Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей
«Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института (государственного университета)»

МАТЕМАТИКА

Последовательности. Пределы

Задание №3 для 10-х классов

(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2013

Составитель: Е.Ю. Редкозубова, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 10-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2013, 32 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 30 ноября 2013г.

Составитель:
Редкозубова Елена Юрьевна

Подписано 17.09.13. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0.
Уч.- изд. л. 1,77. Тираж 600 Заказ №13-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)
ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700,
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru
Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Бесконечные числовые последовательности

Определение. *Бесконечной числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*) называется числовая функция $x = x(n)$, определённая на множестве N натуральных чисел.

Аргумент n этой функции записывается в виде индекса, т. е. вместо записи $x(n)$ используют запись x_n, а саму последовательность часто обозначают (x_n). Число x_n называют n-м (читается: энным) членом последовательности (x_n). Приведём примеры.

(1) $1;\ 1;\ 1;\ \ldots$ (т. е. $x_n = 1$ для всех $n \in N$);

(2) $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ \ldots$ (т. е. $x_n = n^2$ для всех $n \in N$);

(3) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots$ (т. е. $x_n = \frac{1}{n}$ для всех $n \in N$);

(4) последовательность, n-й член которой равен n-му знаку после запятой в десятичной записи числа $\frac{8}{33}$;

(5) последовательность, n-й член которой равен количеству простых чисел, не превосходящих n;

(6) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ для всех $n \geq 3$

(последовательность Фибоначчи).

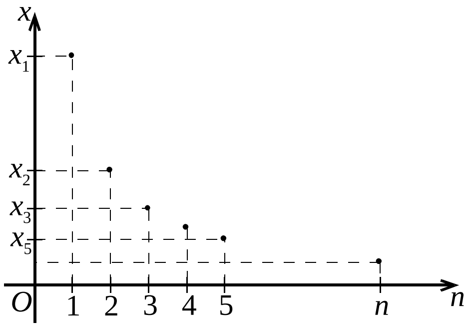
Как видим, последовательности задаются различными способами. Например, указывается формула n-го члена (примеры (1) – (3)). Закон соответствия между номером n и членом x_n может быть описан словесно (примеры (4) – (5)). Последовательность может быть также задана *рекуррентным соотношением*: даны несколько первых членов последовательности и формула, выражающая следующие члены последовательности через предыдущие (пример (6)).

Легко убедиться, что в примере (4) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$ и т. д., т. е. $x_n = 3 + (-1)^n$. В примере (6) формулу n-го члена найти сложнее:

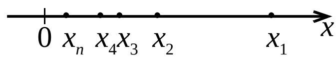
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

А вот явную формулу n-го члена последовательности (5) написать невозможно. Тем не менее, многие её свойства установлены и без формулы.

Скажем несколько слов о геометрическом изображении последовательности. Поскольку последовательность (x_n) является функцией, то геометрически её можно изобразить графиком (рис. 1 а). Однако чаще всего члены последовательности изображаются точками координатной прямой, снабжёнными соответствующими пометками (рис. 1 б).



а)



б)

Рис. 1

Вопрос. Каким общим свойством обладают последовательности (1), (2), (5) и (6)?

Ответ. Каждый их член, начиная со второго, не меньше предыдущего.

Определение. Последовательность (x_n) называется *строго возрастающей*, если каждый её член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in N$. Последовательность (x_n) называется *строго убывающей*, если $x_{n+1} < x_n$ для любого $n \in N$. Последовательность (x_n) называется *нестрого убывающей*, если $x_{n+1} \le x_n$ для любого $n \in N$. Последовательность (x_n) называется *нестрого возрастающей*, если $x_{n+1} \ge x_n$ для любого $n \in N$.

Все такие последовательности (строго возрастающие, строго убывающие, нестрого убывающие, нестрого возрастающие) называются *монотонными*.

Пример 1.1. Выяснить, является ли монотонной последовательность $x_n = \frac{3n}{n+2}$.

Решение. Уточним, чему равен x_{n+1}. Для этого вместо n в $x_n = \frac{3n}{n+2}$ подставим $n+1$, т. е. $x_{n+1} = \frac{3(n+1)}{n+3}$. Рассмотрим разность

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(n+1)}{n+3} - \frac{3n}{n+2} = \frac{3[(n+1)(n+2) - n(n+3)]}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{6}{(n+2)(n+3)} > 0,$$

значит, $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in N$. По определению последовательность (x_n) является строго возрастающей.

Приведённые рассуждения являются стандартными при доказательстве монотонности последовательности. Используя особенности последовательности (x_n), можно установить её возрастание более простым способом. Запишем x_n в виде $x_n = \frac{3n+6-6}{n+2} = 3 - \frac{6}{n+2}$, тогда

$$x_{n+1} = 3 - \frac{6}{n+3} > 3 - \frac{6}{n+2} = x_n.$$

Пример 1.2. Выяснить, является ли монотонной последовательность $x_n = 3 + (-1)^n$.

Решение. Последовательность не является монотонной, поскольку $x_{2m-1} = 2 < 4 = x_{2m}$ и $x_{2m} = 4 > 2 = x_{2m+1}$ для всех натуральных m.

Вопрос. Каким общим свойством обладают последовательности (1), (3) и (4)?

Ответ. Все их члены лежат на отрезке $[0; 4]$.

Определение. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существует число $C > 0$ такое, что для любого натурального n выполняется неравенство $|x_n| \leq C$.

Пример 1.3. Доказать, что последовательность (x_n) является ограниченной тогда и только тогда, когда все её члены лежат на некотором отрезке.

Решение. Пусть последовательность (x_n) ограничена. Тогда существует число $C > 0$ такое, что $|x_n| \le C$ для любого $n \in N$. Последнее неравенство можно переписать в виде $-C \le x_n \le C$, т. е. $x_n \in [-C; C]$. Обратно, пусть все члены (x_n) лежат на некотором отрезке $[m; M]$. Выберем симметричный отрезок $[-C; C]$, содержащий $[m; M]$, тогда $-C \le x_n \le C$ и, следовательно, $|x_n| \le C$. В качестве такого C можно взять, например, $max\{|m|, |M|\}$.

Пример 1.4. Выяснить, является ли ограниченной последовательность $x_n = \dfrac{10(-1)^n n}{n^2+1}$.

Решение. Рассмотрим $|x_n| = \dfrac{10n}{n^2+1}$. Поскольку при уменьшении знаменателя положительной дроби значение дроби увеличивается, имеем:

$$|x_n| = \frac{10n}{n^2+1} < \frac{10n}{n^2} = \frac{10}{n} \le 10.$$

Значит, $|x_n| \le 10$ для любого $n \in N$. По определению последовательность (x_n) является ограниченной.

Пример 1.5. Выяснить, является ли ограниченной последовательность $x_n = n^2$.

Решение. Предположим, что последовательность (x_n) является ограниченной. Это означает, что существует такое число $C > 0$, что при всех n выполняется неравенство $|n^2| \le C$. Однако при $n > \sqrt{C+1}$ неравенство не выполняется. Следовательно, предположение неверно, т. е. последовательность (x_n) не является ограниченной.

§2. Арифметические и геометрические прогрессии

Рассмотрим подробнее два важных класса числовых последовательностей.

Определение. Последовательность (x_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется *арифметической прогрессией*. Число d – *разность прогрессии*.

Таким образом, арифметическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно равенством $x_{n+1} = x_n + d$ и первым членом x_1.

Перечислим основные свойства арифметической прогрессии.

1) Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$x_n = x_1 + (n-1)d, \quad n \in N. \tag{2.1}$$

2) Для конечной арифметической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суммы членов, равноотстоящих от концов, равны:

$$x_1 + x_n = x_2 + x_{n-1} = x_3 + x_{n-2} = \ldots =$$
$$= x_k + x_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

3) Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} n, \tag{2.3}$$

или, учитывая 1),

$$S_n = \frac{2x_1 + (n-1)d}{2} n. \tag{2.3`}$$

Приведём ещё *характеристическое свойство* арифметической прогрессии.

4) Последовательность (x_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый член последовательности, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних членов:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}, \quad n \geq 2. \tag{2.4}$$

В 9 классе свойства 1) – 3) были доказаны, поэтому приведём доказательство лишь свойства 4). Пусть дана арифметическая прогрессия (x_n), тогда при $n \geq 2$ имеем $x_n = x_{n-1} + d$ и $x_n = x_{n+1} - d$. Складывая почленно эти равенства, получаем $2x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$. Обратно, пусть для n-го члена (x_n), $n \geq 2$, выполнено равенство (2.4), тогда

$2x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ или $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$. Отсюда получаем, что $x_{n+1} - x_n = x_2 - x_1$, т. е. любые два соседних члена последовательности отличаются на одно и то же число $d = x_2 - x_1$. По определению последовательность (x_n) является арифметической прогрессией. □

Пример 2.1. Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии, если $x_5 + x_6 = 4$.

Решение. По формуле (2.3) $S_{10} = \frac{x_1 + x_{10}}{2} 10$. Заметим, что члены x_5 и x_6 равноотстоят от x_1 и x_{10} соответственно. По (2.2) $x_1 + x_{10} = x_5 + x_6$, следовательно, $S_{10} = \frac{4}{2} \cdot 10 = 20$.

Ответ. 20.

Определение. Последовательность (x_n), первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называется *геометрической прогрессией*. Число $q -$ *знаменатель прогрессии*.

Таким образом, геометрическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно равенством $x_{n+1} = x_n q$, первым членом $x_1 \neq 0$ и знаменателем $q \neq 0$.

Перечислим основные свойства геометрической прогрессии.

1) Формула n-го члена геометрической прогрессии имеет вид

$$x_n = x_1 q^{n-1}, \ n \in N. \tag{2.5}$$

2) Для конечной геометрической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произведения членов, равноотстоящих от концов, равны:

$$x_1 \cdot x_n = x_2 \cdot x_{n-1} = x_3 \cdot x_{n-2} = \ldots =$$
$$= x_k \cdot x_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.6}$$

3) Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ при } q \neq 1 \text{ и } S_n = n \cdot x_1 \text{ при } q = 1.$$

Приведём ещё *характеристическое свойство* геометрической прогрессии.

4) Числовая последовательность (x_n) ненулевых членов является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда модуль каждого её члена, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних членов:

$$|x_n| = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}, \quad n \geq 2, \tag{2.8}$$

или

$$(x_n)^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1}, \quad n \geq 2. \tag{2.8`}$$

Докажем свойство 4). Пусть последовательность (x_n) является геометрической прогрессией, тогда $x_n^2 = (x_1 q^{n-1})^2 = x_1 q^{n-2} \cdot x_1 q^n = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$. Обратно, пусть все члены последовательности (x_n) отличны от нуля и для n-го её члена, $n \geq 2$, выполнено $x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$, тогда $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}$. Следовательно, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_2}{x_1}$, или $x_{n+1} = x_n q$, где $q = \frac{x_2}{x_1}$. По определению последовательность (x_n) является геометрической прогрессией. □

Пример 2.2. Известно, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – геометрическая прогрессия. Известны числа $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ и $T = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$. Найти $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Решение. Обозначим знаменатель прогрессии через q. Преобразуем искомую величину

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1 \cdot x_1 q \cdot \ldots \cdot x_1 q^{n-1} = x_1^n q^{1+2+\ldots+n-1} =$$
$$= x_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (x_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}}.$$

Пусть $q \neq 1$, тогда $S = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Последовательность $1/x_1,\ 1/x_2,\ \ldots,\ 1/x_n$ является геометрической прогрессией со знаменателем $1/q$. Следовательно, $T = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}}$, т. е. $T = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$.

Отсюда заключаем, что $S/T = x_1^2 q^{n-1}$. Последнее равенство, очевидно, справедливо и при $q = 1$. Следовательно, $P = \sqrt{S^n/T^n}$.

Ответ. $\sqrt{S^n/T^n}$.

Пример 2.3. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если среднее из них уменьшить на 40%, то получится геометрическая прогрессия, сумма членов которой равна 39. Найти эти числа.

Решение. Обозначим данные числа x_1, x_2, x_3. По условию сумма $x_1 + 0{,}6x_2 + x_3$ равна 39. По характеристическому свойству арифметической прогрессии $2x_2 = x_1 + x_3$ и, следовательно, $x_1 + 0{,}6x_2 + x_3 = 2{,}6x_2$. Отсюда получаем, что $x_2 = 15$. По характеристическому свойству геометрической прогрессии $(0{,}6x_2)^2 = x_1 \cdot x_3$. Итак, $x_1 + x_3 = 30$ и $x_1 \cdot x_3 = 81$, т. е. по обратной теореме Виета x_1 и x_3 являются корнями уравнения $x^2 - 30x + 81 = 0$. Корни этого уравнения равны 3 и 27, следовательно, $x_1 = 3$ и $x_3 = 27$, поскольку последовательность x_1, x_2, x_3 по условию является возрастающей.

Ответ. 3, 15 и 27.

Пример 2.4. Найти формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентно: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $n \in N$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = x_n + a$, где число a подбирается так, чтобы последовательность y_n была геометрической прогрессией. Подставляя $x_n = y_n - a$ и $x_{n+1} = y_{n+1} - a$ в рекуррентное соотношение, имеем $y_{n+1} - a = 2(y_n - a) + 1$, т. е. $y_{n+1} = 2y_n + (1 - a)$. Последовательность y_n будет геометрической прогрессией, если $1 - a = 0$, т. е. $a = 1$. Поскольку $y_1 = x_1 + a = \frac{3}{2}$, формула общего члена геометрической прогрессии y_n запишется так: $y_n = \frac{3}{2}2^{n-1}$ $(y_1 = \frac{3}{2}, q = 2)$. Тогда $x_n = y_n - a = 3\cdot 2^{n-2} - 1,\ n \ge 2$.

Ответ. $x_n = 3\cdot 2^{n-2} - 1,\ n \ge 2$.

§3. Предел последовательности

При увеличении n члены последовательности $x_n = 1/n$ становятся сколь угодно малыми, неограниченно приближаются (стремятся) к нулю. Логично считать, что ноль – предел последовательности (x_n). Однако такого интуитивного понимания в более сложной ситуации может оказаться недостаточно. Мы должны точно сформулировать, что означает слово «предел» на языке чисел. Строгое определение предела было сформулировано довольно поздно – только в середине XIX века. Дело в том, что в отличие от используемых ранее «назывных» определений (типа определения равнобедренного треугольника) здесь описывается *процесс* изменения величины: пробегая по ряду натуральных чисел $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n, \ldots$, мы наблюдаем за поведением x_n. Такие понятия плохо формализуются.

Попытаемся понять, что следует предпринять, чтобы проконтролировать утверждение «x_n стремится к a». Изобразим члены последовательности на числовой оси и отметим на ней точку a. Представим ситуацию образно: будем делать фотографии a каждый раз с новым оптическим увеличением. Число a будет пределом последовательности x_n, если a – «друг» x_n: на любой такой фотографии окажутся все x_n, начиная с некоторого номера.

Проиллюстрируем сказанное на примере последовательности $x_n = 1/n$. В качестве «фотографии» $a = 0$ можно взять симметричный интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$[1]. Оптическому увеличению соответствует уменьшение ε. Пусть $k = 1/\varepsilon$, тогда $1/n < \varepsilon$ при $n > k$ и, следовательно, член x_n попадает на «фотографию», т. е. $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$. Например, при $\varepsilon = 1/100$ все члены $x_{101}, x_{102}, \ldots,$ окажутся в интервале

[1] ε – греческая буква «эпсилон».

$(-1/100, 1/100)$, при $\varepsilon = 1/1000$ уже только члены x_{1001}, x_{1002}, …, окажутся в интервале $(-1/1000, 1/1000)$ и т. д.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε найдётся такое действительное число k, что при всех $n > k$ выполняется неравенство

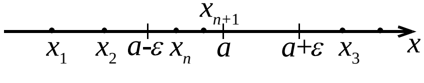
$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (читается: предел x_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a). Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

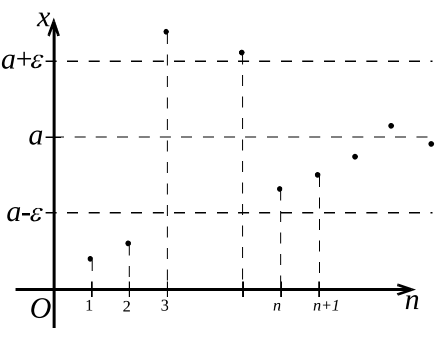
Выясним геометрический смысл понятия предела. Для положительного числа ε интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется ε- *окрестностью* точки a. Неравенство (3.1) равносильно двойному неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Неравенство (3.2) показывает, что все члены последовательности (x_n) с номерами $n > k$ попадают в $\varepsilon-$окрестность точки a. В определении предела число ε может быть любым (сколь угодно малым), поэтому произвольная (сколь угодно малая) окрестность точки a содержит все члены (x_n) за исключением, быть может, конечного числа (рис. 2а). На уровне графика последовательности это означает,



а)



б)

Рис. 2

что вне сколь угодно узкой полосы между прямыми $x = a - \varepsilon$ и

$x = a + \varepsilon$ может оказаться лишь конечное число точек графика (x_n) (рис. 2б).

Замечание. В определении предела выбор числа $k,$ вообще говоря, зависит от $\varepsilon.$ Чтобы подчеркнуть это, иногда пишут $k = k(\varepsilon).$ Доказать, что последовательность (x_n) имеет предел, фактически означает найти функциональную зависимость k от $\varepsilon.$ Вообще, определение предела по виду напоминает нескончаемую дискуссию между двумя лицами A и $B: A$ задаёт точность приближения $\varepsilon,$ в ответ B указывает число $k,$ с которого эта точность достигается, т. е. выполняется неравенство (3.1) при всех $n > k;$ A уменьшает точность, $B-$ указывает новое k и т. д.

Пример 3.1. Пусть $x_n = c-$ постоянная последовательность. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c.$

Решение. Пусть выбрано произвольное $\varepsilon > 0.$ Нам нужно найти такое число $k,$ что при всех $n > k$ выполнялось бы неравенство $|x_n - c| < \varepsilon$. Но это неравенство равносильно следующему: $|c - c| < \varepsilon,$ или $0 < \varepsilon,$ что выполняется для всех номеров n. Это означает, что в качестве k можно выбрать любое число, например, $k = 0$. Тогда для любого $n > k$ имеет место неравенство $|x_n - c| < \varepsilon$. По определению $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Замечание. В разобранном примере число k удалось выбрать так, чтобы оно годилось сразу для всех ε. Такой случай не типичен.

Пример 3.2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Решение. Пусть фиксировано произвольное $\varepsilon > 0.$ Нам нужно найти такое число k, что при всех $n > k$ выполнялось бы неравенство $|\dfrac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, или $n > 1/\varepsilon$. Выберем $k = 1/\varepsilon$. Тогда при $n > k$ имеем:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{k} = \varepsilon.$$

По определению $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Вопрос. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\varepsilon>0$ и число k такое что $x_n\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ при $n>k$. Можно ли утверждать, что в интервале $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ нет ни одного из чисел x_n, $n\le k$?

Ответ. Нет. Приведём соответствующий пример. Определим

$$x_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{при } n \text{ чётном;}\\ 0 & \text{при } n \text{ нечётном.}\end{cases}$$

Последовательность (x_n) имеет предел, равный нулю. Пусть $\varepsilon=0{,}01$, тогда все члены с номерами $n>100$ попадают в интервал $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$, а, например, член $x_{100}=0{,}01$ уже не попадает в него. Однако члены x_1, x_3, …, x_{99} с нечётными номерами тоже лежат в $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$.

Наглядное представление о пределе можно получить, считая, что x_n – какие-то физические величины, которые мы можем измерять с определённой точностью, допускаемой приборами. Пусть ε есть точность прибора, тогда неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$ означает, что мы не сможем отличить x_n от a. Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ означает, что при любой точности измерения последовательность (x_n), начиная с некоторого номера, не отличается от постоянной последовательности a, a, a, … .

Вопрос. Могут ли два разных числа быть пределами одной и той же последовательности?

Ответ. Нет. Предположим, что два разных числа a и b являются пределами одной и той же последовательности (x_n) и пусть, например, $b>a$. Положим $\varepsilon=(b-a)/3$, тогда ε-окрестности точек a и b не пересекаются (сделать чертёж!). Ввиду условия найдутся такие числа k_1 и k_2, что при всяком $n>k_1$ член x_n лежит в ε-окрестности точки a и при всяком $n>k_2$ член x_n лежит в ε-окрестности точки b. Если теперь взять какое-нибудь $n>\max\{k_1,k_2\}$, то окажется, что x_n лежит одновременно в ε-окрестности точки a и в ε-окрестности точки b, а это невозможно, поскольку окрестности не пересекаются.

Пример 3.3. Доказать, что если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

Решение. Если $q=0$, то $q^n=0$ при любом n, в этом случае утверждение очевидно.

Для случая $q\neq 0$ предварительно установим одно вспомогательное неравенство. По условию $|q|<1$, тогда $\dfrac{1}{|q|}>1$ и, значит, $\dfrac{1}{|q|}=1+\alpha$ для некоторого $\alpha>0$. Возводя обе части последнего неравенства в степень n, получим $\dfrac{1}{|q|^n}=(1+\alpha)^n$. Поскольку $\alpha>0$, то все слагаемые, которые получаются после раскрытия скобок и приведения подобных членов в $(1+\alpha)^n$, являются положительными. Одним из слагаемых является[2] $n\alpha$, поэтому справедливо $\dfrac{1}{|q|^n}=(1+\alpha)^n>n\alpha$ и, значит,

$$|q|^n<\frac{1}{n\alpha}. \qquad (3.3)$$

С помощью полученного неравенства докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Мы должны показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует число k, такое что при всех $n>k$ выполняется неравенство $|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$. Выберем $k=\dfrac{1}{\alpha\varepsilon}$, тогда при $n>k$

---

[2] Действительно, $(1+\alpha)^n$ – это произведение n сомножителей $1+\alpha$:

$$(1+\alpha)(1+\alpha)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha).$$

Член α получается только в случае, когда из одной скобки мы берем α, а из остальных - 1. Поскольку у нас всего n скобок, то после перемножения мы получим n слагаемых вида $1^{n-1}\cdot\alpha$, т. е. коэффициент перед α равен n.

$$n > \frac{1}{\alpha\varepsilon} \Leftrightarrow n\alpha > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon$$

и в силу (3.3) $|q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon$, что и требовалось доказать. Отметим, что в параграфе 4 (пример 4.1) будет дано другое доказательство.

Вопрос. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\varepsilon > 0$. Можно ли утверждать, что найдётся такое число k, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n > k$?

Ответ. да. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то по определению предела для *любого* положительного числа α, а следовательно, и для $\alpha = \varepsilon / 2$, найдётся число k, такое что $|x_n - a| < \alpha$ при всех $n > k$.

Сформулируем необходимое условие существования предела, доказательство которого приводится в следующем параграфе.

Теорема 3.1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Пример 3.4. Доказать, что последовательность $x_n = n^2$ не имеет предела.

Решение. В примере 1.5 было показано, что данная последовательность не является ограниченной. По теореме 3.1 заключаем, что последовательность (x_n) расходится.

Следующий пример показывает, что ограниченная последовательность может и не иметь предела, т. е. обратное утверждение к теореме 3.1 неверно.

Пример 3.5. Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Решение. Предположим противное, т. е. какое-то число a является пределом этой последовательности. Тогда для $\varepsilon = 1$ найдётся такое число k, что $|x_n - a| < 1$ при всех $n > k$. Пусть номер $N > k$, тогда $|x_{N+1} - a| < 1$ и $|x_{N+2} - a| < 1$. Но одно из чисел x_{N+1} и x_{N+2} равно 1, а другое равно –1. Поэтому $|-1 - a| < 1$ и $|1 - a| < 1$, т. е. одновременно

$0 < a < 2$ и $-2 < a < 0$. Полученное противоречие показывает, что последовательность (x_n) расходится.

При вычислении пределов на практике редко пользуются определением. Обычно применяют стандартные предельные равенства (см. примеры 3.2 и 3.3) и следующую теорему об арифметических операциях с пределами.

Теорема 3.2. *Если последовательности* (x_n) *и* (y_n) *сходятся, то сходятся и последовательности* $(x_n + y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ *и* x_n / y_n *(в последнем случае предполагается* $y_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$*). При этом*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Доказательство теоремы 3.2 обсуждается в следующем параграфе.

Пример 3.6. Доказать, что постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ для любого $c \in R$.

Решение. В самом деле, рассмотрим последовательность $y_n = c$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$ (пример 3.1), то по теореме 3.2 2)

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Пример 3.7. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то по теореме 3.2 2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Замечание. Теорему 3.2 можно обобщить на произвольное (конечное) число слагаемых (сомножителей). В частности, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^m}=0$ для любого $m\in N$.

Пример 3.8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-n(n-1)^2}{n^2+11}$.

Решение. Обозначим дробь, стоящую под знаком предела, через x_n. В числителе и знаменателе x_n стоят последовательности, не являющиеся ограниченными (доказывается аналогично примеру 1.5). По теореме 3.1 они не имеют предела и теорема о пределе частного (теорема 3.2 3)) «напрямую» здесь неприменима. Поступим следующим образом: поделим числитель и знаменатель на наибольшую степень n. По формулам сокращённого умножения $(n+2)^3-n(n-1)^2=8n^2+11n+8$, так что x_n можно переписать в виде:

$$x_n=\frac{8n^2+11n+8}{n^2+11}=\frac{n^2(8+\frac{11}{n}+\frac{8}{n^2})}{n^2(1+\frac{11}{n^2})}=\frac{8+\frac{11}{n}+\frac{8}{n^2}}{1+\frac{11}{n^2}}.$$

Теперь в числителе и знаменателе x_n стоят сходящиеся последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(8+\frac{11}{n}+\frac{8}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}8+11\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+8\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=8,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}1+11\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=1.$$

По теореме 3.2 3)

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{11}{n}+\frac{8}{n^2}}{1+\frac{11}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{11}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{n^2}\right)}=\frac{8}{1}=8.$$

Ответ. 8.

Определение. Геометрическая прогрессия (x_n) называется *бесконечно убывающей*, если $|q|<1$, где q – знаменатель прогрессии. *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где S_n – сумма её первых n членов.

Пример 3.9. Доказать, что если геометрическая прогрессия (x_n) с показателем q является бесконечно убывающей, то её сумма равна

$$\frac{x_1}{1-q}.$$

Решение. Так как $S_n = x_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1} = \dfrac{x_1}{q-1} q^n + \dfrac{x_1}{1-q}$, то

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{q-1} \lim_{n\to\infty} q^n + \lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{1-q} =$$

$$= \frac{x_1}{q-1}\cdot 0 + \frac{x_1}{1-q} = \frac{x_1}{1-q}.$$

Пример 3.10. Записать значение выражения $1,7(5) = 1,7555\ldots$ в виде обыкновенной дроби.

Решение. Имеем

$$1,7(5) = 1 + \frac{7}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \ldots = \frac{17}{10} + \frac{\frac{5}{10^2}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{17}{10} + \frac{1}{18} = \frac{79}{45}.$$

Ответ. 79/45.

Следующее полезное свойство пределов известно под названием *теоремы о «зажатой» последовательности*.

Теорема 3.3. Пусть (x_n), (y_n) и (z_n) – такие последовательности, что $x_n \le y_n \le z_n$ при всех $n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ существует такое число k_1, что члены x_n лежат в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ при всех $n > k_1$, и существует такое число k_2, что члены z_n лежат в интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ при всех $n > k_2$. Положим $k = max\{k_1, k_2\}$. Тогда при

$n > k$ одновременно $x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ и $z_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ и, следовательно, $a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon$, т. е. $y_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, что и требовалось. □

Пример 3.11. Дана последовательность

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Решение. Попробуем «зажать» x_n между членами последовательностей, сходящихся к одному и тому же числу, и применим теорему 3.3.

Заметим, что $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ – наибольшая, а $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ – наименьшая дробь суммы x_n. Тогда верна оценка $n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le x_n \le n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Поскольку $n^2 + n < n^2 + 2n + 1$, тогда

$$\sqrt{n^2+n} < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{n}{n+1}.$$

Учитывая $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} < \dfrac{n}{n} = 1$, получаем:

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le x_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < 1.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, по теореме 3.4 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

§4*. Теоремы о пределах

Этот параграф посвящён доказательству основных теорем теории пределов. Формулировки некоторых из них были приведены в параграфе 3.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Покажем, что последовательность (x_n) ограничена. Согласно примеру 1.3 для этого достаточно показать, что все её члены лежат на некотором отрезке. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда по определению предела найдётся число k такое, что все члены (x_n) с номерами $n > k$ попадают в интервал $(a-1;\ a+1)$. За пределами этого интервала может оказаться лишь конечное число членов x_1, $x_2, \ldots, x_N$, где N – наибольший из номеров $n \le k$. Добавим к этому набору числа $a-1$ и $a+1$ и из полученного набора чисел выберем наименьшее (обозначим его через m) и наибольшее (обозначим его через M). Тогда отрезок $[m;\ M]$ содержит уже все члены данной последовательности: $m \le x_n \le M$ для всех n. □

При доказательстве теоремы об арифметических операциях с пределами будем использовать определение предела и неравенство

$$|x+y| \le |x| + |y|. \qquad (4.1)$$

Доказательство теоремы 3.2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

I. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$. Пусть выбрано произвольное $\varepsilon > 0$. Нам нужно показать, что найдётся такое число k, что $|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon$ при всех $n > k$. По условию найдутся числа k_1 и k_2 такие, что $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, как только $n > k_1$, и $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ как только $n > k_2$. Положим $k = \max\{k_1,\ k_2\}$. Тогда по неравенству (4.1) при $n > k$ имеем:

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le$$

$$\le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось.

II. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам нужно показать, что существует такое число k, что $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$ при всех $n > k$, По теореме 3.1 последовательности

(x_n) и (y_n) ограничены; тем самым найдётся такое $C>0$, что $|x_n|\le C$ и $|y_n|\le C$ при всех n, а также $|a|\le C$, $|b|\le C$. Заметим, что

$$|x_ny_n-ab|=|x_ny_n-x_nb+x_nb-ab|=|x_n(y_n-b)+b(x_n-a)|$$

и, следовательно, по неравенству (4.1)

$$|x_ny_n-ab|\le|x_n|\cdot|y_n-b|+|b|\cdot|x_n-a|$$

Ввиду условия существует число k_1 такое, что $|x_n-a|<\varepsilon/2C$ для всех $n>k_1$, а также число k_2 такое, что $|y_n-b|<\varepsilon/2C$ для всех $n>k_2$. Если положить $k=\max\{k_1, k_2\}$, то при $n>k$ имеем:

$$|x_ny_n-ab|\le|x_n|\cdot|y_n-b|+|b|\cdot|x_n-a|<C\frac{\varepsilon}{2C}+C\frac{\varepsilon}{2C}=\varepsilon,$$

что и требовалось.

Для доказательства оставшегося пункта теоремы нам потребуется следующий факт.

Лемма 4.1. *Если* $y_n\ne 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\ne 0$*, то последовательность* $(1/y_n)$ *ограничена.*

Доказательство леммы 4.1. Положим в определении предела $\varepsilon=\dfrac{|b|}{2}$. Тогда существует такое число k, что $|y_n-b|<\dfrac{|b|}{2}$ при всех $n>k$. Из неравенства (4.1) вытекает, что $|y_n-b|\ge|b|-|y_n|$. Следовательно, при всех $n>k$ имеем

$$|y_n|\ge\frac{|b|}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{1}{y_n}\right|\le\frac{2}{|b|}.$$

Пусть $N-$ наибольший из номеров $n\le k$. Добавим к членам $1/y_1$, $1/y_2$, …, $1/y_N$ числа $-2/b$ и $2/b$ и из полученного набора выберем наименьшее (обозначим его через m) и наибольшее (обозначим его через M). Тогда отрезок $[m;M]$ содержит все члены последовательности $(1/y_n)$, что и требовалось. □

Поскольку $x_n/y_n=x_n\cdot(1/y_n)$, пункт 3) теоремы 3.2 вытекает из леммы 4.1 и следующего утверждения, доказательство которого оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Утверждение. Если $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

В теории пределов важную роль играет следующий факт, доказательство которого не приводим.

Теорема 4.2. (Вейерштрасса). *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Эта теорема эквивалентна свойству полноты множества действительных чисел. Образно говоря, свойство полноты состоит в том, что на числовой оси нет «проколов» и «дырок».

Вопрос. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Имеет ли предел последовательность (x_{n+1})?

Пример 4.1. Используя теорему Вейерштрасса, доказать, что если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

Решение. Для $q = 0$ утверждение очевидно. Пусть $q \in (0, 1)$, тогда

$$x_{n+1} = q \cdot x_n, \tag{4.2}$$

следовательно, $x_{n+1} < x_n$ при всех n, т. е. последовательность (x_n) является строго убывающей. В частности, $x_n < x_1$ при всех n. Кроме того, очевидно $x_n > 0$ при всех n, т. е. последовательность (x_n) ограничена. По теореме 4.2 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Обозначим его через a. Тогда, переходя к пределу в равенстве (4.2), получаем $a = q \cdot a$, т. е. $a = 0$.

Пусть теперь $q \in (-1, 0)$, тогда справедливо неравенство

$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n.$$

Поскольку $|q| \in (0, 1)$, то по доказанному выше $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$, тогда согласно примеру 3.6 и $\lim\limits_{n\to\infty}(-|q|^n) = 0$. По теореме о «зажатой» последовательности (теорема 3.3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, что завершает доказательство.

Дадим обоснование одного способа приближённого извлечения квадратных корней, встречавшегося еще в древних вавилонских текстах.

Пример 4.2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad (4.3)$$

где $x_1 > 0$, $a > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Решение. Поскольку $x_1 > 0$ и $a > 0$, все члены последовательности положительные. Применяя неравенство $(c+d)/2 \geq \sqrt{cd}$ для среднего арифметического и среднего геометрического, из (4.3) получаем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a},$$

т. е. $x_n \geq \sqrt{a}$ для всех $n \geq 2$. Отсюда вытекает, что

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0,$$

т. е. последовательность (x_n) является нестрого убывающей при $n \geq 2$. Кроме того, (x_n) ограничена: $\sqrt{a} \leq x_n \leq x_2$ для всех $n \geq 2$. По теореме 4.2 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и по теореме 3.4 $b \geq \sqrt{a} > 0$. Переходя в равенстве (4.3) к пределу, получаем $b = \frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$, откуда $b^2 = a$ и, значит, $b = \sqrt{a}$.

§5. Понятие о пределе функции. Непрерывность функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем точку $a \in R$, за исключением, быть может, самой точки a.[3]

Определение. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой последовательности (x_n) из области её

[3] Например, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ определена на любом интервале, содержащем точку 0, кроме самой точки 0.

определения такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Замечание. В определении предела рассматриваются значения x_n, не равные a, поэтому в самой точке a функция $y = f(x)$ может быть не определена; если значение $f(a)$ определено, то оно не обязано совпадать с A. К тому же, поскольку последовательность $(f(x_n))$ имеет не более одного предела, получаем, что если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то этот предел единственный.

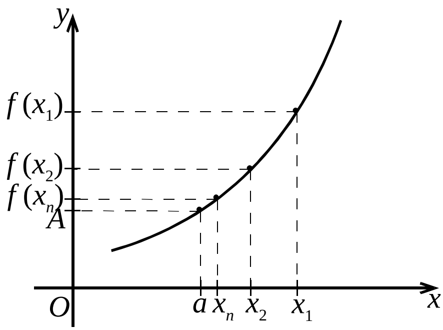


Рис. 3

На рисунке изображена лишь одна последовательность (x_n), которая к тому же является монотонной. Важно понимать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности (x_n) с условием $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Пример 5.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Решение. Очевидно функция $f(x) = x$ определена на любом интервале, содержащем a. Выберем произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда $f(x_n) = x_n$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Пример 5.2. Доказать, что постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cA$ для любого $c \in R$.

Решение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем a. Выберем из этого интервала произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда из примера 3.6 следует $\lim\limits_{n\to\infty} cf(x_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = cA$, что и требовалось.

Пример 5.3. Доказать, что при $a > 0$ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ определена при $x \geq 0$ и, следовательно, определена на некотором интервале, содержащем a. Выберем из этого интервала произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Нам нужно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда найдётся такое число k, что при $n > k$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$. Следовательно,

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|(\sqrt{x_n} - \sqrt{a})(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon,$$

что и требовалось.

Пример 5.4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ определена на любом интервале, содержащем $x = 1$, кроме этой точки. Поскольку при $x \neq 1$ имеет место равенство $f(x) = x + 1$, то для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n \neq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + 1 = 2$.

При решении последних примеров мы повторяли одни и те же рассуждения. Их можно применить при доказательстве свойств пределов функций и в дальнейшем при вычислении уже пользоваться этими свойствами.

Теорема 5.1. *Пусть функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ определены на некотором интервале, содержащем точку $a \in R$, за исключением, быть может, самой точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$;

3) если дополнительно $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$, $B \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Приведём доказательство лишь для свойства 2). Остальные свойства доказываются аналогично.

Пусть некоторая произвольная последовательность (x_n) из интервала, на котором определены функции, такова, что $x_n \neq a$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда по определению предела функции $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$. По теореме 3.2 2) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = AB$. В силу произвольности последовательности (x_n) и определения предела функции получаем, что $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB.$ □

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, т. е. если для любой последовательности (x_n) из области определения функции такой, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Замечание. Отметим два обстоятельства, связанных с определением непрерывности. Во-первых, оговорка $x_n \neq a$ здесь не нужна, т. к. при $x_n = a$ соответствующие значения $f(x_n)$ равны $f(a)$. Во-вторых, важно понимать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, то 1) она определена в точке a; 2) существует $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и 3) $A = f(a)$. Если хотя бы один из пунктов 1) – 3) не выполнен, то функция не является непрерывной в точке a.

Пример 5.5. Функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $a \in R$. Это следует из примера 5.1 и определения непрерывности функции.

Замечание. Из теоремы 5.1 вытекает, что если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = f(x)/g(x)$ ($g(a) \neq 0$) также непрерывны в a.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (конечном или бесконечном), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Пример 5.6. Многочлен непрерывен на всей числовой прямой.

Решение. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен степени n, $a \in R$. Нам нужно показать, что $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

Поскольку функция $f(x) = x$ непрерывна в точке a, то последовательно применяя пункт 2) теоремы 5.1, получаем, что $\lim\limits_{x\to a} x^m = a^m$ при любом натуральном m. Далее, по теореме 5.1 1) получаем:

$$\lim_{x\to a} P(x) = \lim_{x\to a} a_n x^n + \lim_{x\to a} a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} a_1 x + \lim_{x\to a} a_0 =$$

$$= a_n \lim_{x\to a} x^n + a_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} a_0 =$$

$$= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = P(a).$$

Обоснование переходов будет проще понять, читая последнюю цепочку равенств с конца.

Замечание. Вообще, все элементарные функции, изучаемые в школьном курсе, непрерывны в каждой точке, в окрестности которой эти функции определены. Например, из примера 5.2 вытекает, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна на $(0; +\infty)$.

Пример 5.7. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 + \sqrt{(x-3)^2} + 11)$.

Решение. Поскольку $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$ и $|x-3| = 3 - x$ при $x \le 3$, то $f(x) = x^3 + |x-3| + 11 = x^3 - x + 14$ при $x \le 3$. Многочлен $P(x) = x^3 - x + 14$ непрерывен на всей числовой прямой, и в частности, в точке $x = 2$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = P(2) = 2^3 - 2 + 14 = 20$.

Ответ. 20.

Пример 5.8. Найти $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$.

Решение. Обозначим дробь, стоящую под знаком предела, через $f(x)$. В числителе и знаменателе дроби $f(x)$ стоят функции, непрерывные в точке $x = 5$. Предел этих функций при $x \to 5$ равен их значению в точке $x=5$, т. е. равен 0. В этом случае говорят, что имеет место неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для её «раскрытия» приходится прибегнуть к искусственному приёму – умножению числителя и знаменателя дроби $f(x)$ на «сопряжённое выражение» $\sqrt{x-1}+2$:

$$\lim_{x\to5} f(x) = \lim_{x\to5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4}.$$

Предпоследнее равенство получено в силу непрерывности функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}$ в точке $x=5$.

Ответ. $1/4$.

Контрольные вопросы

1(1). Может ли последовательность быть одновременно арифметической и геометрической прогрессией? Если ответ положительный, привести пример; если нет, объяснить почему.

2(1). При каком условии на d арифметическая прогрессия (x_n) будет строго убывающей? Ответ обосновать.

3(2). Найти сумму всех (положительных) нечётных трёхзначных чисел.

4(2). Сумма пятого и девятого членов геометрической прогрессии равна 7. Найти сумму их квадратов, если произведение шестого и восьмого членов этой прогрессии равно 12.

5(1). Записать в виде обыкновенной дроби $0{,}1(24)=0{,}124242\ldots$.

6(2). Найти формулу n-го члена последовательности (x_n), заданной рекуррентно: $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+n$, $n\in N$.

7(1). Что означает, что число a не является пределом последовательности (x_n)? При ответе не используйте негативных формулировок типа «неверно, что».

8(2). Является ли последовательность $x_n=n^3$ сходящейся? Ответ обосновать.

9(2). Пусть последовательность (x_n) такова, что $x_n = 0$ при $n \le 100$, и $x_n = 1$ при $n > 100$. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

10(2). Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Могут ли все члены последовательности быть отрицательными? Ответ обосновать.

11. Известно, что последовательность (x_n) имеет предел, а последовательность (y_n) – не имеет.

а)**(2)**. Может ли иметь предел последовательность $(x_n y_n)$? Если ответ положительный, привести пример; если нет, объяснить почему.

б)**(3)** Тот же вопрос при дополнительном условии, что предел (x_n) и все члены x_n положительны.

12(2). У линейной функции $y = 3x - 1$ изменили значение $y(0) = -1$ на 1, т. е. рассмотрели новую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{при} \quad x \ne 0; \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

а) Имеет ли функция $y = f(x)$ предел в точке $x = 0$?

б) Является ли функция $y = f(x)$ непрерывной в точке $x = 0$? Ответ обосновать.

Задачи

1. Выяснить, является ли монотонной последовательность (x_n). Ответ обосновать.

а)**(2)** $x_n = \dfrac{5n+3}{4n-1}$;

б)**(2)** $x_n = 1 + (-1)^n$.

2. а)**(2)** Доказать, что при q, $|q| \le 1$, геометрическая прогрессия (x_n) является ограниченной.

б)***(2)** Доказать, что при q, $|q| > 1$, геометрическая прогрессия (x_n) не является ограниченной.

3. Выяснить, является ли ограниченной последовательность (x_n). Ответ обосновать.

а)**(2)** $x_n = \dfrac{5n+3}{4n-1}$;

б)**(2)** $x_n = 2+4+\ldots+2n$.

4(3) (ВМК, 2001). Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии (x_n) равна 56. Известно, что все члены этой прогрессии натуральные числа и член x_{12} больше 67, но меньше 74. Найти x_{20}.

5(3). Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма кубов всех членов в 4 раза больше суммы всех членов, а сумма квадратов всех членов в $\sqrt{7}$ раз больше суммы всех членов.

6(3). Найти формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентно:

$$x_1 = 2,\ \ x_{n+1} = 2-3x_n,\ \ n \in N.$$

7(2). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \geq 0$ для любого n. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

8(3). Доказать, что последовательность (x_n), где $x_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, не имеет предела.

9. Найти

а)**(2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{(n+1)+(n+2)+\ldots+2n}$;

б)**(2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

в)***(3)**. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\ldots+\dfrac{n}{3^n}\right)$.

10*(3). Найти предел последовательности (x_n), заданной рекуррентным соотношением: $x_{n+1} = x_n(2-x_n)$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

11. Найти

а)**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4+x)^3-64}{x}$;

б)**(2)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

12. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}-3x+1 & \text{при} \quad x<-1;\\ \sqrt{x+1} & \text{при} \quad x\ge -1.\end{cases}$$

а)**(1)** Построить график функции $y=f(x)$.

б)**(3)** Выяснить, в каких точках функция $y=f(x)$ непрерывна.