**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей**
**«Заочная физико-техническая школа**
**Московского физико-технического института**
**(государственного университета)»**

# МАТЕМАТИКА

## Тригонометрические уравнения, системы, неравенства

Задание №3 для 11-х классов

(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2013

*Составитель*: Ф.О. Сергеев, преподаватель ФЗФТШ при МФТИ.

Математика: задание №3 для 11-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2013, 26 с.

**Дата отправления заданий по физике и математике – 04 декабря 2013 г.**

Составитель:
**Сергеев Фёдор Олегович**
Подписано в печать 30.09.13. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,62.
Уч.-изд. л. 1,44. Тираж 700. Заказ №16-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)
ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700,
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

***e-mail: zftsh@mail.mipt.ru***

**Наш сайт: [www.school.mipt.ru](http://www.school.mipt.ru)**

# 1. Решение тригонометрических уравнений

## 1.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими называются тригонометрические уравнения, в которых тригонометрическая функция в первой степени с единичным коэффициентом приравнивается действительному числу. Такие уравнения непосредственно приводят к решению (если оно есть). Напомним формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

$$\cos x = a;\, x = \pm\arccos a + 2\pi n, |a| \le 1;$$
$$\sin x = a;\, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, |a| \le 1; \quad n \in Z.$$
$$\operatorname{tg} x = a;\, x = \operatorname{arctg} a + \pi n, a \in \Re;$$
$$\operatorname{ctg} x = a;\, x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, a \in \Re.$$

Здесь $n \in Z$, а область значений числа $a$ определяется свойствами тригонометрических функций (в дальнейшем, если не сказано обратного, будем считать, что $k,\ l,\ m,\ n \in Z$). Целочисленные параметры в различных множествах решений одного уравнения можно обозначать как разными, так и одной буквой. В тех же случаях, когда элементы множеств сравниваются между собой, а также при решении тригонометрических систем для обозначения целочисленных параметров следует использовать различные буквы.

**Примечание 1.** Для корней уравнения $\sin x = a\ \left(|a| \le 1\right)$ также может использоваться формула $x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n;\, n \in Z, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n.\, n \in Z. \end{array}\right.$

**Примечание 2.** Для случаев $a = 0, \pm 1$ решения уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$ имеют более простой вид, который полезно запомнить (или, что полезнее, понять их смысл – например, из тригонометрического круга).

| | $a=0$ | $a=1$ | $a=-1$ |
|---|---|---|---|
| $\sin x = a$ | $x=\pi n, n\in Z$ | $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ | $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ |
| $\cos x = a$ | $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ | $x=2\pi n$ | $x=\pi+2\pi n$ |

**Примечание 3.** Не может быть зачтено решение задачи, если при решении простейшего уравнения, например, $\sin x = \dfrac{1}{3}$, в качестве решения указывается значение $x=(-1)^n \arcsin\dfrac{1}{3}+\pi m,$ т. к. $n$ и $m$ обозначают различные целые числа, а приведённая формула включает в себя также решения уравнения $\sin x = -\dfrac{1}{3}$.

**Примечание 4.** Также не может быть зачтено решение уравнения, если в ответе присутствует такая запись, как, например:

$$x=(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{7}}{2}+\pi n\text{, т. к. } \frac{\sqrt{7}}{2}>1.$$

Все тригонометрические уравнения и системы с помощью преобразований сводятся, как правило, к решению одного или нескольких простейших уравнений.

**Пример 1.** Решить уравнения

1a) $2\cos(x^3+1)=1;$

**Решение.**

$$\cos(x^3+1)=\frac{1}{2}\Rightarrow x^3+1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

**Ответ:** $x=\sqrt[3]{\pm\dfrac{\pi}{3}-1+2\pi n}.$

1b) $\cos 2x+\sin x=1;$

**Решение.** Используем формулу косинуса двойного угла:

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x.$$

$$\cos 2x + \sin x = 1;$$
$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 1;$$
$$\sin x(1 - 2\sin x) = 0;$$
$$x = \pi n, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

**Ответ.** $x = \pi n, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.\ n \in Z.$

1c) $\sin 2x + \sin x = 0.$

**Решение.**

$$\sin 2x + \sin x = 0;$$
$$\sin x(2\cos x + 1) = 0;$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

**Ответ.** $x = \pi n; x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.\ n \in Z.$

**Примечание 5.** Для решения тригонометрических уравнений необходимо хорошо знать основные тригонометрические формулы. Например, формула $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ должна держаться в памяти и в виде $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, и в виде $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Также полезно помнить, что $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, а

$$1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2,\ \ 1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2.$$

## 1.2. Однородные тригонометрические уравнения первого порядка

Однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$ называются уравнения вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots +$$
$$+ a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0.$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – действительные числа. Сумма степеней синуса и косинуса в каждом слагаемом левой части уравнения одинакова и равна числу $n$, называемому показателем *однородности.*

Если $a_0 = 0$, то, очевидно, корни уравнения $\cos x = 0$ являются одними из корней исходного уравнения. Далее, полагая $\cos x \neq 0$ и разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим снова однородное уравнение (с показателем однородности $n-1$).

Если же $a_0 \neq 0$, то, очевидно, $\cos x \neq 0$ и обе части однородного уравнения можно разделить на $\cos^n x$, в результате чего получим уравнение:

$$a_0 \mathrm{tg}^n x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} x + a_2 \mathrm{tg}^{n-2} x + ... + a_{n-1} \mathrm{tg} x + a_n = 0,$$

которое простой заменой $t = tgx$ сводится к стандартному алгебраическому уравнению $a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + ... + a_{n-1} t + a_n = 0$

В случае $n = 1$ однородное уравнение первого порядка $a\sin x + b\cos x = 0$ решается точно так же – сведением к $\mathrm{tg} x : \mathrm{tg} x = -\dfrac{b}{a}$.

**Пример 2.** Решить уравнение $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0.$
**Решение.**

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0;$$

$$\sin x = \sqrt{3}\cos x;$$

$$tgx = \sqrt{3};$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

**Ответ:** $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n.\ n \in Z.$

### 1.3. Однородные уравнения второго и высших порядков

Если показатель однородности $n \geq 2$, решение не меняется, но имеет свои особенности, разберем их на примерах.

**Пример 3.** Решить уравнение $3\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x = 0.$

**Решение.** Равносильное исходному уравнение $tg^2 x - 2tgx - 3 = 0$ дает два действительных решения: $tgx = -1, tgx = 3.$

**Ответ.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \text{arctg}3 + \pi m.\ m \in Z.$

Уравнения, не являющиеся на первый взгляд однородными и содержащие свободные члены (числа), могут быть сведены к однородным с помощью использования тригонометрической единицы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

**Пример 4.** Решить уравнение $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3.$

**Решение.**

$$4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3;$$

$$4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right);$$

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0;$$

$$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0;$$

$$tgx = -1; tgx = 3.$$

**Ответ.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x = \text{arctg}3 + \pi m.\ n \in Z.$

Уравнения, левая часть которых есть однородное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$ с порядком однородности $n = 3$, а правая часть есть $d \cdot \sin x$ (или $d \cdot \cos x$) сводятся к однородным третьего порядка таким же способом.

**Пример 5.** Решить уравнение

$$2\sin^3 x - 3\cos^3 x + \sin x\cos^2 x = 3\cos x.$$

**Решение.**

$$2\sin^3 x - 3\cos^3 x + \sin x\cos^2 x = 3\cos x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right);$$

$$2\sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x - 6\cos^3 x = 0;$$

$$2\text{tg}^3 x - 3\text{tg}^2 x + \text{tg}x - 6 = 0.$$

Произведем замену $t = \text{tg}x$. Тогда уравнение примет вид:

$$2t^3 - 3t^2 + t - 6 = 0.$$

Как известно из курса алгебры, если уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то его следует искать среди дробей вида $\frac{p}{q}$, где $p$ – делитель свободного члена, а $q$ – делитель старшего коэффициента. Находим один такой корень $t=2$. Делением многочлена, стоящего в левой части уравнения на $(t-2)$ («уголком») приходим к следующему равносильному уравнению:

$$(t-2)(2t^2+t+3)=0.$$

Поскольку дискриминант второго множителя отрицателен, то $t=2$ – единственный корень исходного уравнения. Возвращаясь, к $tgx$, получаем ответ.

**Ответ.** $arctg2+\pi n.\ n\in Z.$

**Примечание 6.** Способ нахождения рациональных корней уравнений высших степеней, описанный в последней задаче, является стандартным для курса алгебры, следует иметь его ввиду в том числе и при решении задач этого задания. Также обращаем внимание на способ деления многочленов друг на друга «уголком» – в случае, если этот способ малознаком читателю, следует изучить его отдельно.

### 1.4. Решение уравнений вида $\sin kx\pm\cos mx=0.$

Уравнения вида $\sin kx\pm\cos mx=0$ ($k\neq m$, иначе уравнение становится однородным первого порядка) решаются сведением с помощью формул приведения к одной тригонометрической функции, т. е., к виду $\cos\left(\frac{\pi}{2}-kx\right)\pm\cos mx=0$ или $\sin kx\pm\sin\left(\frac{\pi}{2}-mx\right)=0$ и применением формул, преобразующих сумму (разность) косинусов (синусов) в произведение.

**Пример 6.** Решить уравнение $\sin 3x+\cos x=0.$

**Решение.** По формуле приведения $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, уравнение принимает вид:

$$\sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0;$$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0;\\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n;\\ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}.\end{array}\right.$$

**Ответ:** $-\frac{\pi}{4}+\pi n; x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}.\ n\in Z.$

### 1.5. Решение уравнений вида $F(\sin x\pm\cos x;\sin x\cdot\cos x)=0.$

Уравнения вида $F(\sin x\pm\cos x;\sin x\cdot\cos x)=0$ сводятся к алгебраическим заменой $t=\sin x\pm\cos x$**.** Из тождества $(\sin x\pm\cos x)^2=1\pm 2\sin x\cos x$ получаем $\sin x\cos x=\pm\frac{t^2-1}{2}$, тогда уравнение записывается в виде $F\left(t;\pm\frac{t^2-1}{2}\right)=0$. Следует иметь в виду, что $\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$, поэтому допустимые значения $t$ таковы, что $|t|\le\sqrt{2}$.

**Пример 7.** Решить уравнение $\sin 2x+3\sin x+3\cos x+3=0.$

**Решение.** Заменой $t=\cos x+\sin x$ (тогда $\sin 2x=t^2-1$) уравнение приводится к виду $t^2+3t+2=0,$ его корни $t_1=-2, t_2=-1.$

Т. к. $|t_1|>\sqrt{2},$ то $t=-1$ – единственный корень.

$$\cos x + \sin x = -1;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \\ -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m. \end{array}\right. \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ -\pi + 2\pi m. \end{array}\right.$$

**Ответ:** $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; x = -\pi + 2\pi m.\ n \in Z.$

**Примечание 7.** Часто, используя замену, учащиеся забывают, что требовалось найти $x$, а не $t$, и не указывают правильного ответа. Такая небольшая, казалось бы, ошибка на вступительных экзаменах может свести на нет всё решение.

### 1.6. Метод разложения на множители

Метод разложения на множители широко известен из других областей математики и фактически состоит в том, что громоздкое уравнение с помощью тождественных преобразований сводится к совокупности нескольких более простых уравнений.

**Пример 8.** Решить уравнение $\sin^3 2x + \cos^3 2x = \cos 4x.$

**Решение.** Применим формулу для суммы кубов, известную из курса алгебры:

$$\sin^3 2x + \cos^3 2x = \cos 4x;$$

$$(\sin 2x + \cos 2x)(\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x,$$

$$(\sin 2x + \cos 2x)[1 - \sin 2x \cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x)] = 0.$$

В итоге исходное уравнение распадается на два:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x + \cos 2x = 0; \\ 1 - \sin 2x \cos 2x - \cos 2x + \sin 2x = 0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет решение $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n$. Второе заменой $\sin 2x-\cos 2x=t$ (при этом $\cos 2x\sin 2x=\frac{1-t^2}{2}$) сводится к уравнению:

$$t^2+2t+1=0;$$
$$t=-1.$$

Отсюда $\sin 2x-\cos 2x=-1;$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{4}+2\pi m;\\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi k.\end{array}\right.\Rightarrow 2x=\left[\begin{array}{l}2\pi m;\\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k.\end{array}\right.\Rightarrow x=\left[\begin{array}{l}\pi m;\\ -\frac{\pi}{4}+\pi k.\end{array}\right.$$

**Ответ.** $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n; x=\pi m; x=-\frac{\pi}{4}+\pi k.\ \ k\in Z.$

**Пример 9.** Решить уравнение $\cos 7x\cos 2x=\sin 6x\sin x.$

**Решение.** Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, запишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{2}(\cos 9x+\cos 5x)=\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos 7x).$$

Отсюда получаем $\cos 9x+\cos 7x=0$ и, применяя формулу суммы косинусов, приходим к уравнению $\cos 8x\cos x=0$ и, далее, к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 8x=0;\\ \cos x=0.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8};\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi m.\end{array}\right.$$

**Ответ.** $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}; x=\frac{\pi}{2}+\pi m.\ n\in Z.$

## 1.7. Метод введения дополнительного аргумента

Метод введения дополнительного аргумента уже использовался нами в виде $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Также читатель мог встретить его в виде $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ или

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Теперь же разберём общий случай.
Рассмотрим решение уравнений вида

$$a\cos x+b\sin x=c,$$

где $a,b,c-$действительные числа, причём $c\neq 0$ (иначе уравнение становится однородным и решается проще – см. п. 1.2) и $a^2+b^2\neq 0$.

Разделив обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получаем:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (1)$$

Т. к. $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то существуют такие углы $\alpha$ и $\beta$, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha \quad (2)$$

или

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta. \quad (3)$$

Выберем некоторые значения $\alpha$ и $\beta$, удовлетворяющие системам (2) и (3). Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\sin\alpha\cos x+\sin x\cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или $\cos\beta\cdot\cos x+\sin\beta\cdot\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos(x-\beta)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Решение этих уравнений существует лишь при условии $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1$.

Если в решении используются обозначения $\alpha$ или $\beta$, в ответе нужно *не забыть* указать выбранное значение $\alpha$ или $\beta$ с учетом четверти, в которой лежат эти углы (если $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, то $\alpha$ может лежать как в I, так и в IV четвертях, при этом $\sin\alpha$ имеет разные знаки).

**Пример 10.** Решить уравнение $12\sin x+5\cos x=5.$

**Решение.** Для того, чтобы определить, какой дополнительный аргумент вводить, сложим квадраты коэффициентов при синусе и косинусе. Поскольку $12^2+5^2=13^2$, запишем уравнение в виде:

$$\frac{12}{13}\sin x+\frac{5}{13}\cos x=\frac{5}{13}$$

и введём вспомогательный угол $\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{12}{13},\sin\alpha=\frac{5}{13}.$$

Угол $\alpha$, замечаем, лежит в первой четверти тригонометрического круга $(\sin\alpha>0,\cos\alpha>0)$. Приходим к уравнению:

$$\sin(x+\arcsin\frac{5}{13})=\frac{5}{13};$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n; \\ x+\arcsin\frac{5}{13}=\pi-\arcsin\frac{5}{13}+2\pi m. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n; \\ x=\pi-2\arcsin\frac{5}{13}+2\pi m. \end{array}\right.$$

**Ответ.** $2\pi n;\ \pi-2\arcsin\frac{5}{13}+2\pi m.\ \ n\in Z.$

**Пример 11.** Решить уравнение $30\sin17x-16\cos17x=17\sqrt{3}.$

**Решение.** Выделим общий множитель 2 для упрощения счета:

$$30\sin17x-16\cos17x=17\sqrt{3};$$

$$15\sin17x-8\cos17x=\frac{17\sqrt{3}}{2}.$$

Складываем квадраты коэффициентов: $15^2+8^2=17^2$ и преобразуем уравнение.

$$17\left(\frac{15}{17}\sin 17x-\frac{8}{17}\cos 17x\right)=\frac{17\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(17x-\arccos\frac{15}{17}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{51}+\frac{1}{17}\arccos\frac{15}{17}+\frac{\pi n}{17}.$$

**Ответ.** $(-1)^n\frac{\pi}{51}+\frac{1}{17}\arccos\frac{15}{17}+\frac{\pi n}{17}.\ n\in Z.$

**Примечание 8.** При поиске возможных вариантов решения задачи бывает важным заметить возможность удобного (с рациональными числами) введения дополнительного аргумента для преобразования выражения $a\cos x+b\sin x$. Для этого полезно знать пары целых чисел, суммы квадратов которых дают квадрат третьего целого числа. Приведем некоторые из них.

| $\sqrt{a^2+b^2}$ | | $a$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| $b$ | 3 | 5 | | | | | | | | | | |
| | 8 | | | 10 | | | | | | | | |
| | 12 | | 13 | | | | 15 | | | | | |
| | 15 | | | | | 17 | | | | | | |
| | 16 | | | | | | | | 20 | | | |
| | 20 | | | | | | | | | 25 | | 29 |
| | 24 | | | | 25 | | | 26 | | | 30 | |

### 1.8 Метод оценки

Случается, что предварительная оценка левой и правой частей уравнения помогает сразу решить уравнение или показать, что решений нет.

**Пример 12.** Решить уравнение $12\sin x+5\cos x=18.$

**Решение.** Так как $|\sin x|\le 1, |\cos x|\le 1$, то

$$12\sin x+5\cos x\le 17<18,$$

уравнение не имеет решений.

**Ответ:** $\varnothing$.

**Пример 13.** Решить уравнение $\sin^2 6x+\cos^2 x=0.$

**Решение.** Так как оба слагаемых неотрицательны, то равенство достигается только в случае выполнения системы:

$$\begin{cases}\sin 6x=0;\\ \cos x=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi n}{6};\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m.\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi m.$$

**Ответ:** $\dfrac{\pi}{2}+\pi m.\ m\in Z.$

**Пример 14.** Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^6 x=1.$

**Решение.** Учитывая то, что $|\sin x|\le 1, |\cos x|\le 1$, получаем возможные случаи, удовлетворяющие уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=\pm 1.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=\pm 1,\\ \cos x=0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{2}$$

Если же оба слагаемых одновременно меньше 1, т. е. выполняется система $\begin{cases}|\sin x|<1,\\ |\cos x|<1,\end{cases}$, то уравнение не имеет решений. Докажем это.

Т. к. $|\sin x|<1$, то $\sin^4 x<\sin^2 x$ и т. к. $|\cos x|<1$, то $\cos^6 x<\cos^2 x$. Таким образом, $\sin^4 x+\cos^6 x<\sin^2 x+\cos^2 x=1,$ т. е. исходное равенство заведомо неверно.

**Ответ**. $\dfrac{\pi k}{2}.\ k\in Z.$

**Пример 15.** Доказать, что уравнение $\sin 4x\sin 3x=1$ не имеет решений**.**

**Доказательство.**

$$\sin 4x \sin 3x = 1;$$

$$\cos x - \cos 7x = 2;$$

$$\begin{cases} \cos x = 1; \\ \cos 7x = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \\ 7x = \pi + 2\pi m. \end{cases} \Rightarrow 7x = 14\pi n = \pi + 2\pi m.$$

Но $14n \neq 1 + 2m \mid n, m \in \mathrm{Z} \Rightarrow x \in \varnothing$, что и требовалось доказать.

**Ответ.** $\varnothing$.

## 2. Уравнения с параметрами

Если стоит задача решить уравнение с параметром, то нужно определить, при каких значениях параметра существуют решения, и для <u>всех</u> таких значений найти <u>все</u> решения уравнения. Если хотя бы одно значение параметра не исследовано, решение задачи не является полным.

**Пример 16.** Решить уравнение $a\cos 2x + \sin x + a + 1 = 0$ при всех значениях параметра $a$.

**Решение.**

$$a - 2a\sin^2 x + \sin x + a + 1 = 0;$$

$$2a\sin^2 x - \sin x - 2a - 1 = 0;$$

Произведем замену: $s = \sin x, |s| \leq 1.$ Уравнение принимает вид:

$$2as^2 - s - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow 2a(s-1)(s+1) - (s+1) = (s+1)\big(2a(s-1) - 1\big) = 0.$$

Теперь нужно не просто решить квадратное уравнение, а найти те решения, для которых $|s| \leq 1$.

Если $a = 0$, то $s = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n -$ одно решение.

Если $a \neq 0$, то $(s+1)\big(2a(s-1) - 1\big) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} s_1 = -1, \\ s_2 = 1 + \dfrac{1}{2a}. \end{array}\right.$ Проверим условие $|s_2| \leq 1$:

$$-1 \leq 1 + \frac{1}{2a} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq \frac{1}{a} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(1 + \frac{1}{2a}\right) + \pi n.$$

Получаем, что решение $s=-1$ существует при всех $a$, а при $a\le -\dfrac{1}{4}$ существует два решения.

**Ответ.** При $a\le -\dfrac{1}{4}$ два решения $x=(-1)^n\arcsin\left(1+\dfrac{1}{2a}\right)+\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\, n\in Z$. При $a>-\dfrac{1}{4}$ одно решение $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.\ n\in Z$.

Часто в задачах с параметрами требуется найти такие значения параметра, при которых корни уравнения обладают определенными свойствами – принадлежат некоторому интервалу, принимают определенные значения и т.д. В примере 16 таким вопросом мог бы быть, например: «найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение имеет ровно 2 решения».

## 3. Иррациональные тригонометрические уравнения

**Пример 17.** Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{4}-\cos x}=\sin x.$

**Решение.** Уравнение $\sqrt{A(x)}=B(x)$, как известно из курса алгебры, равносильно системе $\begin{cases} A(x)=B^2(x), \\ B(x)\ge 0. \end{cases}$, поэтому из корней, которые мы получаем после возведения обеих частей в квадрат, необходимо отобрать те, для которых $\sin x\ge 0$.

$$\sqrt{\frac{1}{4}-\cos x}=\sin x;$$
$$\frac{1}{4}-\cos x=1-\cos^2 x;$$
$$4\cos^2 x-4\cos x-3=0;$$
$$\cos x=-\frac{1}{2}.$$

Произведем отбор корней. Отметив полученные корни на тригонометрическом круге, увидим, что неравенству $\sin x \geq 0$ удовлетворяет решение $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

**Ответ:** $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.\ n \in Z.$

## 4. Системы тригонометрических уравнений

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением нескольких типов систем тригонометрических уравнений с двумя переменными $x$ и $y$, опишем возможные способы их решения на примерах.

### 4.1. Простейшие и сводящиеся к простейшим системы.

**Пример 18.** Решить систему:

$$\begin{cases} tg(x+y) = 1; \\ 4\cos y \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$$

**Решение.**

$$\begin{cases} tg(x+y) = 1; \\ 4\cos y \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n - y; \\ 4\cos y \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n - y; \\ 4\cos y \cos\left(\frac{\pi}{2} - y + 2\pi n\right) = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi m - y; \\ 4\cos y \cos\left(\frac{\pi}{2} - y + \pi + 2\pi m\right) = 1. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n - y; \\ 4\cos y \sin y = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m - y; \\ -4\cos y \sin y = 1. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n-y; \\ \sin 2y=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi m-y; \\ \sin 2y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n-y; \\ y=(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi m-y; \\ y=(-1)^{l+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi l}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Далее можно рассмотреть 4 возможных случая для каждой системы ($k=1+4p;\ 2+4p;\ 3+4p;\ 4p \mid p\in \mathrm{Z}$ и $l=1+4q;\ 2+4q;\ 3+4q;\ 4q \mid q\in \mathrm{Z}$), но мы ограничимся компактным видом.

**Ответ.**

$$\left(\frac{\pi}{4}-(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{\pi k}{2}+2\pi n; (-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right);$$

$$\left(\frac{5\pi}{4}+(-1)^l\frac{\pi}{12}-\frac{\pi l}{2}+2\pi m; (-1)^{l+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi l}{2}\right).$$

### 4.2. Сведение тригонометрической системы к алгебраической

**Пример 19**. Решить систему: $\begin{cases} \mathrm{tg} x=\dfrac{\cos x-\cos y}{1-\sin x}, \\ 2\cos y\sin 2x=1. \end{cases}$

**Решение.** ОДЗ: $(1-\sin x)\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin x\neq 1$. Преобразуем первое уравнение (выполнение условия ОДЗ проверим в конце решения):

$$\begin{cases} \sin x(1-\sin x)=(\cos x-\cos y)\cos x, \\ 2\cos y\sin 2x=1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x+\cos x\cos y=\cos^2 x+\sin^2 x=1, \\ 4\cos y\cos x\sin x=1. \end{cases}$$

делаем замену $u=\sin x, \upsilon=\cos x\cos y$ и получаем алгебраическую систему:

$$\begin{cases} u+\upsilon=1, \\ 4u\upsilon=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \upsilon=1-u, \\ 4u^2-4u+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \upsilon=\dfrac{1}{2}, \\ u=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Возвращаемся к $x$ (возникающие решения удовлетворяют ОДЗ):

$$\begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

**Ответ.**

$$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2\pi m\right); \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \pi\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2\pi m\right).$$

**Примечание 9.** Обратите внимание, что в примере 19 на последнем этапе указано, казалось бы, избыточное условие: $\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Это сделано для того, чтобы определить знак $\cos y$, обозначив связь этой функции с $\cos x$ (с помощью символа $\pm$).

### 4.3 Разложение одного из уравнений системы на множители

**Пример 20.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 7x\cos(x+y)=\sin 6x\sin y, \\ \sin 2y+\cos x=0. \end{cases}$$

**Решение.** Применяем метод, разобранный в примере 9:

$$\begin{cases}\cos 7x\cos(x+y)=\sin 6x\sin y,\\ \sin 2y+\cos x=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(8x+y)+\cos(6x-y)=\cos(6x-y)-\cos(6x+y),\\ \sin 2y+\cos x=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(8x+y)+\cos(6x+y)=0,\\ \sin 2y+\cos x=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(7x+y)\cos x=0,\\ \sin 2y+\cos x=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos(7x+y)=0,\\ \sin 2y+\cos x=0.\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0,\\ \sin 2y+\cos x=0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2y=\pi-14x+2\pi n,\\ \sin 2y+\cos x=0.\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0,\\ \sin 2y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим второе уравнение первой системы отдельно:

$$\sin(\pi-14x+2\pi n)+\cos x=0;$$

$$\sin 14x+\cos x=0;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-14x\right)+\cos x=0;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{13}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{15}{2}x\right)=0;$$

$$x_1=-\frac{\pi}{26}+\frac{2}{13}\pi m;\ x_2=-\frac{\pi}{30}+\frac{2}{15}\pi m.$$

Возвращаемся к первой системе:

$$y_1=\frac{10}{13}\pi+\pi\left(n-\frac{14}{13}m\right);\ y_2=\frac{11}{15}\pi+\pi\left(n-\frac{14}{15}m\right).$$

Учитывая результаты второй системы, получаем ответ.

**Ответ.**

$$\left(-\frac{\pi}{26}+\frac{2}{13}\pi m; \frac{10}{13}\pi+\pi\left(n-\frac{14}{13}m\right)\right);$$

$$\left(-\frac{\pi}{30}+\frac{2}{15}\pi m; \frac{11}{15}\pi+\pi\left(n-\frac{14}{15}m\right)\right);$$

$$\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi n}{2}\right).$$

### 4.4 Решение системы тригонометрических уравнений методом подстановки

**Пример 21.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x=\mathrm{ctg}y\sqrt{8\mathrm{ctg}x}, \\ \sin^2 y\left(\mathrm{tg}^2 x-2\mathrm{tg}x+4\right)-2\mathrm{tg}^2 y=0. \end{cases}$$

**Решение.** Определим ОДЗ:

$$\begin{cases} \cos x\sin x>0; \\ \sin y\cos y\neq 0. \end{cases}$$

Далее, из первого уравнения выразим $tgy$ и подставим во второе. При этом в силу условий ОДЗ, делим обе части второго уравнения на $\sin^2 y$ без дополнительных ограничений.

$$\begin{cases} \mathrm{tg}y=\dfrac{\sqrt{8\mathrm{ctg}x}}{\mathrm{tg}x}, \\ \mathrm{tg}^2 x-2\mathrm{tg}x+4=\dfrac{2}{\cos^2 y}=2\left(\mathrm{tg}^2 y+1\right). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}y=\dfrac{\sqrt{8\mathrm{ctg}x}}{\mathrm{tg}x}, \\ \mathrm{tg}^2 x-2\mathrm{tg}x+4=2\left(\dfrac{8}{\mathrm{tg}^3 x}+1\right). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}y=\dfrac{\sqrt{8\mathrm{ctg}x}}{\mathrm{tg}x}, \\ \mathrm{tg}^2 x-2\mathrm{tg}x+4=2\dfrac{8+\mathrm{tg}^3 x}{\mathrm{tg}^3 x}. \end{cases}$$

Используем формулу для суммы кубов и раскладываем второе уравнение на множители.

$$\begin{cases} \mathrm{tg}y = \dfrac{\sqrt{8\mathrm{ctg}x}}{\mathrm{tg}x}, \\ \left(\mathrm{tg}^2x - 2\mathrm{tg}x + 4\right)\left(1 - 2\dfrac{\mathrm{tg}x + 2}{\mathrm{tg}^3x}\right) = 0. \end{cases}$$

Замечаем, что дискриминант квадратного трехчлена в первой скобке отрицателен, и получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}y = \dfrac{\sqrt{8\mathrm{ctg}x}}{\mathrm{tg}x}, \\ \mathrm{tg}^3x - 2\mathrm{tg}x - 4 = 0. \end{cases}$$

Решаем второе уравнение аналогично примеру 5.

$$\begin{cases} \mathrm{tg}y = \dfrac{\sqrt{8\mathrm{ctg}x}}{\mathrm{tg}x}, \\ \mathrm{tg}^3x - 2\mathrm{tg}x - 4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}y = \dfrac{\sqrt{8\mathrm{ctg}x}}{\mathrm{tg}x}, \\ \left(\mathrm{tg}x - 2\right)\left(\mathrm{tg}^2x + 2\mathrm{tg}x + 2\right) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}y = 1, \\ \mathrm{tg}x = 2. \end{cases}$$

Убеждаемся, что ОДЗ не накладывает ограничений на решение, получаем ответ.

**Ответ.** $\left(\mathrm{arctg}2 + \pi n;\ \dfrac{\pi}{4} + \pi m\right)$.

## 5. Тригонометрические неравенства

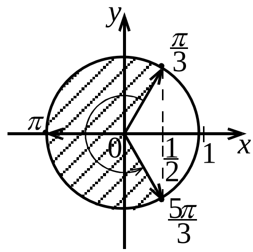
При решении тригонометрических неравенств используются свойства тригонометрических функций, в первую очередь, свойства монотонности и периодичности.

Функции синуса и косинуса имеют период $2\pi$, поэтому неравенства относительно синуса и косинуса достаточно решить на каком-либо отрезке длины $2\pi$ (не обязательно начинающемся от начала координат, отрезок выбирается из удобства – так, чтобы решением неравенства являлся 1 промежуток, а не объединение нескольких). Затем следует продлить полученное решение на бесконечность, прибавив числа вида $2\pi n$.

В случае неравенств относительно функций тангенса и котангенса, решение следует продлевать, соответственно, с периодом $\pi$.

**Пример 22.** Решить неравенство $\cos x < \frac{1}{2}$.

**Решение**.




Это неравенство удобно решать на тригонометрическом круге.

Видно, что $\cos x < \frac{1}{2}$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$. Учитывая переодичность, получаем, что $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

**Ответ**. $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

**Пример 23.** Решить неравенство: $\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}$.

**Решение**. Определим ОДЗ: $\cos x \ge \frac{1}{2}$.

Правая часть неравенства неотрицательна, поэтому возведём обе части в квадрат

$$\cos x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{4};$$

$$\cos x \le \frac{3}{4}.$$

С учётом ОДЗ получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \cos x \ge \frac{1}{2}; \\ \cos x \le \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решая неравенства на тригонометрическом круге, получаем, что

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right] \; n \in Z.$$

**Ответ**.

$$\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\arccos\frac{3}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\arccos\frac{3}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\ n\in Z$$

При решении более сложных неравенств необходимо с помощью тех же преобразований, что применялись при решении уравнений (разложение на множители, замена переменной и т. д.), свести неравенство к простейшему или совокупности простейших и таким образом решить его.

### Контрольные вопросы

#### Решить уравнения 1–8

**1(2).** $6\cos x+2\cos 3x=1.$

**2(2).** $\sin x-2\cos x=0.$

**3(3).** $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0.$

**4(3).** $\sin x+\cos 3x=0.$

**5(3).** $5+5\sin x-2\sin 2x-5\cos x=0.$

**6(4).** $\sin 5x\sin 2x=\cos 7x\cos 4x.$

**7(4).** $3\sin x+4\cos x=4.$

**8(3).** $20\sin x+21\cos x=30.$

**9(5).** Решить уравнение $\sqrt{3a^2-\sin^2 x}=a$ при всех значениях $a$.

**10(4).** Решить уравнение

$$\sqrt{1+4\sin x}=-2\cos x.$$

**11(5).** Решить систему

$$\begin{cases}\cos 5x\cos(2x+3y)=\sin 3y\sin 3x;\\ \cos(5x-3y)=0.\end{cases}$$

**12(4).** Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3}{4}-\cos^2 x}<\frac{1}{2}.$$

## Задачи

### Решить уравнения 1–7

**1(3).** $5\sin^2 x + 5\sin x\cos x = 2.$

**2(4).** $4\dfrac{tgx}{\cos x} = 17\sin x + 6\cos x.$

**3(5).** $27tgx + 4 = 19\sin x\cos x - 17\sin^2 x.$

**4(3).** $2 - \cos 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = 0.$

**5(5).** $(15\cos x + 8\sin x)(32\sin x - 17\cos 2x - 14) = 655.$

**6(4).** $ctgx = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$

**7(4).** $\sqrt{3\sin x - \cos 2x - 8} = 3\cos^2 2x - 1.$

**8(5).** Решить уравнение $a\cos 2x + 3\cos x + 6 - 7a = 0$ при всех значениях $a$.

**9(4).** Решить систему $\begin{cases}\cos(3x+y) + \cos(x+y) = -2;\\ 2\cos(2x+y) + \cos x = 1.\end{cases}$

**10(5).** Решить систему $\begin{cases}\cos(6x+y)\cos y + \sin 3x\sin(3x+2y) = 0;\\ \dfrac{\sin y}{\cos 3x} - \dfrac{1}{\sin y\cos 3x} - 3 = 0.\end{cases}$

**11(3).** Решить неравенство

$$\left(\sin^2 x + \sin x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos 2x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \le 0.$$

**12(5).** Решить систему $\begin{cases}\cos 3y + \cos^2 y + 12\cos y - 9 = 0\,;\\ \sqrt{3 - 4\cos y\cos x - 4\sin x} \le \sqrt{6}\,.\end{cases}$