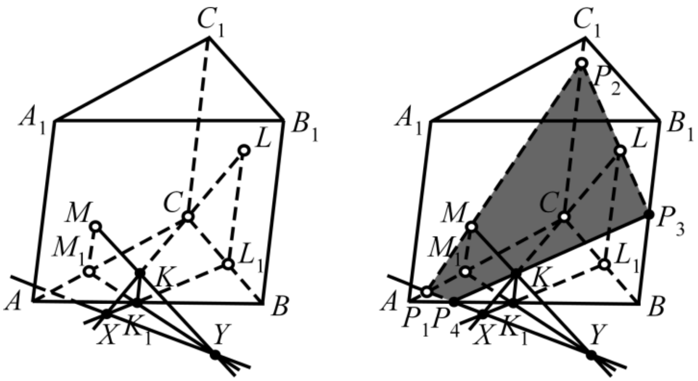
Определение. Пусть в пространстве заданы плоскость α (*плоскость проектирования*) и прямая l (*направление проектирования*), пересекающая α. Возьмём в пространстве произвольную точку M и проведём через неё прямую m, параллельную l (если M лежит на l, то в качестве m берётся сама прямая l) (рис. 9). Точка пересечения M_1 прямой m с плоскостью α называется *параллельной проекцией* точки M на эту плоскость.

Пример 6. Построить сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью KLM (рис. 10*а*), где $K \in (AA_1B)$, $L \in (BB_1C)$, $M \in (AA_1C)$.



а) **б)**

Рис. 10



в) **г)**

Рис. 10

□ Точки *K, L* и *M* находятся по одной на каждой из боковых граней призмы. Проблема заключается в нахождении следа плоскости *KLM* на плоскости *ABC* (мы предполагаем, что эти плоскости пересекаются). Для того, чтобы построить этот след, воспользуемся параллельным проектированием. Пусть точки K_1, L_1 и M_1 – проекции точек K, L и M на плоскость ABC в направлении бокового ребра призмы, а X и Y – точки пересечения прямых KL и K_1L_1, KM и K_1M_1 соответственно (рис. 10*б*). Так как $(KLM) \cap (ABC)$, то из трёх пар прямых, KL и K_1L_1, KM и K_1M_1, LM и L_1M_1, есть по крайней мере две пары пересекающихся прямых (докажите это самостоятельно). Пусть это будут пары KL, K_1L_1 и KM,

K_1M_1. Тогда прямая XY – искомый след (рис. 10*в*). Действительно, точка X лежит на прямой KL, следовательно, она принадлежит плоскости сечения. Но эта же точка лежит и в плоскости ABC, так как она находится на прямой K_1L_1. Следовательно, точка X принадлежит линии пересечения плоскостей KLM и ABC. Аналогичный вывод делаем и относительно точки Y. Теперь, после того как нужный след построен, дальнейшее построение без труда проводится методом следов (рис. 10 г).

В случае когда плоскости KLM и ABC параллельны, достаточно через точки K, L и M провести прямые, параллельные прямым AB, BC и CA. Искомое сечение тем самым будет построено. ■

Параллельное проектирование удобно использовать при построении сечений призм (в частности, параллелепипедов и кубов). При этом, как правило, в качестве плоскости проектирования выбирают плоскость основания призмы, а за направление проектирования принимают направление бокового ребра призмы.

При построении сечений пирамид удобно пользоваться центральным проектированием.

Определение. Пусть в пространстве заданы плоскость α (*плоскость проектирования*) и не принадлежащая ей точка S (*центр проектирования*). *Центральной проекцией* точки M на плоскость α называется точка M_1 пересечения прямой SM с плоскостью α, если она существует (рис. 11).

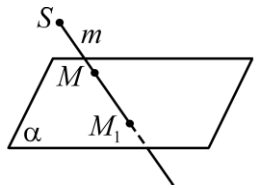
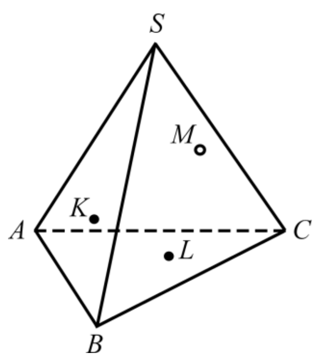


Рис. 11

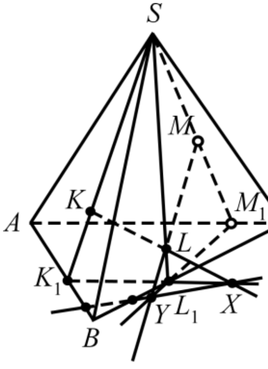
За плоскость проектирования принимается плоскость основания, а в качестве центра проектирования берут вершину пирамиды. Приведём соответствующий пример.

Пример 7. Построить сечение пирамиды $SABC$ плоскостью KLM, где $K \in (ASB)$, $L \in (BSC)$, $M \in (CSA)$ (рис. 12*а*).

□ Построим центральные проекции точек K, L и M на плоскость ABC. Пусть это будут точки K_1, L_1 и M_1 (рис. 12*б*). Построим точки пересечения прямых KL и K_1L_1 (точка X), LM и L_1M_1 (точка Y). Тогда аналогично тому, как это было сделано в примере 5, доказываем,



12а)



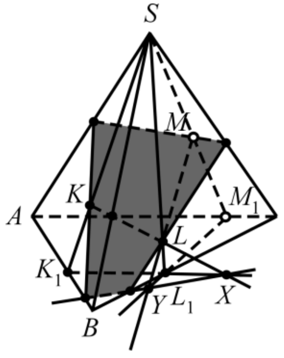


Рис. 12 б) **12 в)**

что прямая XY – линия пересечения секущей плоскости и плоскости основания пирамиды. Дальнейшее построение показано на рис. 12*в*.

5. Примеры решения задач на сечения многогранников

Здесь мы разберём решения некоторых задач, связанных с определением вида сечения, вычислением периметров, площадей сечений, отношений, в которых секущая плоскость делит рёбра многогранника и т. п. При этом, чтобы не загромождать изложение, мы подробно не будем описывать само построение сечения, тем не менее, когда вы будете решать подобные задачи, не забывайте аккуратно обосновать построение сечения (даже если в условии задачи не сказано «построить сечение»).

Пример 8. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Точки P, Q и R взяты на медианах SP_1, SQ_1 и SR_1 граней SAB, SBC и SCA соответственно так, что $SP : PP_1 = 2 : 1$, $SQ : QQ_1 = 2 : 3$, а R – середина отрезка SR_1. Построить сечение пирамиды плоскостью PQR и определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро SB.

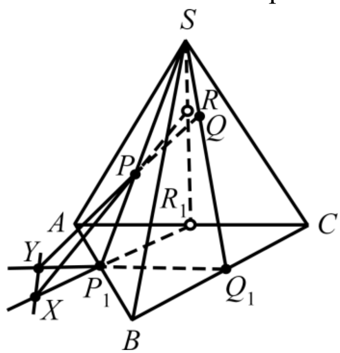


Рис. 13

□ Сначала построим след секущей плоскости на плоскости основания пирамиды, соединив прямой точки X и Y пересечения прямых PR, P_1R_1 и PQ, P_1Q_1 (рис. 13). Уточним теперь положение точек X и Y, найдя отношения $XP_1 : XR_1$ и $YP_1 : YQ_1$. Для их вычисления воспользуемся известной из планиметрии теоремой Менелая. Согласно этой теореме, применённой к треугольнику SP_1R_1 (рис. 14), $\frac{R_1R}{RS}\cdot\frac{SP}{PP_1}\cdot\frac{P_1X}{XR_1}=1$, следовательно, $1\cdot\frac{R_1X}{XP_1}\cdot\frac{1}{2}=1$, откуда $\frac{XP_1}{XR_1}=\frac{1}{2}$.

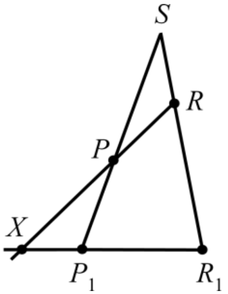


Рис. 14

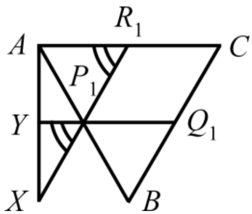


Рис. 15

Аналогично из треугольника SP_1Q_1 находим, что $\frac{YP_1}{YQ_1}=\frac{1}{3}$. Обратимся теперь к рис. 15. Так как $\frac{YP_1}{YQ_1}=\frac{1}{3}$, то $\frac{YP_1}{P_1Q_1}=\frac{1}{2}$ или $\frac{YP_1}{AR_1}=\frac{1}{2}$ (так как $P_1Q_1=AR_1$), а раз $\frac{XP_1}{XR_1}=\frac{1}{2}$ и $\angle YP_1X=\angle AR_1X$, то $\Delta YP_1X\sim\Delta AR_1X$, следовательно, точки X, Y и A лежат на одной прямой (причём Y – середина отрезка AX). Теперь уже легко достроить сечение (рис. 16).

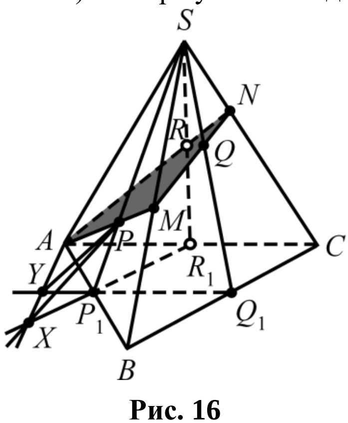


Рис. 16

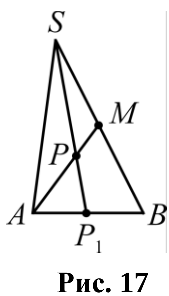


Рис. 17

Чтобы найти $SM : MB$ (M – точка пересечения AP и SB), обратимся к рис. 17. Как известно из планиметрии, точка P, делящая медиану SP_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины S, является точкой пересечения медиан треугольника ASB. Поэтому AM – медиана этого треугольника и $SM : MB = 1 : 1$. ■

Замечание. При решении этой задачи мы использовали **теорему Менелая**, напомним без доказательства, в чём она заключается.

Если на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC (рис. 18) или их продолжениях взяты три точки A_1, B_1, C_1, то эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Отметим, что в данной задаче можно было бы найти отношение $XP : XR_1$ (см. рис. 14) и без теоремы Менелая. Например, провести прямую $RK \parallel XR_1$ (см. рис. 19). Тогда из подобия треугольников SKR и SP_1R_1 следует, что $SK : SP_1 = 1 : 2$. Следовательно, $KP : PP_1 = 1 : 2$ и $KR : XP_1 = KR : P_1R_1 = 1 : 2$. Значит, $XP_1 = P_1R_1$, и $XP_1 : XR_1 = 1 : 2$. Аналогично находится отношение $YP_1 : YQ_1$.

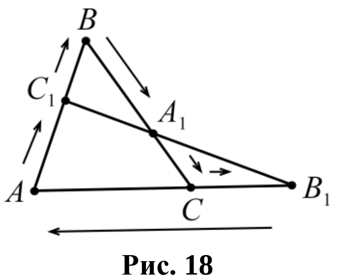


Рис. 18

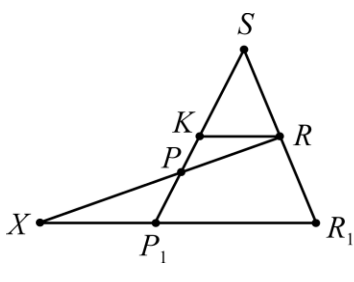


Рис. 19

6. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Напомним основные определения.

Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Две плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°. (Угол между плоскостями – это наименьшая из величин двугранных углов, образованных при их пересечении.)

Перечислим основные теоремы, которые используются при решении задач.

Теорема 4. (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 5. (теорема о трёх перпендикулярах). Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.

Теорема 6. (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Пример 9. В тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру CD, а ребро AD перпендикулярно ребру BC. Докажите, что

$$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2.$$

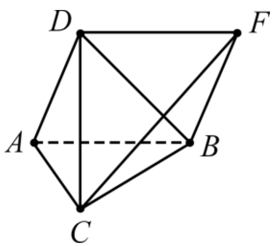


Рис. 20

□ Достроим Δ BAD до параллелограмма $BADF$ (рис. 20). Из перпендикулярности прямых AB и CD следует, что $\angle CDF = 90°$, т. е. $CF^2 = CD^2 + DF^2$. Аналогично, $CF^2 = CB^2 + BF^2$, следовательно, $CD^2 + DF^2 = CB^2 + BF^2$. Но $DF = AB$, а $BF = = AD$, поэтому $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$. ■

Пример 10. Рёбра AB и CD, AD и BC тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что рёбра AC и BD также перпендикулярны.

□ Опустим из точки D перпендикуляр DO на плоскость ABC (рис. 21). По теореме о трёх перпендикулярах из того, что $CD \perp AB$ следует, что $CO \perp AB$, т. е. точка O лежит на прямой, содержащей высоту CC_1 треугольника ABC. Аналогично, точка O лежит на прямой, содержащей высоту AA_1, и, значит, O – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC.

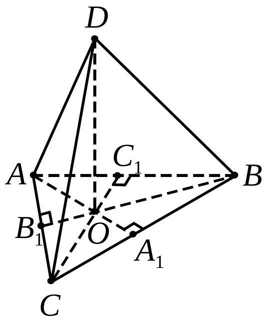


Рис. 21

Следовательно, $BO \perp AC$ и по теореме о трёх перпендикулярах, $BD \perp AC$ ■

Пример 11. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ имеют длину 2. Точки M и N – середины рёбер AS и AB соответственно. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой CN, и найти площадь этого сечения.

□ Обозначим секущую плоскость через α и предположим, что искомое сечение построено. Так как $\alpha \perp (CN)$, то прямая CN перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α, в частности линии пересечения плоскостей α и ABC. Кроме того, плоскость α должна содержать перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC (этот перпендикуляр параллелен высоте SO пирамиды). Действительно, если точка M_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC, а точка L – основание перпендику-

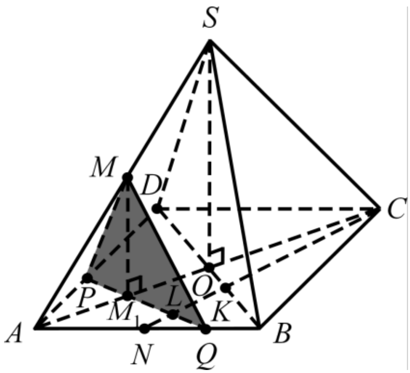


Рис. 22

ляра, опущенного из точки M_1 на прямую CN, то по теореме о трёх перпендикулярах $(ML)\perp(CN)$. А так как $(M_1L) \perp (CN)$, то $(MM_1L) \perp (CN)$. Но через точку M проходит единственная плоскость, перпендикулярная прямой CN, поэтому α и (MM_1L) – одна и та же плоскость.

Отсюда вытекает следующее построение (рис. 22). Сначала строим изображение центра основания пирамиды – точку O пересечения диагоналей AC и BD основания, затем строим отрезок SO – изображение высоты пирамиды. После этого через точку M проводим прямую, параллельную прямой SO, до пересечения с отрезком AC в точке M_1. Тем самым мы построим изображение перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC. Остается построить изображение перпендикуляра к прямой CN, проходящего через точку M_1. Пусть этот перпендикуляр пересекает прямую CN в точке L. Уточним положение точки L вычислением, обратившись к рис. 23. По теореме Пифагора $CN^2 = BC^2 + BN^2 = 4 + 1 = 5$, т. е. $CN = \sqrt{5}$.

Пусть $K = (CN) \cap (BD)$. Так как K – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $CK = \dfrac{2}{3}CN = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. Заметим, что M_1 – середина $[OA]$, поскольку M – середина $[AS]$, а$(MM_1) \parallel (SO)$. Следовательно, $CM_1 = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Теперь из подобия прямоугольных треугольников CLM_1 и COK получаем, что $CL = \dfrac{CM_1}{CK}\cdot OC = \dfrac{9\sqrt{5}}{10}$, т. е. $\dfrac{CL}{CN} = \dfrac{9}{10}$. Тем самым положение точки L определено. Для того, чтобы её построить, достаточно отложить на $[CN]$ от точки N отрезок NL длины $\dfrac{1}{10}CN$ (задача деления отрезка на равные части известна из планиметрии и решается с помощью теоремы Фалеса). Пусть теперь $(M_1L) \cap (AB) = Q$, $(M_1L) \cap (AD) = P$. Заметим, что $Q \in [AB]$, а $P \in [AD]$. Действительно, из подобия треугольников LNQ и BNC (рис. 23) следует, что

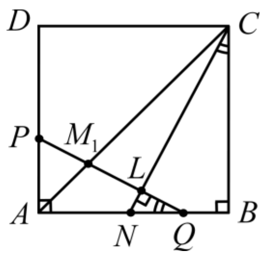


Рис. 23

$$NQ = \frac{LN\cdot CN}{NB} = \frac{\frac{1}{10}\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $NQ < NB$, значит, $Q \in [AB]$. Из подобия треугольников APQ и BNC следует, что

$$AP = \frac{AQ \cdot NB}{BC} = \frac{(AN + NQ) \cdot NB}{BC} = \ = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2} = \frac{3}{4},$$

поэтому $P \in [AD]$. Соединив точки P и Q с точкой M, получаем искомое сечение (рис. 22).

Действительно, по построению $(MM_1) \perp (ABC)$, а $(CN) \subset (ABC)$, следовательно $(MM_1) \perp (CN)$. Опять-таки по построению $(PQ) \perp (CN)$, следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(MPQ) \perp (CN)$.

Вычислим площадь сечения. Имеем

$$S_{MPQ} = \frac{1}{2} MM_1 \cdot PQ \ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} SO\right) \cdot PQ.$$

Длину высоты пирамиды находим из прямоугольного треугольника ASO: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 4 - 2 = 2$, т. е. $SO = \sqrt{2}$. Длину отрезка PQ находим из прямоугольного треугольника APQ: $PQ^2 = AP^2 + AQ^2 = \frac{9}{16} + \frac{9}{4} = \frac{45}{16}$, т. е. $PQ = \frac{3\sqrt{5}}{4}$. Итак, $S_{MPQ} = \frac{3\sqrt{10}}{16}$. ■

Пример 12. Доказать, что плоскость α сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящая через середины P, Q, R рёбер A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, перпендикулярна диагонали BD_1 и проходит через её середину.

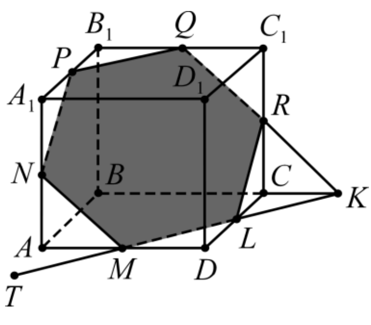


Рис. 24

□ Средняя линия PQ треугольника $A_1B_1C_1$ параллельна основанию A_1C_1, т. е. $A_1C_1 || \alpha$ (рис. 24). Аналогично, C_1D || RL, т. е. C_1D || α. Итак, плоскость α параллельна пересекающимся прямым A_1C_1 и C_1D плоскости A_1C_1D, поэтому $\alpha || (A_1C_1D)$. Отсюда следует, что $\alpha \perp BD_1$.

Пусть O – точка пересечения BD_1 с плоскостью α. Тогда $PO \perp BD_1$, т. е. PO – высота в равнобедренном треугольнике BPD_1, и, значит, PO – его медиана, а O – середина BD_1. ■

Контрольные вопросы

1(2). Даны две прямые, a и b. Выясните, являются ли сформулированные ниже условия необходимыми, достаточными или необходимыми и достаточными для того, чтобы a и b скрещивались:

а) a и b не имеют общих точек;

б) любая плоскость, проведённая через прямую a и точку, принадлежащую прямой b, пересекает b.

2(2).Каждая из двух прямых скрещивается с третьей прямой. Верно ли, что эти две прямые являются скрещивающимися?

3(2). Докажите, что если любая плоскость, пересекающая одну из двух данных прямых, пересекает и вторую, то эти две прямые параллельны.

4(2). Докажите, если три прямые в пространстве не проходят через одну точку и попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости.

5(3). Постройте изображение правильной четырёхугольной усечённой пирамиды.

6(2). Постройте изображение равнобедренной трапеции и её высоты.

7*(4). Сечение правильной четырёхугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Докажите, что боковые грани этой пирамиды правильные треугольники.

Указание. Пусть $ABCD$ – Данная пирамида, а $KLMNO$ – данное сечение $\left(K \in [AB], L \in [BC], M \in [SC], N \in [SD], Q \in [SA]\right)$. Спроектируйте пирамиду на плоскость, проходящую через точку S и середины рёбер AD и BC.

8(2). а) Через точку на ребре тетраэдра проведите плоскость α так, чтобы сечение тетраэдра было параллелограммом.

б) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью $\beta \parallel \alpha$ также является параллелограммом.

9(3). Скрещивающиеся рёбра тетраэдра имеют длины a и b. Сечение тетраэдра, параллельное этим рёбрам, – ромб. В каких отношениях плоскость сечения делит рёбра тетраэдра, которые она пересекает?

10* (4). Докажите, что периметр любого четырёхугольного сечения правильного тетраэдра с ребром длины 1 не меньше 2, но меньше 3.

Указание. Для доказательства неравенства $p \geq 2$ рассмотрите развёртку тетраэдра, для доказательства неравенства $p < 3$ покажите, что если параллельно перемещать плоскость сечения, то его периметр будет линейной функцией.

Задачи

1(3). На рёбрах DA, AB и BC тетраэдра $DABC$ взяты точки M, P, K соответственно, причём $DM : DA = 13 : 27, BP : BA = 3 : 5$, $CK : CB = 1 : 4$. Плоскость MPK пересекает ребро DC в точке T. Найдите отношение $CT : TD.$

2(3). На ребре A_1C_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка P так, что $A_1P : PC_1 = 3 : 7$. Точка M принадлежит диагонали AC_1 грани AA_1C_1C, причём $AM : AC_1 = 5 : 7$. Плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей грани ABB_1A_1 и через точки M и P, пересекает ребро A_1B_1 в точке K. Найдите $A_1K : KB_1$.

3(3). В основании усечённой пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. Известно, что $A_1B_1 : AB = 2 : 3$. На ребре AB взята точка K, на ребре $BC -$ точка M, причём $AK : KB = 3 : 2, BM : MC = 5 : 3$. Найдите, в каком отношении делит ребро CC_1 плоскость A_1KM.

4(3). Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна 1, а высота пирамиды равна $\sqrt{2}$. На рёбрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причём $AK : KP = 1 : 3$, $CM = PM$. Найдите, в каком отношении плоскость DKM делит ребро $PB.$

5(4). Точки T и $P -$ соответственно середины рёбер B_1C_1 и CD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K принадлежит ребру BC, причём $CK : KB = 1 : 3$. Найдите, в каких отношениях плоскость, проходящая через середину отрезка BT параллельно прямым PK и DC_1, делит отрезки AC_1, B_1D, A_1C.

6(6). В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ на диагонали основания AD взяты три точки, делящие её на четыре равные части. Через эти точки проведены сечения, параллельные плоскости SAB. Найдите отношение площадей этих сечений.

7(7). Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. а)(3) Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину D_1, середину ребра BC и параллельной прямой A_1C_1.

б)*(4) Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину D_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна.

8(5). Высота правильной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 3, угол между соседними боковыми рёбрами равен $\arccos\frac{9}{10}$. Точки E, F, K выбраны соответственно на рёбрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}=\frac{CK}{SC}=\frac{1}{3}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью EFK.

9(4). Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ − квадрат $ABCD, AB=2, AA_1=4$. Через середины E и F рёбер AD и DC проведено сечение, параллельное диагонали DB_1. Построить сечение и найти его площадь.

10(3). На ребре BD тетраэдра $ABCD$ взята такая точка E, что $DE:BE=3:5$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки A и E параллельно медиане BM треугольника ABC, делит ребро CD.

11*(7). Через точку, взятую внутри треугольной пирамиды, параллельно её рёбрам проведены отрезки с концами на гранях пирамиды. Докажите, что сумма шести отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им рёбер не зависит от выбора первоначальной точки. Чему равна эта сумма?

Указание. Проведите через два из данных отрезков, параллельных двум скрещивающимся рёбрам тетраэдра, плоскость и докажите, что сечение тетраэдра этой плоскостью будет параллелограммом.