

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение дополнительного образования детей  
«Заочная физико-техническая школа  
Московского физико-технического института  
(государственного университета)»**

**ФИЗИКА**

**Физическая оптика.  
Элементы квантовой физики**

Задание № 6 для 11-х классов

(2013 – 2014 учебный год)



г. Долгопрудный, 2014

Составитель: А.А. Лукьянов, к. ф.-м. н., доцент, старший инженер лаборатории по работе с одарёнными детьми МФТИ.

Физика: задание №6 для 11-х классов (2013–2014 учебный год), 2014, 32с.

**Дата отправления заданий по физике и математике – 12 апреля 2014 г.**

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «\*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

**Лукьянов Андрей Александрович**

Подписано 29.01.14. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0

Уч.-изд. л. 1,72. Тираж 600. Заказ №51-з.

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
Заочная физико-техническая школа  
ООО «Печатный салон «Шанс»

Институтский пер., г. Долгопрудный, 9, Москов. обл., 141700.

ЗФТШ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение,**

тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение,**

тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

***E.mail: zftsh@mail.mipt.ru***

**Наш сайт: [www.school.mipt.ru](http://www.school.mipt.ru)**

© ЗФТШ, 2014

Настоящее Задание с кратким изложением теории не претендует на то, чтобы заменить учебник по физике (см., например, [1] в списке литературы) или обстоятельные учебные пособия [2 – 5]. Изложение теоретических вопросов в нём направлено лишь на то, чтобы нужным образом расставить ударения, отметить тонкие места в курсе, а главное – облегчить Читателю решение предлагаемых задач. Звездочкой (\*) отмечены наиболее трудные (по мнению автора-составителя) примеры и задачи для самостоятельного решения.

## § 1. Интерференция и дифракция волн

**А.** Наложение двух или нескольких волн, при котором образуется устойчивое перераспределение в пространстве энергии результирующих колебаний, называют *интерференцией*. Наблюдать такую устойчивую картину можно, только тогда, когда разность фаз складывающихся колебаний в каждой точке пространства не зависит от времени. О таких волнах говорят, что они *когерентны*. Когерентные волны должны иметь одинаковую частоту (длину волны).

Если вдоль оси  $X$  распространяются две волны одинаковой природы (две волны на поверхности воды, две звуковые волны, две световые волны)  $y_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx)$  и  $y_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kx + \delta)$ , то в результирующей волне имеем  $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ . Это не есть просто определение результирующей волны. Последняя формула выражает собой экспериментальный факт и называется *принципом суперпозиции*. Величину  $\omega$  называют циклической частотой; она связана с обычной частотой  $\nu$  (другое часто встречаемое обозначение  $f$ ) и периодом колебаний  $T$  соотношением

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi f = 2\pi / T. \quad (1.1)$$

Величина  $k$ , называемая волновым числом, связана с длиной волны в среде  $\lambda$  аналогичным соотношением

$$k = 2\pi / \lambda. \quad (1.2)$$

В свою очередь, частота  $\nu$  и длина волны  $\lambda$  связаны друг с другом и со скоростью  $v$  волн в среде соотношением

$$v \cdot T = v / \nu = \lambda. \quad (1.3)$$

При переходе волны из одной среды в другую частота остаётся неизменной – изменяются скорость распространения волны и длина волны. В случае электромагнитных волн (в частности, света) при переходе волны из вакуума в среду с показателем преломления  $n$  имеем:

$$v = c / n \quad (1.4)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме (примерно 300 000 км/с),

$$\lambda = \frac{c / n}{\nu} = \frac{c / \nu}{n} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad (1.5)$$

где  $\lambda_0$  – длина электромагнитной волны в вакууме. К сожалению, индекс «0» часто опускают, и бывает непонятно, о какой длине волны говорят – в вакууме или в среде. В случае воздуха показатель преломления для электромагнитных волн в широком диапазоне частот близок к единице, поэтому величины  $\lambda_0$  и  $\lambda$  также близки друг к другу. Впрочем, для радиоволн в ионосфере это уже не так.

Для расчёта фазы волны при прохождении в среде с показателем преломления  $n$  расстояния  $l$  вводят понятие оптической длины пути

$$l_{\text{опт}} = nl, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} y(l, t) &= A \cos(\omega t - kl) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} nl\right) = \\ &= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} l_{\text{опт}}\right). \end{aligned}$$

Если две волны одинаковой частоты двигались в разных средах, то частота  $\omega$  и длина волны  $\lambda_0$  в вакууме у них будут одинаковыми; разность фаз  $\Delta\varphi$  для волн может «набежать», однако, за счёт разных оптических длин:

$$\Delta\varphi = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} l_{\text{опт}1} - \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} l_{\text{опт}2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (l_{\text{опт}2} - l_{\text{опт}1}). \quad (1.7)$$

Обычные длины при этом могут быть равны друг другу.

В случае, например, звуковых волн или электромагнитных волн большой длины волны (радиодиапазон) построить разные источники волн, дающие когерентные друг с другом волны, сравнительно несложно. Ситуация не такая простая для электромагнитных волн видимого диапазона (длины волн порядка микрометра). Только с появлением лазеров ситуация упростилась. До этого чаще всего с помощью линз и зеркал делали два (или больше) мнимых источника света, каждый из которых был изображением некоего (одного и того же!) действительного источника света. (Редкое исключение – опыт Юнга с двумя щелями.) Именно то, что мнимые источники были изображениями одного и того же действительного источника, делало их когерентными почти автоматически. (К сожалению, даже в этом случае при большой разности оптических длин для мнимых источников когерентность разрушается.)

Интерференция света – одно из проявлений того, что свет представляет собой волновой процесс, в котором колеблются векторы напряжённости электрического и магнитного полей. Поскольку эти две величины в волне не независимы, но связаны друг с другом (неким соотношением), можно рассуждать о колебаниях, например, только напряжённости электрического поля:

$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_0)$ . Интерференцию (и дифракцию) света учёные считают прямым доказательством того, что свет – это волна (или суперпозиция волн). Рассмотрение света в виде потока частиц (Ньютон) не смогло объяснить названных явлений.

Интерференция света наблюдается при наложении двух или нескольких световых пучков при условии когерентности волн. При этом интенсивность света в области перекрытия пучков имеет характер чередующихся светлых и тёмных полос, причём в максимумах интенсивность больше, а в минимумах – меньше суммы интенсивностей пучков. При использовании белого света интерференционные полосы оказываются окрашенными в различные цвета спектра. С интерференционными явлениями мы сталкиваемся довольно часто: цвета масляных пятен на асфальте, окраска замерзающих оконных стекол, рисунки на крыльях некоторых бабочек и жуков – всё это проявление интерференции света.

При сложении двух когерентных волн амплитуда в данной точке пространства будет максимальной, если колебания происходят синфазно (в точку одновременно приходят горбы двух волн или одновременно две впадины), и будет в данной точке минимальной, когда волны приходят в неё в противофазе (от одной из волн приходит горб, а от другой – впадина).

В световой волне видимого диапазона (от 0,4 до 0,8 мкм) напряжённость электрического поля колеблется с частотами порядка  $(4 \div 8) \times 10^{14}$  1/сек. Ни человеческий глаз, ни самые совершенные приборы не способны уследить за такими быстрыми изменениями поля световой волны. Все они реагируют на некие средние величины поля – средние за достаточно большой промежуток времени  $\tau$  (много больший периода колебаний,  $\tau \gg T$ ).

\* Скажем об этом чуть подробнее. В математике под средним значением переменной величины  $y(t)$  за время  $\tau$  понимают величину

$$\bar{y} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} y(t) dt. \quad (1.8)$$

При этом среднее от константы равно самой этой константе:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Const \cdot dt = Const \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt = Const \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \tau = Const. \text{ Для нас наибольший ин-}$$

терес представляют периодические функции. Среднее значение, например, косинуса (или синуса) будет близко к нулю. В самом деле,

$$\overline{\cos \omega t} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos \omega t \cdot dt = \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} = \frac{T}{\tau} \cdot \frac{\sin \omega \tau}{2\pi}, \text{ что при малом отношении } T/\tau$$

есть малая величина. Однако среднее от квадрата косинуса уже не есть малая величина:

$$\begin{aligned}\overline{\cos^2 \omega t} &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2\tau} \int_0^{\tau} (1 + \cos 2\omega t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2\tau} \cdot \tau + \frac{1}{2\tau} \cdot \frac{\sin 2\omega \tau}{2\omega} = \frac{1}{2} + \frac{T}{\tau} \cdot \frac{\sin 2\omega \tau}{4\pi} \approx \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(вторым слагаемым пренебрегаем). В 1-м случае косинус одинаково часто принимает то положительные, то отрицательные значения, а в среднем – нуль. Квадрат же косинуса всегда не отрицателен, а площадь под кривой  $y(t) = \cos^2 \omega t$  при  $T \gg \tau$  равна примерно половине площади прямоугольника под прямой  $y = 1$ .

Счастливым образом наш глаз (и современные приборы) реагируют не на среднее поле в световой волне (оно равно нулю), а на среднее от квадрата поля, которое называют интенсивностью волны:

$$I = \overline{E^2}. \quad (1.9)$$

Среднему же от квадрата поля пропорциональны плотность энергии в волне и поток энергии в ней.

В случае интерференции двух волн  $y_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  (например,  $\varphi_1 = -kx_1 + \delta_1$ ) и  $y_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$  имеем:  $\overline{y_1^2} = \frac{A_1^2}{2} \equiv I_1$ ,

$$\overline{y_2^2} = \frac{A_2^2}{2} \equiv I_2; \quad y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

для интенсивности в суммарной волне тогда получаем формулу:

$$\begin{aligned}I = \overline{y^2(x, t)} &= \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + 2A_1A_2 \cdot \overline{\cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)} = \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{2I_1} \cdot \sqrt{2I_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2).\end{aligned}$$

Если  $\varphi_1 = -kx_1$  и  $\varphi_2 = -kx_2$ , то

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cdot \cos k\Delta, \quad (1.10)$$

где  $\Delta = |x_1 - x_2|$  – так называемая разность хода. В более общем случае, когда две волны приходят в точку, пройдя по средам с разными показателями преломления, волновые числа  $k$  будут разными, – и требуется рассчитывать разность оптических длин. \*

**Пример 1.1.** Две радиостанции А и В излучают радиоволны на частоте  $f = 7,5 \text{ МГц}$  в фазе друг с другом. Расстояние между антеннами  $L = 110 \text{ м}$ . В каких точках между ними сигнал максимален? Ослаблением сигналов при удалении от станций пренебречь.

**Решение.** Пусть  $x$  – расстояние до одной из радиостанций, тогда  $(L - x)$  – расстояние до другой. Чтобы сигнал в точке наблюдения был максимален, необходимо, чтобы волны от отдельных станций в эту точку наблюдения приходили в фазе или со сдвигом на величину, кратную  $2\pi$ . На языке длин волн это означает, что разность оптических длин  $(L - x)$  и  $x$  равна нулю либо кратна длине волны:

$$(L - x) - x = m\lambda, \quad (*)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Для радиоволн показатель преломления в обычном воздухе (не в ионосфере)  $n \approx 1$ , поэтому  $\lambda \approx \lambda_0 = c/f = 40 \text{ м}$  (длина волны в воздухе приблизительно равна длине волны в вакууме). При этом обычная длина и оптическая практически совпадают друг с другом. Решая уравнение (\*), получаем:

$$x_m = (L - m\lambda) / 2. \quad (**)$$

Остаётся выбрать значения целых чисел  $m$  так, чтобы удовлетворить условию задачи, что точка наблюдения должна быть между станциями (а не за границами отрезка, соединяющего станции). Этому требованию удовлетворяют 5 чисел  $m$ :  $-2, -1, 0, +1, +2$ . Им соответствуют значения  $x = 15, 35, 55, 75, 95$  метров.

**(\*) Пример 1.2. «Просветление оптики».** Во многих оптических приборах для уменьшения потерь на отражение поверхности линз покрывают тонкой пленкой фторида магния ( $\text{MgF}_2$ ), показатель преломления которого  $n_2 = 1,38$  (показатель преломления стекла  $n_3 = 1,50$ ). Пусть на стекло перпендикулярно поверхности падает видимый свет с длиной волны  $\lambda = 0,550 \text{ мкм}$ . При какой минимальной толщине  $L$  покрытия отражение света вследствие интерференции волн резко ослабнет?

**Решение.** Отражённый свет ослабляется вследствие интерференции волн – волны, отражённой от наружной поверхности плёнки (1), и волны, отражённой от поверхности стекла и затем вышедшей из плёнки (2) (рис.1). (Чуть наклонное падение изображено для того, чтобы избежать наложения друг на друга разных линий.)

Разность оптических длин в этом случае равна  $2Ln_2$  (множитель «2» появился из-за того, что свету, прежде чем выйти из плёнки, нужно дойти до стекла и обратно). Для ослабления волн,

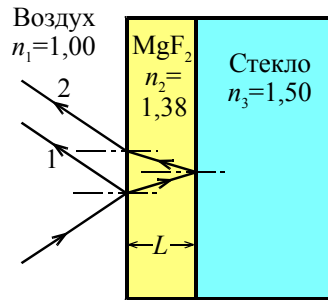


Рис. 1

необходимо, чтобы на выходе из пленки разность фаз равнялась  $\pi$  плюс число, кратное  $2\pi$ . На языке длин волн это означает:

$$2Ln_2 = \lambda/2 + m\lambda.$$

В данном примере длина волны  $\lambda = 0,550$  мкм – это длина волны в вакууме или в воздухе (то, что раньше обозначалось как  $\lambda_0$ : длина волны в стекле при этом буде равна  $\lambda/(1,5)$ , а в плёнке фторида магния –  $\lambda/(1,38)$ ).

Отсюда получаем  $L_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} \approx 99,6$  нм (для сравнения: характерный размер большинства атомов порядка 0,1 нм).

**Замечание 1.** Нами **не** было доказано, что амплитуда волны, вышедшей из пленки (но дошедшей сначала до стекла и отразившейся), равна амплитуде волны, сразу отраженной от пленки. Для того чтобы две волны погасили друг друга, необходимо, чтобы они были в противофазе (это мы учли), но нужно ещё, чтобы их амплитуды были равны друг другу. Последнее, однако, не было доказано (это выходит за рамки школьной физики).

**Замечание 2.** Оказывается, что при отражении от оптически более плотной среды, происходит скачкообразное изменение фазы волны на  $\pi$ . Доказательство этого также выходит за рамки школьной программы. К счастью, в данном примере обе волны отражались от оптически более плотной среды, и каждая из них получила сдвиг по фазе на одно и то же значение  $\pi$ .

**Замечание 3.** Корректный расчёт требует рассмотрения многократных отражений волны, прошедшей в пленку. Эта волна, дойдя до стекла, частично отразится, но частично пройдет в него (для целей просветления оптики нужно, конечно, чтобы проходило как можно больше света). Отразившаяся от стекла волна лишь частично выйдет наружу: частично она отразится от внутренней поверхности пленки и направится снова к стеклу и т. д. \*

**Б.** Явление **дифракции** волн (не обязательно – только световых) есть проявление интерференции вторичных волн от воображаемых источников, расположенных на волновых фронтах в любые предыдущие моменты времени (**принцип Гюйгенса-Френеля**). Гюйгенс впервые стал рассуждать о вторичных источниках волн, Френель же впервые применил к ним соображения интерференции волн. Разумеется, интерференция волн от бесконечного числа воображаемых источников – совсем не простая вещь, а теория этого явления есть сложная математическая теория, – сложнее, чем теория интерференции волн всего от

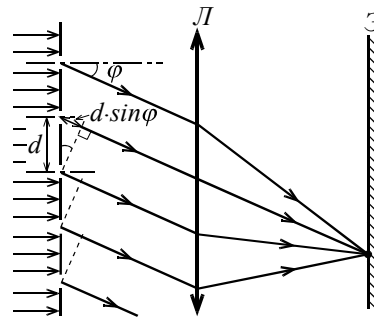


Рис. 2



двух источников! Тем более удивительно, что для практически важного оптического прибора, *дифракционной решётки*, можно написать простую формулу для положения главных максимумов.

Пусть на дифракционную решётку в виде плоскости с многочисленными регулярно изготовленными параллельными друг другу щелями перпендикулярно решётке падает свет с длиной волны  $\lambda$ . За решёткой параллельно решётке ставят линзу, в фокальной плоскости которой помещают экран, параллельный плоскости решётки (рис.2). Каждая щель представляет собой источник вторичных волн. На экране видят сложную картину, состоящую из очень узких полос (тем уже, чем больше штрихов  $N$  у решётки). Некоторые из полос будут очень яркими (главные максимумы), некоторые слабо заметными, будут и тёмные полосы. Направления на главные максимумы определяются формулой

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (1.11)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – так называемый порядок дифракции,  $d$  – период решётки (не ширина щелей!). Зная период решётки  $d$  и измеряя угол  $\varphi$  на  $m$ -й главный максимум, можно определить длину волны. Бывает и наоборот: зная длину волны света, находят период решётки.

Чем больше щелей содержит решётка, тем более узкими будут главные максимумы. Угловое расстояние между соседними темными полосами (эта величина совпадает с шириной главных максимумов) равна

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi}, \quad (1.12)$$

где  $\varphi$  даёт направление на соответствующий максимум в дифракционной картине. Узость дифракционных максимумов от дифракционной решётки позволяет использовать её в качестве спектрального прибора. Пусть на решётку последовательно падал свет, например, жёлтого цвета, но с двумя слегка разными длинами волн. На глаз мы можем порой и не сказать, отличаются эти два жёлтых цвета друг от друга или нет. Но положения их дифракционных максимумов будут существенно разными, а вследствие узости полос – легко отличимыми друг от друга.

**Пример 1.3.** На дифракционную решётку, содержащую 400 штрихов на 1мм, падает нормально монохроматический свет с длиной волны 0,6 мкм. Найти общее число главных дифракционных максимумов, которые даёт эта решётка. Определить угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

**Решение.** Максимальный порядок дифракции определяется условием

$$|\sin \varphi| \leq 1; \text{ тогда в силу (1.11) имеем } \left| \frac{m\lambda}{d} \right| \leq 1, \text{ или}$$

$$|m| \leq d / \lambda = \frac{10^{-3} / 400}{0,6 \cdot 10^{-6}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 10^{-6}} \approx 4.$$

Т. е. всего будет видно  $2m_{\max} + 1 = 9$  полос. Угол дифракции, соответствующий последнему максимуму ( $m = 4$ ), находим из условия (1.11):

$$|\sin \varphi_4| = 4\lambda / d = 4 \frac{0,6}{4} = 0,6, \text{ откуда } |\varphi_{\pm 4}| = 36,9^\circ.$$

**(\*) Пример 1.4.** Линии в спектре водорода имеют длину волны  $\lambda_1 = 656,45$  нм, а дейтерия –  $\lambda_2 = 656,72$  нм. Какое число штрихов должна иметь дифракционная решётка, чтобы эти линии в спектре 3-го порядка были различимы?

**Решение.** Из условия (1.11)  $d \sin \varphi = m\lambda$  при  $m = 3$  находим угловое расстояние между главными максимумами  $\Delta\varphi$  для разных длин волн:

$$d \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\varphi = 3(\lambda_2 - \lambda_1), \text{ или } \Delta\varphi = \frac{3(\lambda_2 - \lambda_1)}{d \cdot \cos \varphi}.$$

Для того чтобы линии были различимы, угловое расстояние между полосами одного и того же порядка, но для разных длин волн, должно быть, очевидно, не меньше ширины самих

$$\text{полос } \delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi} \quad (1.12), \text{ то есть } \frac{3(\lambda_2 - \lambda_1)}{d \cdot \cos \varphi} \geq \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi}.$$

$$N \geq \frac{\lambda}{3(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

В качестве  $\lambda$  здесь возьмём среднее арифметическое для двух близких длин волн. В итоге получаем:  $N \geq 810,60$ , то есть  $N_{\min} = 811$ .

Заметим, что в ответ не вошёл период решётки (не заданный в условии задачи). Неопределённым оказался и угол  $\varphi$ , соответствующий 3-му порядку в дифракционной картине. Эти величины просто сократились в процессе вычислений. \*

## §2. Кванты энергии Планка

Начиная с конца XVII века, в физике сосуществовали, грубо говоря, два представления о свете – как о потоке неких частиц (**корпускулярная** теория Ньютона) и как о некоем **волновом** процессе (Гюйгенс). У каждого из представлений были свои достоинства и недостатки, свои сторонники и противники. Весь XVIII век шли споры между сторонниками двух теорий. К началу XIX века, трудами, прежде всего Юнга и Френеля победу стала одерживать волновая теория, естественным образом объяснившая явления интерференции и дифракции. «Естественным» – не значит «лёгким», «элементарным». Добавим к этому, что Юнг и Френель, строго говоря, рассуждали о непонятном волновом процессе (ими не было понято, что именно колеблется в световой волне). Лишь в 60-е годы XIX века появилась теория электромагнетизма Максвелла и его же электромагнитная теория света, по которой в световой волне колеблются векторы напряжённости электрического и магнитного полей. Теория Мак-

свелла окончательно утвердилась в статусе **теории**, а не гипотезы, после опытов Герца (в конце XIX в.).

Макс Планк был ярким сторонником электромагнитной теории Максвелла и его теории света, в частности. Когда он приступил к изучению так называемого «**излучения абсолютно чёрного тела**» (АЧТ), он не мог и предвидеть, чем это закончится. Речь идёт об электромагнитном излучении, всегда существующем внутри любой полости. Если оно выходит из него через малое отверстие, говорят об «излучении абсолютно чёрного тела».

Для вывода некоей формулы (спектра излучения АЧТ) Планку в 1900 г. пришлось сделать революционный шаг – предположить, что поглощение и испускание энергии происходит **не непрерывно**, но некими минимальными порциями, **квантами**. Планк представлял себе стенки полости как набор неких гармонических осцилляторов с разными частотами. Современных представлений об атомном строении вещества тогда ещё не было. Но Планку и другим физикам удалось доказать, что от конкретной модели вещества выводы не зависят, поэтому в рассуждениях можно пользоваться любой удобной моделью.

Для вывода некоей важной формулы, согласующейся с экспериментом (это было существенно!), Планку пришлось предположить, что осциллятор с частотой  $\nu$  может иметь **не любые** значения энергии из непрерывного набора значений энергии, но лишь **вполне определённые (дискретные) значения**, даваемые формулой

$$E_n = (n + 1/2)h\nu, \quad (2.1)$$

которая теперь носит имя Планка, где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $\nu$  – частота колебаний,  $h$  – константа, носящая ныне имя Планка. По современным измерениям  $h \approx 6,63 \times 10^{-34}$  Дж·с.

Для Планка идея квантов была актом отчаяния. Он долгое время считал, что это – лишь предположение, упрощающее вывод формул, и что со временем можно будет вывести формулы из классических соображений (без всяких скачков по энергии). В последующие годы он сделал несколько попыток такого вывода, но все они оказались безуспешными. Идею квантов с большим воодушевлением подхватили другие физики (Бор, Гейзенберг, Паули, Дирак), чьими трудами и было построено здание квантовой теории.

**Пример 2.1. Почему в обыденной жизни мы не чувствуем квантования энергии?** Представим шарик массой  $m = 10$  г, колеблющийся на пружинке. Пусть шарик, первоначально покоившемуся в положении равновесия, сообщали скорость  $v_0 = 10$  см/с, и максимальное его отклонение от положения равновесия составило  $A = 10$  см. 1) Оцените какому числу  $n$  квантов соответствует энергия шарика. 2) На сколько надо увеличить скорость шарика  $v_0$ , чтобы увеличение энергии составило один квант энергии, т. е.  $\Delta E = h\nu$ ?

**Решение.** Число  $n$  можно найти по формуле для полной энергии  $\frac{mv_0^2}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$ , откуда  $n = \frac{mv_0^2}{2h\nu} - \frac{1}{2} \approx \frac{mv_0^2}{2h\nu}$ . (Мы пренебрегли «1/2» т. к. вскоре убедимся, что первое слагаемое чрезвычайно велико.) Частоту найдём по формуле  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ , где  $k$  – коэффициент жесткости пружины. Последний опре-

делился бы из закона сохранения энергии:  $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$ . Мы не станем искать  $k$ , а найдём сразу частоту  $\nu = 1/2\pi \approx 0,16$  Гц. Тогда для  $n$  получаем чудовищно большое число  $n \approx 5 \times 10^{29}$ . С чем можно сравнить его? Например, в одном кубометре воды содержится примерно  $3 \times 10^{28}$  молекул воды, т. е. на порядок меньше. Но когда мы отливаем воду даже очень малыми порциями, мы вовсе не задумываемся о точном числе «отлитых» молекул. Долгое время люди вообще не знали о том, что вещества состоят из молекул и атомов. Вода казалась непрерывной субстанцией. Считалось, что можно отлить сколь угодно малую часть воды. Теперь мы знаем, что не можем отлить менее одной молекулы воды. Но это нас несколько не смущает: мы никогда и не отливаем 3, 100 или даже миллион молекул. Мы всегда отливаем значительно большее число молекул. В капле воды радиусом 1 мм содержится  $1,4 \times 10^{20}$  молекул. Думать, что мы можем проконтролировать убыль или прибавление числа молекул воды в её кубометре даже на миллиард – чистая фантазия. Говорить о «кванте» воды (о молекуле) в обыденной жизни, конечно, можно, но большинство людей спокойно без этого обходятся.

Точно так же люди долгое время не подозревали ни о каком квантовании энергии. В обычной механике энергию всегда считали непрерывной величиной. Добавление шарiku на пружинке даже малой (по обыденным меркам) порции энергии означает увеличение числа  $n$  сразу на огромное значение.

Чтобы ответить на второй вопрос в задаче, запишем формулу для приращения энергии гармонического осциллятора при увеличении квантового числа  $n$  на единицу:

$$\begin{aligned} h\left((n+1) + \frac{1}{2}\right)\nu - h\left(n + \frac{1}{2}\right)\nu &= h\nu = \frac{m}{2}((v_0 + \Delta v_0)^2 - v_0^2) = \\ &= m\left(v_0 \cdot \Delta v_0 + \frac{(\Delta v_0)^2}{2}\right) \approx mv_0 \cdot \Delta v_0, \end{aligned}$$

откуда получаем  $\Delta v_0 = \frac{h\nu}{mv_0} = \frac{hv_0 / (2\pi A)}{mv_0} = \frac{h}{2\pi mA} = \frac{\hbar}{mA} \approx 10^{-31}$  м/с, где

$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. Понятно, что с такой точностью задать начальную скорость (чтобы она отвечала строго определённом числу  $n$ ) для обычного шарика на пружинке не представляется возможным. Ситуация, однако, меняется при переходе к миру атомов. У электрона, например, масса

$m = 0,9 \times 10^{-30}$  кг и характерные амплитуды  $A$  его движения (порядка  $10^{-10}$  м) чрезвычайно малы. Поэтому по формуле  $\Delta v_0 = \frac{\hbar}{mA}$  мы получаем **не** маленькое изменение начальной скорости – порядка  $10^6$  м/с.

### §3. Фотоэффект. Фотоны

Вырывание электронов из вещества под действием света (электромагнитного излучения) называют фотоэлектрическим эффектом (или просто – фотоэффектом, но есть и более точное название «внешний фотоэлектрический эффект», подчеркивающее, что электроны вырываются наружу). Для изучения фотоэффекта используют вакуумную лампу, включённую по схеме на рис. 3, с холодным катодом (при этом можно пренебречь термоэмиссией электронов). Облучая катод светом определённой частоты и интенсивности, строят зависимость силы тока от напряжения между катодом и анодом (говорят: снимают вольтамперную характеристику лампы.) Типичная кривая из тех, которые при этом получаются, показана на рис. 4.

Что же оказалось необъяснимым электродинамикой Максвелла в фотоэффекте? Понятно, что электрический ток будет тем больше, чем большее число электронов будет вырвано из катода. Ясно, что чем больше интенсивность света, тем больше будет таких электронов. Это, можно сказать, видели (ток насыщения  $I_{\text{нас}}$  растёт при увеличении интенсивности света). Но возникли неприятности. Если на анод подать отрицательный по отношению к катоду потенциал, то в лампе возникнет задерживающее электроны электрическое поле. При этом не все электроны, вылетевшие с катода, смогут достичь анода и дать ток. Мяч, брошенный вверх, вскоре упадет вниз. Он может и не долететь до 10-го этажа. Мячу для этого нужно сообщить достаточно большую скорость.

Чтобы электроны достигли анода, они при вылете из катода тоже должны (при «минусе» на аноде) иметь достаточно большую скорость, т. е. большую кинетическую энергию. Ожидалось, что эта энергия будет пропорциональна интенсивности света (квадрату напряженности электрического поля в волне, которое, как считалось, разгоняет электроны). На опыте такой закономерности **не** обнаружили. Видели другое: энергия электронов, вырванных светом из катода, увеличивается **не** с ростом интенсивности, а с ростом частоты света. Причём, чем меньше частота, тем меньшее задерживающее поле на аноде надо прикладывать, чтобы прекратился ток. А при частотах, меньших некоторой (разной для разных веществ), электроны вообще нельзя вырвать из катода (при этом говорят о «красной границе фотоэффекта»).

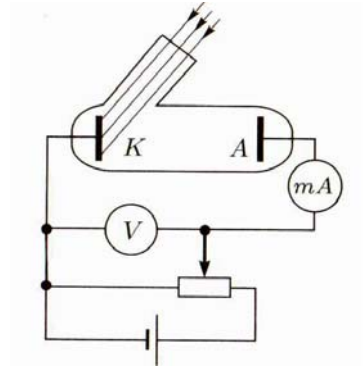


Рис. 3

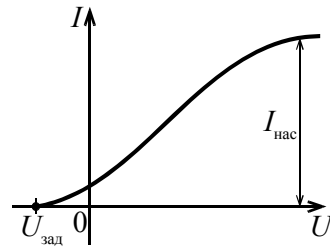


Рис. 4

Эйнштейн в 1905 г. весьма элегантно объяснил фотоэффект, предположив, что свет частоты  $\nu$ , падающий на катод, представляет собой поток частиц, каждой из которых он приписал (в духе формулы Планка) энергию  $\mathcal{E} = h\nu$ . Позже эти частицы назвали **фотонами**. Когда какой-нибудь из фотонов достигает катода, он встречает какой-нибудь электрон катода. Фотон может быть **мгновенно** поглощен этим электроном. Энергия  $h\nu$  в результате переходит к электрону, и у электрона появляется возможность преодолеть силы, удерживающие его в катоде. При этом, правда, расходуется часть приобретённой энергии на совершение работы  $A$  против удерживающих сил (говорят о **работе выхода электрона**). В итоге кинетическая энергия вылетевших электронов оказывается равной

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - A. \quad (3.1)$$

Эту формулу называют формулой Эйнштейна для фотоэффекта. (**Уточнение.** Формула (3.1) даёт максимальную энергию вылетевших электронов. Если электрон поглотит фотон не у самой поверхности катода, то он по дороге к поверхности может растерять часть энергии. В результате его энергия на выходе из катода будет меньше, чем  $h\nu - A$ . А вот набрать по дороге энергию за счёт столкновений с другими электронами ему будет, оказывается, весьма затруднительно. Но в этом физики разобрались чуть позже.)

В конце концов, именно с формулировкой «за работы по фотоэффекту и другие работы по теоретической физике» Эйнштейн получил Нобелевскую премию по физике. Но это было уже в 1925 г. Не надо думать, что все физики тут же с восторгом ухватились за идею Эйнштейна, что свет есть поток частиц (фотонов). Родоначальник теории квантов, Планк, представляя Эйнштейна Берлинской академии наук, говорил примерно так: «Не будьте слишком строги к нашему молодому коллеге за то, что он иногда говорит о свете как о потоке частиц». К тому же, какую частоту мы приписываем частице? Частоту коле-

баний **чего?** Эйнштейн осознавал эту трудность. Он понимал, что представление света в виде потока фотонов — не просто возврат к корпускулярной теории света Ньютона. В том же 1905 г. вышла его основополагающая статья по теории относительности, которая называлась «К электродинамике движущихся сред», в которой он был ... последовательным сторонником электродинамики Максвелла (с его электромагнитной природой света). Эйнштейн (и другие физики) сознавал, что тогдашняя картина мира — временная, и не всё физикам в ней пока до конца понятно. Эта ситуация в физике получила название **корпускулярно-волновой дуализм** (двойственность) для света: при трактовке фотоэффекта свет удобно считать потоком частиц; при объяснении явлений интерференции и дифракции — волновым процессом.

Но и просто распространение света часто удобно рассматривать как поток частиц. Например, при распространении световой волны большой интенсивности вдоль прямой (луч) можно, как и в случае газа, говорить о средней концентрации  $n$  частиц (фотонов) в единице объема, о плотности потока  $nc$  этих частиц (количестве частиц, пересекающих поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$  за одну секунду перпендикулярно поверхности; считаем, что все фотоны движутся со скоростью света в вакууме  $c$ ), о плотности энергии в световой волне  $n \times h\nu$ , о плотности потока энергии в световой волне  $nc \times h\nu$ .

Простую трактовку при этом получает и такое сложное явление, как давление света, падающего на поверхность (экспериментально открытое нашим соотечественником Лебедевым). Дело в том, что согласно теории относительности, частицам, движущимся со скоростью света, следует приписать нулевую массу и импульс, равный  $p = \mathcal{E}/c = h\nu/c = h/\lambda$ . Для световой волны, описанной выше, имеем тогда плотность потока импульса  $nc \times (h\nu/c) = nh\nu$  (что в точности совпадает с плотностью энергии фотонного газа). Если все фотоны поглощаются поверхностью, то импульс всех этих фотонов передаётся поверхности. Если  $1 \text{ м}^2$  поверхности за  $1 \text{ с}$  поглощает от фотонов  $nh\nu$  импульса перпендикулярного поверхности, то по формуле закона Ньютона  $\Delta p / \Delta t = F$  это и есть сила со стороны фотонов, действующая на поверхность. Однако раз речь идёт об  $1 \text{ м}^2$ , значит, величина  $nh\nu$  как раз совпадает с давлением. Если все фотоны отражаются от поверхности (как от зеркала), то модуль изменения импульса каждого из фотонов  $\Delta p_1$  будет в 2 раза больше, чем при поглощении:  $2h\nu/c$  ( $\Delta p_1 = p_{\text{отраж}} - p_{\text{падающ}} = -h\nu/c - h\nu/c$ ). Соответственно, давление света на зеркальную поверхность будет равно уже  $2nh\nu$ .

**Пример 3.1.** Измерения зависимости задерживающего напряжения  $U_{\text{зад}}$  или напряжения отсечки (т. е. напряжения, при котором фототок прекращается) от длины волны света, падающего на цезиевую пластину, показали следующее. При освещении светом с длиной волны  $\lambda_1 = 0,4 \text{ мкм}$  модуль напряжения отсечки составил  $U_1 = 1,19 \text{ В}$ , а при  $\lambda_2 = 0,5 \text{ мкм}$  он равнялся

$U_2 = 0,57$  В. Пользуясь лишь этими экспериментальными данными (не пользуясь табличными значениями постоянной Планка  $h$ , скорости света в вакууме  $c$ , заряда электрона  $e$ ; считается, что, например, постоянная Планка сама могла быть найдена по этим экспериментальным данным) определить длину волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующую красной границе фотоэффекта для цезия.

**Решение.**  $\lambda_{\max}$  соответствует случаю, когда электроны покидают фотокатод с почти нулевой скоростью; вся энергия светового кванта тратится на со-

вершение работы выхода:  $h\nu_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = A$ , откуда

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{A}. \quad (*)$$

Напряжение отсечки соответствует случаю, когда электроны, вылетающие с катода с ненулевой скоростью ( $\lambda < \lambda_{\max}$ ), тормозясь электрическим полем лампы, но долетев до анода, теряют всю свою кинетическую энергию, – она переходит в потенциальную:  $\frac{mv^2}{2} = -e(-U)$ . Запишем для обоих случаев фор-

мулу Эйнштейна для фотоэффекта:  $\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_1$  и  $\frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_2$ . Решая эту систему уравнений относительно  $h$  и  $A$ , находим

$$A = \frac{e(U_1\lambda_1 - U_2\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (**)$$

Произведения  $eU$  дают энергии в электрон-вольтах. (Напомним: электрон-вольт – это энергия, которую приобретает электрический заряд, равный элементарному ( $1,6 \times 10^{-19}$  Кл), пройдя разность потенциалов в 1 вольт:  $1 \text{ эВ} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл} \times 1 \text{ В} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Дж}$ .)

Подставляя (\*\*) в (\*), находим

$$\lambda_{\max} = \frac{\lambda_2\lambda_1(U_1 - U_2)}{U_1\lambda_1 - U_2\lambda_2} = 0,65 \text{ мкм}.$$

(\*) **Пример 3.2.** Излучение аргонного лазера с длиной волны  $\lambda = 500$  нм сфокусировано на плоском фотокатоде в пятно диаметром  $d = 0,1$  мм. Работа выхода фотокатода  $A = 2$  эВ. На анод, расположенный на расстоянии  $l = 30$  мм от катода, подано ускоряющее напряжение  $U = 4$  кВ. Найти диаметр пятна фотоэлектронов на аноде. Анод считать плоским и распо-

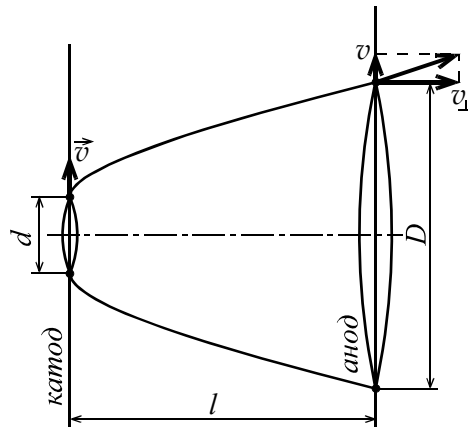


Рис. 5



женным параллельно поверхности катода.

**Решение.** Диаметр пятна  $D$  на аноде задают электроны, которые вылетают с катода почти параллельно поверхности катода (см. рис.5):  $D = d + 2v\tau$ , где  $v$  – максимальная скорость электронов, вылетающих с фотокатода,  $\tau$  – время пролёта электронами расстояния между катодом и анодом. Скорость найдём

из формулы Эйнштейна для фотоэффекта  $\frac{mv^2}{2} = h\frac{c}{\lambda} - A$ , откуда

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( h\frac{c}{\lambda} - A \right)} \approx 4,13 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Эта скорость много меньше скорости света в вакууме  $c$ , поэтому нет необходимости пользоваться сложными формулами теории относительности. (На самом деле, нужно будет ещё проверить, что и скорость электрона вблизи анода будет много меньше, чем  $c$ , что мы сделаем в конце.)

Время  $\tau$  найдём из формулы для равноускоренного движения  $l = \frac{a\tau^2}{2}$ , где по 2-му закону Ньютона для электрона в постоянном и однородном электрическом поле:  $a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{ml} \approx 2,34 \cdot 10^{16} \text{ м/с}^2$ . (Обратите внимание на порядок

величины ускорения электрона! Во сколько раз оно больше ускорения свобод-

ного падения!) Подстановка этого значения в формулу для времени  $\tau = \sqrt{\frac{2l}{a}}$

даёт  $\tau \approx 1,60 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ .

Окончательно для диаметра пятна на аноде получаем  $D \approx 1,42 \text{ мм}$ .

Проверим ещё, не разгоняются ли электроны электрическим полем до скоростей, близких к скорости света. Двигаясь ускоренно, электрон перед подлётом к аноду приобретёт компоненту скорости, перпендикулярную аноду, равную  $v_{\perp} = a\tau \approx 3,74 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ . Компонента скорости, параллельная аноду, будет такой же, как при вылете из катода, и т. к. она много меньше, чем  $v_{\perp}$ , то электроны будут подлетать к аноду почти перпендикулярно ему со скоростью равной примерно  $v_{\perp} \approx 3,74 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ . Это – совсем не маленькая скорость. Всё же она оставляет лишь 12,5% от скорости света в вакууме.\*

**Пример 3.3.** Оценить, сколько фотонов видимого диапазона излучает 100-ваттная лампочка за 1 секунду. Считать, что лишь 5% энергии лампочка излучает в видимом диапазоне частот. Среднюю длину волны света в этом диапазоне принять равной 0,5 мкм.

**Решение.** Пусть  $\dot{N}$  – искомое число фотонов, излучаемых лампочкой в единицу времени. Тогда количество энергии, излучаемой в видимом диапазоне можно записать в виде:  $\dot{N} \cdot h\nu = 0,05 \cdot P$ , где  $P = 100$  Вт. Отсюда получаем  $\dot{N} = 0,05 \cdot P / h\nu \approx 1,3 \times 10^{19}$  фотонов/с. Огромное число!

**Пример 3.4. Фотоны. «Фотонная ракета».** Оценить, какой мощности  $P$  лампочку нужно вернуть в рефлектор настольной лампы массой  $m = 1$  кг, чтобы она взлетела со стола под действием сил светового давления?

**Решение.** Для того чтобы лампа взлетела, необходимо, чтобы сила давления со стороны света на отражающую поверхность лампы, действующая вверх, превысила бы силу тяжести  $mg$ , действующую на лампу вниз. Предположим (для оценки), что все фотоны, испущенные лампой, в конце концов, летят вертикально вниз. Каждому из них был сообщен импульс  $p = h / \lambda$ , где

$\lambda$  – средняя частота фотонов. Пусть лампа излучает  $\dot{N}$  фотонов за одну секунду. Суммарный импульс, сообщённый всем фотонам в единицу времени, может быть тогда оценен по формуле  $\dot{N} h / \lambda$ . Он был сообщён фотонам лампой. Лампа (по 2-му закону Ньютона  $dp/dt = F$ ) действовала с такой силой на фотоны. Значит, фотоны, в свою очередь (по 3-му закону Ньютона), действовали на лампу с силой, равной  $\dot{N} h / \lambda$ . Таким образом, должно выполняться равенство

$$\dot{N} h / \lambda = mg. \quad (*)$$

Считая (по максимуму), что вся энергия, выделившаяся в нити накаливания лампы, передаётся фотонам и уносится ими, запишем формулу для энергии:

$$P = \dot{N} \cdot h\nu = \dot{N} \cdot hc / \lambda. \quad (**)$$

Согласно (\*) и (\*\*), получаем  $P = mg \times c = 3 \times 10^9$  Вт. (!) В атомной бомбе это получается «само собой», – и там давление излучения порядка  $10^{11}$  атм  $\approx 10^{16}$  Па. Давление, производимое солнечным светом на Земле, наоборот, чрезвычайно мало, – порядка  $10^{-11}$  атм. (Опыты Лебедева, изучавшего давление света, были чрезвычайно тонкими!)

#### §4. Волны де Бройля для электронов

В 1924 г. Луи де Бройль высказал гипотезу, что волновыми свойствами обладают не только фотоны, но и все частицы вообще. Поначалу эта идея казалась совершенно абсурдной, и только высокое происхождение спасло де Бройля от «побития камнями». Эйнштейн же поддержал идею! Де Бройль распространил формулы Планка – Эйнштейна для энергии  $\mathcal{E} = h\nu$  и для импульса

$$p = h / \lambda \quad (4.1)$$

на любые частицы. Было, правда, не понятно, что колеблется в волне де Бройля. (Что понимать под частотой для шарика? Что такое длина волны для него?) В случае звука всё понятно – колеблются частицы воздуха, в случае света – напряжённости электрического и магнитных полей. А здесь **что?** Была гипотеза, что так, периодически в пространстве и во времени, изменяется плотность электрона (мол, электрон – не точка, а что-то более или менее размазанное в пространстве). Но эта гипотеза не выдержала «испытания на прочность». Тем не менее, спустя всего лишь год после появления гипотезы де Бройля экспериментаторам удалось наблюдать дифракцию электронов! Тем самым, было доказано прямым способом, что с электроном связан некий волновой процесс. Но **какой?** Всё-таки, волны де Бройля – это волны **чего?** – Физики ещё долго об этом спорили, притом, очень горячо. (В чём-то ситуация здесь напоминает ситуацию с теорией Френеля дифракции света: он многое объяснил, но неправильно понимал, **что такое** световая волна. Это волна **чего?** Гению было достаточно и неправильного понимания!)

После работ де Бройля в физике утвердился корпускулярно-волновой дуализм для всех частиц материи. Физики по-прежнему во многих случаях рассуждали об электроны, как о малюсеньком шарике (даже – точке), но в некоторых случаях (таких как дифракция электронов) приходилось рассуждать о нём как о волне. По современным представлениям (Борн, 1926) волна де Бройля – это, грубо говоря, волна вероятности того, что электрон можно найти в заданной точке пространства. Шредингер в 1926 г. существенно развил идею де Бройля: он показал, как можно вычислять дебройлевскую волну в различных физических ситуациях. В результате появилась квантовая теория атомов, молекул, кристаллов (металлов и полупроводников), ... Появились транзисторы, микросхемы, компьютеры, мобильники и всё, всё, всё!

**Пример 4.1.** Какой кинетической энергией должен обладать электрон, чтобы его длина волны де Бройля была равна  $0,1 \text{ нм} = 10^{-10} \text{ м}$ ? (Эта длина порядка размеров атомов большинства химических элементов.)

$$\begin{aligned} \text{Решение. } K &= \frac{p^2}{2m} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 0,911 \cdot 10^{-30} (10^{-10})^2} = \\ &= 2,41 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} = \frac{2,41 \cdot 10^{-17}}{1,60 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} \approx 150 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Эта энергия много меньше энергии покоя электрона  $mc^2$  (примерно равной  $0,5 \text{ МэВ}$ ), поэтому мы вправе были пользоваться нерелятивистской формулой для кинетической энергии.

**Пример 4.2.** Ускоряющее напряжение в электронно-лучевой трубке кинескопа  $25 \text{ кВ}$ . Оценить длину волны де Бройля электрона.

**Решение.** Кинетическая энергия, которую приобретает электрон, равна

$eU = 25\text{кэВ} = 2,5 \times 10^4 \text{ эВ}$  много меньше энергии покоя электрона (примерно  $0,5 \text{ МэВ} = 5 \times 10^5 \text{ эВ}$ ), поэтому можно пользоваться формулами механики Ньютона (а не теории относительности):

$$eU = \frac{p^2}{2m} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m},$$

откуда находим  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \approx 0,77 \times 10^{-11} \text{ м}$ . Эта длина меньше размеров са-

мого маленького атома (диаметр атома гелия порядка  $0,6 \times 10^{-10} \text{ м}$ ).

**Пример 4.3. Почему макроскопические объекты (даже и очень маленькие) не показывают волновых свойств?** Оценить среднеквадратичную скорость капельки тумана с радиусом  $0,1 \text{ мкм}$ , взвешенной в воздухе при комнатной температуре. Оценить длину волны де Бройля такой капельки.

**Решение.** Среднеквадратичная скорость  $v_{\text{ср.кв.}}$  капельки массой  $m$  связана с температурой  $T$  соотношением  $\frac{mv_{\text{ср.кв.}}^2}{2} = \frac{3}{2}kT$ , где  $k \approx 1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}$  – постоянная Больцмана. Отсюда находим скорость  $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ , где

$$m = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3 \text{ – плотность воды}).$$

Подставляя  $r = 10^{-7} \text{ м}$ , получаем массу капли  $m \approx 4,2 \times 10^{-18} \text{ кг}$ ; для среднеквадратичной скорости тогда при  $T = 300 \text{ К}$  получаем оценку  $v_{\text{ср.кв.}} \approx 0,054 \text{ м/с} \approx 5,4 \text{ см/с}$ . Этой скорости соответствует импульс  $p = mv_{\text{ср.кв.}}$ , а по формуле де Бройля этому импульсу отвечает длина волны

$$\lambda = \frac{h}{mv_{\text{ср.кв.}}} \approx 2,9 \times 10^{-15} \text{ м}.$$

Это – очень маленькая длина: она много меньше размеров самых маленьких атомов (порядка  $10^{-10} \text{ м}$ ). Она даже меньше размеров атомных ядер. Волны де Бройля (как и любые другие волны) могли бы проявить себя в опытах по интерференции или дифракции. Но для этого размеры объектов, на которых бы они дифрагировали, должны быть сопоставимы с длиной волны. Понятно, что весьма затруднительно построить объект размером меньше атомного ядра. Поэтому частицы с такими маленькими длинами волн, как у капель тумана, просто никак не могут проявить своих волновых свойств.

### §5. Планетарная модель атома Резерфорда и теория атома водорода Бора

Исторически первой моделью атома была, по-видимому, модель атома Томсона (1902). В ней предполагалось, что в простейшем атоме – атоме водо-

рода – положительный заряд, равный по модулю заряду электрона, равномерно распределён внутри шара радиусом порядка  $R = 10^{-10}$  м, а электрон в невозбужденном атоме покоится в центре шара. Роль положительного заряда была пассивной: он всегда покоился, – двигался (колебался) лишь электрон. Однако эта модель не смогла объяснить основных закономерностей излучения и поглощения света атомами (см. Пример 5.1).

На смену модели Томсона пришла модель атома, предложенная Резерфордом (1911). Согласно этой модели атом похож на солнечную систему: в центре располагается очень маленькое по размеру положительно заряженное атомное ядро (диаметром порядка  $10^{-14}$  м), вокруг которого вращаются, как планеты по орбитам, отрицательно заряженные электроны. Масса ядра много больше массы электронов, что позволяет считать ядро в первом приближении неподвижным. Радиусы орбит и размеры атомов порядка  $10^{-10}$  м, т. е., грубо говоря, на 4 порядка больше размеров ядра. Последнее обстоятельство позволяет говорить о почти точечном ядре. В нормальном состоянии положительный заряд ядер по модулю в точности равен суммарному отрицательному заряду всех электронов атома, – так что в целом атом электрически нейтрален. При отрыве электрона от атома возникает ион – положительно заряженная частица.

Модель Резерфорда многое прояснила, – например, в экспериментах по рассеянию так называемых  $\alpha$  – частиц (ядер атомов гелия). Но у неё (как и у её предшественницы – модели Томсона) был один существенный изъян: физики знали, что при любом ускоренном движении заряженной частицы она будет излучать электромагнитное излучение, а излучая, терять энергию. Поэтому электрон в атоме, двигаясь по непрямым траекториям, т. е. ускоренно, довольно быстро должен просто упасть на ядро. Но этого **не** происходит! Почему? Не понятно.

Некое решение проблемы в 1913 г. предложил Бор. Его теория атома водорода в модели Резерфорда была почти квантовой. Почему «**почти** квантовой»? Дело в том, что местами теория была практически ньютоновской. Однако на движение электрона насильственно накладывались некие квантовые условия. Скорее всего, от такого странного гибрида классических и квантовых представлений просто отмахнулись бы, **но** теория блестяще описывала экспериментальные данные (по крайней мере, для атома водорода). А от этого не отмахнёшься!

Бор постулировал (предположил), что если электрон в атоме движется по неким избранным (стационарным) орбитам, то он не излучает. (Почему-то!) Излучение происходит лишь при переходах электронов с одной орбиты на другую. Бор постулировал, что при переходах с одной стационарной орбиты на другую электрон излучает квант света, частота излучения которого определяется (в духе Планка и Эйнштейна) из формулы

$$\hbar\omega = E_{\text{нач}} - E_{\text{конечн}} \quad (5.1)$$

Атом может не только излучать, но и поглощать кванты света. При этом происходит переход электрона с орбиты с меньшей энергией на орбиту с большей; для этого частота поглощенного атомом излучения  $\omega$  должна удовлетворять условию:

$$\hbar\omega = E_{\text{конечн}} - E_{\text{нач}}. \quad (5.1')$$

Как определить эти выделенные (стационарные) орбиты электронов в атоме?

Основы теории Бора атома водорода таковы. Считается, что в электрически нейтральном атоме водорода в центре располагается протон с положительным зарядом  $Q = +e$ , где  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  Кл – так называемый элементарный заряд, вокруг которого движется отрицательно заряженный электрон с зарядом  $q = -e$ . Единственная сила между ними – сила кулоновского притяжения, сообщающая электрону центростремительное ускорение. В простейшем случае движение будет происходить по круговой орбите (после Бора физиками рассматривались и другие орбиты – эллиптические). В уравнении движения электрона

$$\frac{mv^2}{R} = k \frac{e^2}{R^2}, \quad (5.2)$$

где  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9$  Н м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>, пока две неизвестные – скорость электрона

$v$  и радиус орбиты  $R$ . Бор дополнил классическое уравнение (5.2) квантовым условием: момент импульса электрона на стационарных орбитах кратен перекркнутой постоянной Планка:

$$mvR = n\hbar, \quad (5.3)$$

где  $\hbar = h/(2\pi) \approx 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж×с,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом, по предположению Бора, имеется счётное число особых, выделенных условием (5.3), орбит. Чтобы получить конкретные значения радиусов орбит, скоростей электронов на них и возможные значения энергий электронов в атоме, нужно решить систему уравнений (5.2) – (5.3).

Разделим уравнение (5.2) на уравнение (5.3) (левую часть – на левую, правую – на правую). В результате сразу получаем набор всех возможных скоростей электрона в атоме водорода:

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n}. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (5.3), находим набор возможных радиусов орбит электрона:

$$R_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2. \quad (5.5)$$

Энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром (кинетической энергией ядра пренебрегаем, считая его практически покоящимся):

$$E = \frac{mv^2}{2} - k \frac{e^2}{R} = -k \frac{e^2}{2R}$$

(учтено уравнение (5.2)). Окончательно получаем:

$$E_n = - \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{me^4}{2h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (5.6)$$

**(\*) Пример 5.1. В модели атома Томсона (1902г.)** предполагалось, что в атоме водорода положительный заряд, равный по модулю заряду электрона, равномерно распределён внутри шара радиусом порядка  $R = 10^{-10}$  м. В невозбуждённом атоме электрон покоится в центре шара. Чему равен период колебаний электрона при малом его смещении из центра? Считать, что колебания происходят вдоль диаметра внутри шара.

**Решение.** При отклонении электрона из центра на расстояние  $r < R$ , на электрон будет действовать сила со стороны лишь части положительного заряда, ограниченного сферой радиуса  $r$ . Величина этого заряда равна  $q(r) = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$ , где  $\rho$  – объёмная плотность заряда, которую можно найти по

формуле  $\rho = \frac{e}{\frac{4\pi}{3} R^3}$ . В итоге,  $q(r) = \frac{r^3}{R^3} e$ . На электрон при его отклонении от

центра на расстояние  $r$  начнет действовать сила, равная по величине

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e \cdot q(r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{R^3} r$  и направленная к центру, т. е. возникнет возвращающая сила, пропорциональная величине отклонения от положения равнове-

сия – в точности, как в случае гармонического осциллятора. Роль коэффициен-

та жесткости при этом играет величина  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{R^3}$ . Тогда по формуле для

периода колебаний  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  находим частоту колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} \approx 2,5 \times 10^{15} \text{ Гц.}$$

Итак, по модели Томсона электрон в атоме колеблется с одной единственной частотой (у гармонического осциллятора иного быть не может). Ей соответствует длина волны излучения  $\lambda = c / \nu \approx 0,1$  мкм. В действительности, в экспериментах видят, что атом водорода излучает свет многих разных частот. Это и вынудило физиков отказаться от модели Томсона.\*

**Пример 5.2.** Оценить скорость электрона на 1-ой боровской орбите. Во сколько раз она меньше скорости света в вакууме?

**Решение.** По формуле (5.4) имеем  $v_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \approx 2,2 \times 10^6$  м/с. Эта ско-

рость примерно в 137 раз меньше скорости света в вакууме. Именно поэтому теория атома основывается на нерелятивистской механике. (Релятивистские эффекты в ней всё же бывают важны. Но это существенно выходит за рамки школьной физики.)

**Пример 5.3.** Энергия ионизации атома водорода равна  $I = 13,6$  эВ. Определить радиус наименьшей орбиты электрона в атоме водорода.

**Решение.** Энергией ионизации называют минимальную энергию, которую нужно сообщить электрону, находящемуся в состоянии с наименьшей энергией (говорят: основном состоянии), чтобы он, преодолев силы притяжения со стороны ядра, покинул атом. В атоме водорода, согласно формулам (5.5) и

$$(5.6), I = |E_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2R_1}. \text{ Отсюда получаем: } R_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2I} \approx 0,53 \times 10^{-10} \text{ м.}$$

**Пример 5.4.** Оценить размер (диаметр) сильно возбужденного атома водорода с  $n = 1000$ . (В настоящее время (на 2007 г.) в лабораториях получают атомы с  $n = 1100$ .)

**Решение.** По формуле (5.5)  $R_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 \approx 0,053$  мм. Для сравнения:

диаметр человеческого волоса примерно равен 0,08 мм.

**Пример 5.5.** К какому диапазону волн относятся электромагнитные волны, излучаемые атомом водорода при переходе электрона в нём на самый низший энергетический уровень?

**Решение.** Согласно формуле (5.1) при переходах с  $n$ -го ( $n > 1$ ) уровня энергии на 1-й (самый низший) электрон излучает квант света с частотой

$$\nu_{n1} = \frac{E_n - E_1}{h}, \quad (5.7)$$

где значения  $E_n$  даются формулой (5.6). Соответствующие длины волн кван-

тов света определяются по формуле  $\lambda_{n1} = \frac{c}{\nu_{n1}}$ . Подстановка числовых значений

даёт:  $\lambda_{21} \approx 0,12$  мкм,  $\lambda_{31} \approx 0,10$  мкм,  $\lambda_{41} \approx 0,098$  мкм; при переходах с ещё более высоких орбит получаются длины волн ещё короче.

Все эти длины волн электромагнитного излучения лежат вне видимого диапазона длин волн (примерно от 0,4 мкм до 0,8 мкм) – в области ультрафиолетового излучения. Лишь при переходах на 2-й энергетический уровень возникает излучение в видимом диапазоне:  $\lambda_{32} \approx 0,66$  мкм. Однако при переходах между уровнями с большими  $n$  и  $m$  ( $n > m$ ) длины волн  $\lambda_{nm}$  могут оказаться настолько большими, что попадут и инфракрасную область спектра.



**Пример 5.6.** Какие спектральные линии водорода могут появиться, если его облучать электронами с энергией 12,5 эВ?

**Решение.** Оценим разности энергий. Полагая  $E_1 \approx -13,6 \text{ эВ} \equiv -I$ , имеем

$$E_n = -I/n^2, \quad E_2 - E_1 = \frac{3}{4}I \approx 10,2 \text{ эВ},$$

$$E_3 - E_1 = \frac{8}{9}I \approx 12,1 \text{ эВ}, \quad E_4 - E_1 = \frac{15}{16}I \approx 12,8 \text{ эВ},$$

остальные разности энергий будут ещё больше. Лишь первые две разности энергий оказались меньше энергии налетающих электронов (12,5 эВ). Поэтому из основного состояния ( $n = 1$ ) электроны атома электронным ударом налетающих электронов могут быть возбуждены лишь до состояний с  $n = 2$  и  $n = 3$ . Эти возбужденные электроны спустя короткое время будут опускаться вниз по энергии: из состояния  $n = 2$  прямо в состояние с  $n = 1$ , а из состояния с  $n = 3$  двумя возможными путями – либо прямо в состояние с  $n = 1$ , либо – в два прыжка вниз – сначала в состояние с  $n = 2$ , а уже из него в состояние с  $n = 1$ . В результате: возможны излучения 3-х квантов света с частотами

$$\nu_{32} = \frac{E_3 - E_2}{h}, \quad \nu_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h} \quad \text{и} \quad \nu_{31} = \frac{E_3 - E_1}{h}. \quad \text{Им будут соответствовать}$$

$$\text{длины волн излучения: } \lambda_{32} = \frac{c}{\nu_{32}} = 658 \text{ нм}, \quad \lambda_{21} = \frac{c}{\nu_{21}} = 122 \text{ нм}, \quad \lambda_{31} = \frac{c}{\nu_{31}} = 103 \text{ нм}.$$

**Пример 5.7.** В рамках теории Бора определить радиус наименьшей орбиты электрона в ионе  $\text{He}^+$ .

**Решение.** В уравнении движения электрона  $\frac{mv^2}{R} = k \frac{e^2}{R^2}$  (5.2) и в формуле

для энергии  $E = \frac{mv^2}{2} - k \frac{e^2}{R} = -k \frac{e^2}{2R}$  (5.6) нужно заменить заряд протона  $e$  на заряд ядра  $Ze$  (для гелия  $Z = 2$ ). В результате, для скоростей электрона на стационарных орбитах получаем формулу

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{\hbar} \frac{1}{n}, \quad (5.4')$$

для радиусов орбит

$$R_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{Zme^2} n^2, \quad (5.5')$$

а для возможных значений энергий

$$E_n = - \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{Z^2 me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (5.6')$$

Полагая,  $Z = 2$  и  $n = 1$  (наименьшая орбита; основное состояние), получаем числовые значения этих величин:  $v_{\text{He}} \approx 4,4 \times 10^6 \text{ м/с}$ ,  $R_{\text{He}} \approx 0,26 \times 10^{-10} \text{ м}$  и  $E_{\text{He}} \approx -54,4 \text{ эВ}$ .

(\*) **Пример 5.8.** В рамках теории Бора определить радиус атома гелия, считая, что в нём два электрона движутся по одной окружности, находясь всё время в диаметрально противоположных точках окружности.

**Решение.** Запишем уравнение движения какого-нибудь из электронов атома, учтя его притяжение ядром с зарядом  $+2e$ , находящимся на расстоянии  $R$  от него, и отталкивание от 2-го электрона атома, расположенного уже на вдвое большем расстоянии:

$$\frac{mv^2}{R} = k \frac{2e^2}{R^2} - k \frac{e^2}{(2R)^2}, \quad (5.8)$$

где  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , откуда

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{7e^2}{4R}. \quad (5.8')$$

Дополним это уравнение условием на момент импульса одного электрона. На самой низшей орбите (которой мы только и будем интересоваться) имеем

$$mvR = \hbar. \quad (5.9)$$

Деля уравнение (5.8) на (5.9), получаем скорость электрона на низшей орбите

$$v = \frac{7}{4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar}. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.10) в (5.9), находим радиус самой маленькой орбиты электрона в атоме гелия:

$$R = \frac{4}{7} \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad (5.11)$$

что составляет  $4/7$  от радиуса электрона в атоме водорода. Подстановка числовых значений дает  $R \approx 0,30 \times 10^{-10} \text{ м}$ . (По книге Глинки «Общая химия» (2008) орбитальный радиус электрона в атоме гелия равен 29 пм, что с замечательной точностью совпадает с полученным значением.)\*

## §6. Ядерная физика

**Протонно-нейтронное строение атомных ядер. Изотопы.** По современным представлениям ядра атомов состоят из положительно заряженных протонов и электрически нейтральных нейтронов, массы каждого из которых примерно равны друг другу и значительно превосходят массу электрона (в 1836 и 1839 раз соответственно). Ввиду близости масс протона и нейтрона,  $m_p \approx m_n \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ кг}$ , их объединяют общим названием «нуклон» (от английского слова *nuclei* – ядро). Соотношение между числом протонов  $Z$  и числом  $(A - Z)$  нейтронов в ядре  ${}_Z^A X$ , где  $A$  – общее число нуклонов в ядре (массовое

число) данного химического элемента  $X$ , может варьироваться в некоторых (не слишком широких) пределах.

Атомы, ядра которых содержат одинаковое число протонов (а потому и одинаковое число электронов), но разное число нейтронов, называют изотопами химического элемента. Например, ядра изотопов углерода  $^{12}_6\text{C}$  и  $^{14}_6\text{C}$  содержат одинаковое число протонов  $Z = 6$ , но разное число нейтронов:  $12 - 6 = 6$  и  $14 - 6 = 8$  соответственно. Ядра  $^{12}_6\text{C}$  стабильны, ядра  $^{14}_6\text{C}$  не стабильны (радиоактивны). Другой пример: известны 3 изотопа водорода –  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{H} = \text{D}$  (дейтерий, его ядро называется дейтроном) и  $^3\text{H} = \text{T}$  (тритий, его ядро называется тритоном). Дейтрон состоит из протона и нейтрона, тритон – из протона и двух нейтронов. Первые два изотопа водорода стабильны, 3-й не стабилен. Конкретные ядра атомов веществ называют **нуклидами**; ядра радиоактивных изотопов – **радионуклидами**.

**Размеры ядер.** Радиус атомного ядра с массовым числом  $A$  можно оценить по формуле  $R = 1,3A^{1/3} \times 10^{-15}$  м. Между протонами в ядре существует сильное электростатическое отталкивание. Удерживают их вместе в малом объеме ядра так называемые ядерные силы.

**Превращения ядер.** Кроме довольно многочисленных стабильных ядер, в природе существует большое число (а ещё больше получено искусственно) нестабильных ядер, которые самопроизвольно превращаются в другие ядра (говорят: распадаются).

$\alpha$  – *распад ядер.* При  $\alpha$  – распаде исходное материнское ядро испускает ядро гелия  $^4\text{He}$  ( $\alpha$  – частицу) и превращается в дочернее ядро, числа протонов и нейтронов у которого уменьшаются на две единицы каждое. Спонтанному (без внешнего воздействия)  $\alpha$  – распаду подвержены тяжёлые ядра с  $Z > 83$  и небольшая группа редкоземельных элементов в области  $A = 140 - 160$ .

$\beta$  – *распад ядер* – процесс самопроизвольного превращения ядра в ядро с тем же значением  $A$ , но с изменением  $Z$  на  $\Delta Z = \pm 1$  за счёт испускания электрона (или позитрона – частицы, отличающейся от электрона лишь знаком электрического заряда), – или захвата электрона с атомной оболочки.

*Деление ядер* характерно только для самых тяжёлых ядер, начиная от тория ( $Z = 90$ ) и далее в сторону больших  $Z$ . Впервые деление ядер наблюдали и дали правильную трактовку эксперименту Ган и Штрассман (1938). Опыты были проведены с ядрами урана ( $Z = 92$ ), которые бомбардировались *медленными* нейтронами. В результате образовывалась пара ядер с примерно равными массами, а в качестве «мелких брызг» вылетали два-три нейтрона. Последние имеют достаточно большие энергии и чаще всего не вызывают деления соседних ядер урана (подчеркнём: лучше всего деление урана происходит под действием медленных, а не быстрых нейтронов). Однако, если эти «два-три нейтрона» замедлить, они уже легко вызывают деление других ядер. Так возникает *цепная реакция* деления.

*Термоядерный синтез лёгких элементов.* При высоких температурах (порядка  $10^7$  К) возможны реакции слияния легких ядер с образованием более тяжёлых ядер. Высокие температуры необходимы, потому что все ядра заря-

жены положительно, и для сближения ядер друг к другу требуется преодолеть силы электростатического отталкивания ядер друг от друга. В термоядерных реакциях происходит значительное выделение энергии, с избытком компенсируя начальные затраты энергии (получение высоких температур).

**Энергия связи.** По определению энергией связи  $E_{\text{св}}$  называют минимальную энергию, которую нужно сообщить ядру, чтобы полностью расщепить его на составляющие это ядро  $Z$  протонов и  $N = A - Z$  нейтронов. Она равна разности

$$E_{\text{св}}(Z, A) = (Zm_p + Nm_n - M_{\text{ядра}}(Z, A))c^2.$$

**Закон радиоактивного распада.** Ядра радиоактивных изотопов элементов самопроизвольно распадаются с превращением в ядра изотопов других элементов. (Например, ядра изотопа углерода  $^{14}\text{C}$  в результате  $\beta$  – распада превращаются в ядра изотопа азота  $^{14}\text{N}$ .) Первые из них называют материнскими (или родительскими) ядрами, а ядра вторых – дочерними.

В результате самопроизвольных распадов радиоизотопа число  $N(t)$  его ещё не распавшихся ядер с течением времени непрерывно уменьшается. Изменение числа не распавшихся ядер за малое время  $dt$  пропорционально числу этих не распавшихся ядер

$$dN = -\lambda N dt, \quad (6.1)$$

где  $\lambda$  – постоянная распада размерности 1/с. Решая уравнение (6.1), находим зависимость числа не распавшихся ядер от времени

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.2)$$

где  $N_0$  – число ядер в начальный момент времени  $t = 0$ . Если значения  $N_0$  и  $\lambda$  известны, то по измеренному значению  $N(t)$  можно найти время, в течение которого происходил распад

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{N_0}{N(t)} \right). \quad (6.3)$$

На этом основан метод определения «возраста» пород в геологии и «возраста», например, артефактов (продуктов деятельности человека) – в археологии. Использование этого метода предполагает, что ни материнские, ни дочерние ядра не исчезают и не появляются иначе как в результате самого радиоактивного процесса.

Удобной характеристикой радиоактивного распада является *период полураспада*. Так называют время  $T$  (в литературе чаще используется более громоздкое обозначение  $T_{1/2}$ ), в течение которого количество не распавшихся ядер уменьшается вдвое:  $N(T) = N_0 / 2$ , т. е.  $N_0 e^{-\lambda T} = N_0 / 2$ , откуда, логарифмируя, получаем соотношение между константой распада и периодом полураспада

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}. \quad (6.4)$$

Пользуясь понятием периода полураспада, закон радиоактивного распада можно представить в виде

$$N(t) = N_0 \times 2^{-t/T}. \quad (6.2')$$

Активностью радиоизотопа называют величину

$$A = -dN / dt, \quad (6.5)$$

определяющую интенсивность распадов (число распадов в единицу времени). С учётом (6.1) и (6.2) находим

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.6)$$

т. е., не только число не распавшихся ядер, но и их активность экспоненциально убывает со временем,

$$A_0 = \lambda N_0 \quad (6.7)$$

– активность в начальный момент времени  $t=0$ .

Для определения времени  $t$  в методах датирования, кроме формулы (6.3), может быть использована формула

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{A_0}{A(t)} \right), \quad (6.8)$$

при этом экспериментально измеряются активности  $A_0$  и  $A(t)$ . Последнее время отдают предпочтение прямому измерению  $N(t)$  и формуле (6.3) (как методу более точному и требующему меньших затрат времени).

**Пример 6.1.** В результате серии радиоактивных распадов изотоп урана  $^{238}_{92}\text{U}$  превращается в изотоп свинца  $^{206}_{82}\text{Pb}$ . Сколько  $\alpha$  – и  $\beta$  – превращений происходит в этом процессе? ( $\beta$  – распадом считать вылет электронов из ядра.)

**Решение.** Пусть  $x$  и  $y$  – искомые числа  $\alpha$  – и  $\beta$  – превращений.  $\alpha$  – частицы – это ядра атомов гелия с массовым числом  $A = 4$  и зарядовым числом  $Z = 2$ . Масса электрона пренебрежимо мала по сравнению с массами нуклонов и ядер, зарядовое число электрона  $Z = -1$ . Изменение массового числа ядра урана запишем в виде уравнения для  $x$ :  $238 - 206 = 4x$ , откуда получаем число  $\alpha$  – превращений:  $x = 8$ . Если бы происходили только  $\alpha$  – распады, то зарядовое число ядра уменьшилось бы до значения  $92 - x \cdot Z = 92 - 16 = 76$ . На самом деле, зарядовое число ядер свинца равно 82. Число  $y$   $\beta$  – превращений (при которых происходит вылет из ядра электронов с зарядовым числом  $-1$ ) найдём из условия:  $82 = 76 - y \cdot (-1)$ . Отсюда получим  $y = 6$ .

**Пример 6.2.** Чтобы определить возраст  $t$  древней ткани, найденной в одной из египетских пирамид, в ней была определена концентрация радиоуглерода  $^{14}\text{C}$ . Она оказалась соответствующей 9,2 распадам в минуту на один грамм углерода. Концентрация  $^{14}\text{C}$  в живых растениях соответствует 14,0 распадам в минуту на один грамм углерода. Период полураспада  $^{14}\text{C}$  равен 5730 лет. Исходя из этих данных, определить  $t$ .

**Решение.** Считается, что радиоактивные ядра углерода  $^{14}\text{C}$  организмы (растения, из которых была сделана ткань) получают в процессе жизнедеятельности. Ядра  $^{14}\text{C}$  распадаются, но на их место приходят другие атомы, что и поддерживает постоянным уровень активности  $A = 14$  распадов/мин для 1 грамма живой материи. После смерти поступление ядер  $^{14}\text{C}$  прекращается, а число тех

ядер  $^{14}\text{C}$ , которые уже были в организме, уменьшается за счёт распадов по закону (6.2). При этом по закону (6.6) ослабевает и активность. Возраст ткани найдём по формулам (6.4) и (6.8):

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{A_0}{A(t)} \right) = \frac{T}{\ln 2} \ln \left( \frac{14,0}{9,2} \right) \approx \frac{T}{\ln 2} \ln 1,52 \approx \frac{5730}{0,693} \cdot 0,420 \approx 3470 \text{ лет.}$$

**Пример 6.3.** Среднесуточное потребление мощности в среднем доме составляет  $P = 300$  Вт. Какая масса  $m$  урана  $^{235}_{92}\text{U}$  должна разделиться, чтобы удовлетворить годовую потребность дома в энергии? В одном акте деления высвобождается энергия  $W = 190$  МэВ?  $1 \text{ эВ} = 1,6 \times 10^{-19}$  Дж.

**Решение.** Масса разделившегося урана  $m$  связана с полным числом ядер урана  $N$ , подвергшихся делению, соотношением

$$m = N \cdot m_1 = N \cdot \frac{\mu}{N_A} = N \cdot \frac{235 \cdot 10^{-3}}{N_A}, \text{ где } m_1 \text{ есть масса одного атома урана-235,}$$

$N_A$  – число Авогадро,  $N_A = 6 \times 10^{23}$  моль $^{-1}$ . Полная энергия, израсходованная за время  $\tau = 1$  год, равна  $P\tau = NW$ . В итоге получаем

$$m = \frac{\mu}{N_A} \times \frac{P\tau}{W} \approx 0,1 \text{ г.}$$

**Пример 6.4.** Радон – это  $\alpha$  – радиоактивный газ с атомной массой  $A = 222$ . Какую долю полной кинетической энергии, освобождаемой при распаде радона, уносит  $\alpha$  – частица? Абсолютное значение кинетической энергии  $\alpha$  – частицы порядка 5 МэВ.

**Решение.** Кинетическая энергия 5 МэВ значительно меньше энергии покоя  $\alpha$  – частицы: последняя порядка  $4m_p c^2 \approx 4$  ГэВ, т. е. на 3 порядка больше. Это позволяет вести рассмотрение в рамках механики Ньютона. Запишем для реакции  $^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow ^{218}_{84}\text{Po} + ^4_2\text{He}$  закон сохранения импульса в системе отсчета, в которой ядро радона покоилось,  $0 = Mu + m v$ , и выражение для кинетической

энергии продуктов распада  $\frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = T$ . Здесь  $m \approx 4m_p$ ,  $M \approx 218m_p$ . Решая

эту систему уравнений, находим для доли кинетической энергии  $\alpha$  – частицы  $\frac{mv^2/2}{T} = \frac{M}{M+m} \approx 0,98$ : почти вся энергия (98%) уносится более легкой частицей.

### Контрольные вопросы

1. Найти длину волны света (в нм), если при нормальном падении света на дифракционную решетку с постоянной  $4,4$  мкм максимум 4-го порядка для этой длины волны наблюдается под углом  $30^\circ$ .

2. Какова энергия в электрон-вольтах рентгеновского кванта с длиной волны  $0,1$  нм?

3. Почему макроскопические объекты не показывают волновых свойств? Какова длина волны де Бройля шарика для настольного тенниса с массой 2 г, если после удара он летит со скоростью 5 м/с?

4. Во сколько раз скорости электрона на 2-й и 3-й боровских орбитах в атоме водорода меньше скорости на 1-ой боровской орбите?

5\*. Интенсивность солнечного излучения вблизи Земли (солнечная постоянная)  $I = 1,35 \text{ кВт/м}^2$ . Считая (приблизительно) излучение Солнца монохроматическим с длиной волны 0,6 мкм, оценить число фотонов, ежесекундно попадающих в глаз человека, обращённого к Солнцу.

6. При взрыве 1-ой атомной бомбы выделилась энергия  $W \approx 10^{14}$  Дж. В одном акте деления урана  ${}_{92}^{235}\text{U}$  высвобождается энергия  $W = 190 \text{ МэВ}$ . Какая масса урана  ${}_{92}^{235}\text{U}$  в бомбе подверглась делению?

7\*. Оценить энергию, которую нужно сообщить ядрам дейтерия, чтобы они смогли сблизиться на расстояние порядка  $10^{-15}$  м, когда становится возможной реакция слияния ядер в ядро гелия.

### Задачи

1. Две радиостанции А и В излучают радиоволны на частоте  $f = 7,5 \text{ МГц}$  в фазе друг с другом. Расстояние между антеннами  $L = 110 \text{ м}$ . В каких точках между ними сигнал максимален? Антенны считать точечными источниками радиоволн. При удалении от точечного источника амплитуда сигнала уменьшается обратно пропорционально расстоянию до источника.

2. Сколько главных максимумов можно наблюдать в дифракционной картине при нормальном падении монохроматического света с длиной волны 600 нм на решётку с периодом 3 мкм.

3\*. Неподвижные невозбужденные атомы водорода облучаются пучком электронов. При какой минимальной энергии электронов атом может испустить фотон? Энергия ионизации атома водорода равна 13,6 эВ.

4\*. В рамках теории Бора в атоме гелия два электрона движутся по одной окружности, находясь всё время в диаметрально противоположных точках окружности. Оценить энергию, необходимую для удаления одного электрона из атома, считая что оставшийся электрон окажется в состоянии с наименьшей энергией для однозарядного иона гелия.

5. В результате серии радиоактивных распадов изотоп урана  ${}_{92}^{235}\text{U}$  превращается в изотоп свинца  ${}_{82}^{207}\text{Pb}$ . Сколько  $\alpha$ - и  $\beta$ -превращений происходит в этом процессе?

6\*.  $\beta$ -активность углерода в живых растениях равна  $\approx 14,0$  распадов/(г сек) и считается не изменяющейся в течение многих тысяч лет (полагают, что в течение многих тысяч лет процентный состав изотопа  ${}^{14}\text{C}$  в живых тканях остаётся неизменным). К какой ошибке в оценке возраста древней ткани может привести то, что в древнее время активность была на 5% меньше? Период полураспада изотопа углерода  ${}^{14}\text{C}$  равен 5730 лет,  $\ln 2 = 0,693$ ,

$\ln 0,95 = -0,0513$ . (На возможный источник ошибок такого рода при попытке датировать археологические находки радиоуглеродным методом указывает акад. Фоменко в своей «Новой хронологии».)

7. Ядро распалось на две части, массы которых оказались равными  $M_1$  и  $M_2$ . Определить их скорости, если общая кинетическая энергия частей равна  $T$ .

8. Два дейтрона образовали ядро  ${}^4\text{He}$ . Сколько энергии при этом выделилось? Масса дейтрона  $m_D = 1,01410$  а.е.м., масса гелия  $m_{\text{He}} = 4,0026$  а.е.м.. Одной атомной единице массы соответствует энергия 931,5 МэВ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Мякишев Г.Я.** Физика: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / Г.Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев. – 16 изд. – М.: Просвещение, 2007. – 381 с.

2. **Мякишев Г.Я.** Физика. Оптика. Квантовая физика. 11 кл. Профильный уровень: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.Я. Мякишев, А.З. Сияков. – 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2008 – 462с

3. **Павленко Ю.Г.** Начала физики: Учебник / Ю.Г. Павленко. – 2-е изд. – М.: Изд-во «Экзамен», 2005. – 864 с.

4. **Черноуцан А.И.** Краткий курс физики Под ред. А.А. Леоновича. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 224 с.

5. **Козел С.М.** Физика. 10-11 классы: пособие для учащихся и абитуриентов. В 2 ч. Ч.2. / С.М. Козел – М.: Мнемозина, 2010. – 400 с.