Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей
«Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института (государственного университета)»

ФИЗИКА

Электромагнитная индукция. Колебания

Задание №4 для 11-х классов

(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2013

Составитель: В.И. Чивилёв, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задание №4 для 11-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2013, 32 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 10 января 2014 г.

Составитель:
Чивилёв Виктор Иванович
Подписано 12.11.13. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,00.
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 600. Заказ №27-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)
ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Глава 1. Электромагнитная индукция

§1. Магнитный поток

Магнитным потоком Φ через плоскую площадку площадью S, помещённую в однородное магнитное поле, называется величина

$$\Phi = BS\cos\alpha, \tag{1}$$

где $B-$ модуль вектора магнитной индукции $\vec{B}$, $\alpha -$ угол между вектором $\vec{B}$ и вектором нормали к площадке $\vec{n}$ (рис. 1). Положительный (отрицательный) знак магнитного потока соответствует острому (тупому) углу α. Поскольку у площадки две нормали, то выбор направления нормали определяет знак магнитного потока.

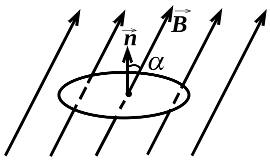

Рис. 1

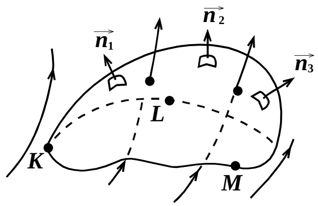

Рис. 2

Теперь введём определение магнитного потока через произвольный контур KLM, не лежащий в одной плоскости и помещённый в неоднородное магнитное поле (рис. 2). «Натянем» на этот контур произвольную поверхность. Разобьём её на сколь угодно малые, почти плоские площадки. Назовём условно одну сторону поверхности внешней, а другую внутренней, и направим нормали $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots$ к каждой площадке от внутренней стороны к внешней. Найдём магнитный поток через каждую площадку согласно равенству (1) и сложим найденные потоки алгебраически. Это и будет по определению магнитным потоком через произвольный контур.

Оказывается, что найденный таким способом магнитный поток через контур не зависит от формы «натянутой» на контур поверхности. Это является прямым следствием того опытного факта, что *магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю*. В более доступном изложении этот опытный факт формулируется так: *магнитных зарядов, на которых могли бы начинаться или заканчиваться магнитные силовые линии, нет; силовые линии магнитного поля замкнуты.* Поля, у которых силовые линии замкнуты, называются *вихревыми*. Магнитное поле есть поле *вихревое*.

Всё вышесказанное даёт возможность считать приведённое определение магнитного потока через контур корректным.

Для более образного представления себе магнитного потока на него можно смотреть как на величину, пропорциональную числу силовых линий, охватываемых контуром. При такой трактовке магнитного потока становится почти очевидным факт независимости магнитного потока через контур от формы «натянутой» на контур поверхности.

Если магнитное поле создаётся несколькими источниками поля, то из принципа суперпозиции полей следует, что результирующий магнитный поток через контур равен алгебраической сумме магнитных потоков от каждого источника в отдельности.

В системе единиц СИ единицей магнитного потока служит *вебер* (Вб), $1\ \text{Вб} = 1\ \text{Тл} \cdot \text{м}^2$.

§2. Индуктивность

Пусть в контуре по каким-либо причинам идёт ток I. Этот ток создаёт собственное магнитное поле, магнитная индукция которого в каждой точке пропорциональна току, что вытекает из закона Био–Савара–Лапласа. Следовательно, магнитный поток через каждую из малых площадок, на которые разбита «натянутая» на контур поверхность, тоже пропорционален току. Поэтому и суммарный поток через все площадки пропорционален току. Таким образом, магнитный поток собственного поля через контур пропорционален току:

$$\Phi_{\text{соб}} = LI. \qquad (2)$$

Коэффициент пропорциональности L ($L > 0$) называется коэффициентом самоиндукции или *индуктивностью*. Индуктивность контура зависит от геометрических размеров и формы контура, а также от магнитных свойств среды, в которой находится контур.

Единицей измерения индуктивности в системе СИ служит *генри* (Гн), $1\ \text{Гн} = 1\ \text{Вб/А}$.

Следует сказать о правиле знаков для $\Phi_{\text{соб}}$ и I в формуле (2). Выберем положительное направление обхода контура так, чтобы оно было связано с направлением нормали к контуру (точнее, направлениями нормалей в разных точках поверхности, «натянутой» на контур) правилом буравчика. Ток, идущий в положительном направлении обхода контура, считается положительным, в противном случае – отрицательным. Теперь знак $\Phi_{\text{соб}}$ будет определяться знаком I через соотношение (2) и наоборот. Причём не будет противоречия со знаком потока, определяемого по формуле (1). Убедитесь в этом, сделав из проволоки кольцо. Мысленно задайте направление тока в кольце. Направив вектор нормали к плоскости кольца сначала в одну, а затем в другую сторону, выясните знак магнитного потока и тока.

Несколько слов о влиянии магнитных свойств среды на индуктивность L. Если вблизи контура с током находятся диамагнетики и парамагнетики, то всё сказанное выше о пропорциональности тока в контуре и магнитного потока справедливо. Если же вблизи контура есть ферромагнетики, то магнитный поток через контур уже не пропорционален току в контуре, поскольку индукция магнитного поля в ферромагнетиках и вблизи них не пропорциональна току и, кроме того, зависит ещё и от намагниченности ферромагнетиков перед опытом (начальной намагниченности). Но и в этом случае можно считать, что магнитный поток собственного поля через контур даётся тем же выражением (2), но индуктивность L есть величина, зависящая ещё от силы тока I и от начальной намагниченности ферромагнетика. Например, индуктивность кольца (катушки), надетого на железный сердечник, зависит не только от размеров кольца, но и от тока в кольце и начальной намагниченности железа.

§3. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца

Пусть произвольный контур с током находится во внешнем магнитном поле. Из принципа суперпозиции магнитных полей и определения магнитного потока следует, что полный магнитный поток Φ, пронизывающий контур, состоит из потока от внешнего поля $\Phi_{\text{внеш}}$ и потока от собственного поля $\Phi_{\text{соб}}$:

$$\Phi = \Phi_{\text{внеш}} + \Phi_{\text{соб}}. \tag{3}$$

При этом внешний магнитный поток $\Phi_{\text{внеш}}$ может изменяться со временем как из-за изменения внешнего магнитного поля во времени (в каждой точке поля индукция внешнего магнитного поля зависит от времени), так и из-за движения контура или отдельных его частей. Собственный магнитный поток $\Phi_{\text{соб}}$ может тоже меняться со временем в результате изменения тока в контуре по каким-либо причинам и в результате изменения индуктивности контура (при его деформации, например).

Опытным путём установлено, что *независимо от причин, вызывающих изменение полного магнитного потока Φ через контур, в контуре возникает электродвижущая сила, называемая электродвижущей силой индукции*:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4}$$

Здесь направление нормали к контуру и положительное направление обхода контура, связанные друг с другом правилом буравчика, определяют знак Φ и $\mathscr{E}$. ЭДС индукции положительна, если направление её действия совпадает с положительным направлением обхода контура, и отрицательна в противном случае. Под направлением действия ЭДС на некотором участке цепи будем понимать направление действия вдоль этого участка сторонних сил на положительные заряды, т. е. то направление, в котором потечёт ток через участок цепи с ЭДС при мысленном замыкании этого участка резистором.

Равенство (4) и представляет собой математическую запись *закона электромагнитной индукции* Фарадея. Производную $\frac{d\Phi}{dt}$ называют скоростью изменения магнитного потока.

Из равенств (3) и (4) получаем:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_{\text{внеш}}}{dt} - \frac{d\Phi_{\text{соб}}}{dt}. \qquad (5)$$

Слагаемое $-\frac{d\Phi_{\text{внеш}}}{dt}$ представляет собой ЭДС индукции, возникающую из-за изменения внешнего магнитного потока. Если собственное поле можно не учитывать (пренебрегать индуктивностью), то ЭДС индукции в контуре определяется только первым слагаемым. Ещё раз подчеркнём, что это слагаемое обусловлено как изменением внешнего поля во времени, так и движением контура или его частей во внешнем поле.

Слагаемое

$$\mathscr{E}_c = -\frac{d\Phi_{\text{соб}}}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt} \qquad (6)$$

называется *ЭДС самоиндукции*, т. к. оно появляется благодаря изменению во времени собственного магнитного потока через контур. Напомним, что изменение собственного магнитного потока может происходить как за счёт изменения тока (по каким-либо причинам), так и за счёт изменения индуктивности контура.

Если индуктивность остаётся постоянной во времени, то равенство (6) принимает вид:

$$\mathscr{E}_c = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (7)$$

Затронем часто встречающийся при решении задач вопрос о том, пренебрегать или нет индуктивностью контура. Этот вопрос в каждом конкретном случае должен решаться отдельно на основании вклада, даваемого в общую ЭДС каждым слагаемым в формуле (5). Чаще всего индуктивностью контура в виде одного витка или рамки, состоящей из малого числа витков, можно пренебречь. А вот индуктивностью контура, состоящего из значительного числа витков, например катушки, пренебрегать не стоит. Одним из критериев для оценки роли индуктивности может служить сравнение величин внешнего магнитного поля и собственного поля контура, а точнее, сравнение изменений величин этих полей за время наблюдения.

Заметим, что в формуле (4) знаки ЭДС индукции $\mathscr{E}$ и изменения магнитного потока $d\Phi$ противоположны: если $d\Phi > 0$, то $\mathscr{E} < 0$, и наоборот. Противоположность знаков этих двух величин, обеспеченная присутствием в формуле (4) знака «–», отражает *правило Ленца: ЭДС индукции всегда направлена так, чтобы пытаться препятствовать причине, вызвавшей индукцию.*

Задача 1. Северный полюс магнита удаляется от проводящего кольца (рис. 3). Определить направление индукционного тока в кольце. Куда направлена сила, действующая на кольцо?

Решение. Для ответа на первый вопрос удобно за причину, вызывающую ЭДС индукции в кольце, взять уменьшение магнитного потока через кольцо. По правилу Ленца собственное поле, созданное индукционным током, должно препятствовать этому уменьшению. Поэтому собственное поле в плоскости кольца и внутри кольца направлено туда же, что и внешнее, т. е. вправо. По правилу буравчика *индукционный ток в кольце направлен против часовой стрелки, если смотреть на кольцо справа.*

Для ответа на второй вопрос удобнее за причину, вызывающую ЭДС индукции, взять увеличение расстояния между магнитом и кольцом. По правилу Ленца появится противодействие этой причине, т. е. между кольцом и магнитом возникнет сила притяжения. И чем больше индукционный ток, тем больше будет сила притяжения. Итак, *на кольцо действует сила, направленная к магниту*.

Задача 2. Катушка сопротивлением $R = 40$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}01$ Гн замкнута накоротко и находится во внешнем магнитном поле (рис. 4). Начиная с определённого момента, внешнее поле начинает изменяться. В результате за некоторое время магнитный поток внешнего поля через катушку возрос на $0{,}002$ Вб, а ток достиг значения $0{,}08$ А. Какой заряд прошёл за это время по катушке?

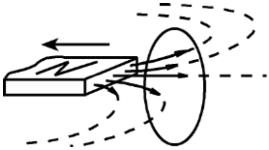

Рис. 3

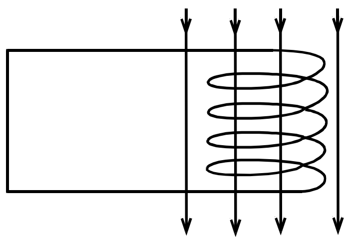

Рис. 4

Решение. Изменяющееся внешнее поле вызывает в катушке ЭДС индукции, в результате чего возникает изменяющийся со временем ток, являющийся причиной появления ЭДС самоиндукции. Свяжем направление нормали к витку катушки и положительное направление обхода витка правилом буравчика. Этим будет задаваться связь между знаками магнитного потока, тока и обеих ЭДС в контуре. Разобьем всё время на сколь угодно малые интервалы Δt_i. Пусть за время Δt_i

магнитный поток от внешнего поля изменился на величину $\Delta\Phi_i$, а ток изменился на величину ΔI_i. Тогда по закону Ома для замкнутой цепи

$$-\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t_i} - L\frac{\Delta I_i}{\Delta t_i} = I_i R. \qquad (8)$$

Здесь $I_i -$ среднее значение тока в катушке в течение времени Δt_i. Умножив обе части равенства (8) на Δt_i и учтя, что $I_i \Delta t_i$ есть протёкший через катушку заряд Δq_i за время Δt_i, получаем:

$$-\Delta\Phi_i - L\Delta I_i = R\Delta q_i. \qquad (9)$$

Сложив равенства вида (9) для всех Δt_i, получаем:

$$-\sum_i \Delta\Phi_i - L\sum_i \Delta I_i = R\sum_i \Delta q_i.$$

Поскольку $\sum_i \Delta q_i = q -$ протёкший через катушку за время опыта заряд, $\sum_i \Delta\Phi_i = \Delta\Phi -$ полное изменение потока внешнего поля через катушку, а $\sum_i \Delta I_i = \Delta I -$ полное изменение тока в катушке за время опыта, то имеем: $-\Delta\Phi - L\Delta I = Rq$. Так как ток в момент начала изменения внешнего магнитного поля равен нулю, то $\Delta I = I_{\text{кон}} - 0 = I_{\text{кон}}$. Здесь $I_{\text{кон}} -$ значение тока в конце опыта. Итак,

$$q = -\frac{\Delta\Phi + LI_{\text{кон}}}{R}.$$

Если направление нормали к витку катушки выбрать таким, чтобы $\Delta\Phi$ было положительным, т. е. равным $0{,}002\ \text{Вб}$, то значение $I_{\text{кон}}$ надо взять отрицательным, т. е. равным $-0{,}08\ \text{А}$. Это следует из правила Ленца: знак индукционного тока должен быть противоположен знаку изменения магнитного потока, вызвавшего этот ток. Таким образом, $\Delta\Phi = 0{,}002$ Вб, $I_{\text{кон}} = -0{,}08$ А,

$$q = -(\Delta\Phi + LI_{\text{кон}}) / R = -3\cdot 10^{-5}\ \text{Кл}.$$

Знак «минус» у заряда означает, что он прошёл в отрицательном направлении обхода витка катушки.

§4. Природа электромагнитной индукции

Для выяснения физических причин, которые приводят к появлению ЭДС индукции в контуре, рассмотрим два частных случая возникновения ЭДС индукции. Любая реальная ситуация сводится к суперпозиции этих частных случаев.

1-й случай. *Контур (или его часть) движется в постоянном магнитном поле.*

а) Рассмотрим для простоты движение части контура в виде прямолинейного отрезка MN длиной l. Пусть угол между вектором скорости $\vec{v}$ проводника и вектором магнитной индукции $\vec{B}$ однородного поля равен α, а сам проводник перпендикулярен векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$ (рис. 5). Возьмём частицу внутри проводника, которая может перемещаться вдоль проводника и имеет положительный заряд. На эту частицу, движущуюся вместе с проводником со скоростью $\vec{v}$. действует со стороны магнитного поля сила Лоренца

$$F = qvB\sin\alpha, \tag{10}$$

направленная вдоль проводника. При перемещении частицы на расстояние l вдоль проводника эта сила совершает работу $A = qvBl\sin\alpha$ в системе отсчёта, связанной с проводником. Отношение этой работы к величине заряда и есть электродвижущая сила:

$$\mathscr{E} = vBl\sin\alpha. \tag{11}$$

Формула (11) даёт выражение для ЭДС индукции в движущемся участке проводника. Роль сторонних сил, вызывающих появление ЭДС индукции в этом случае, играет сила Лоренца.

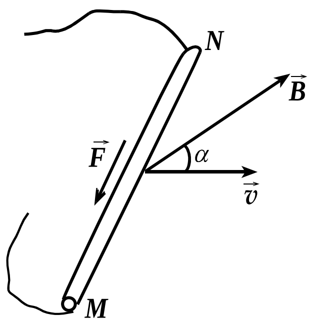

Рис. 5

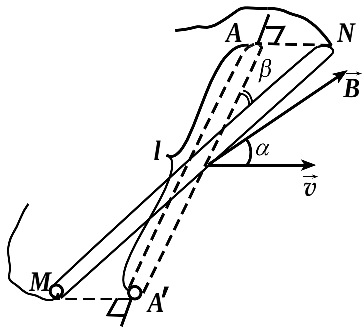

Рис. 6

б) Если отрезок проводника MN не перпендикулярен векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$ (рис. 6), то в формуле (11) вместо l надо брать эквивалентную длину проводника $l_{экв}$, представляющую собой проекцию отрезка проводника длиной l на направление AA', перпендикулярное плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Действительно, при перемещении заряда q вдоль проводника сила Лоренца F

направлена под углом β к направлению перемещения заряда в проводнике и совершает работу над зарядом (в системе отсчёта, связанной с проводником) $A = Fl\cos\beta$. Обозначив $l\cos\beta$ через $l_{экв}$, имеем:

$$A = Fl\cos\beta = Fl_{экв}. \qquad (12)$$

При подстановке в (12) выражения для силы Лоренца из (10) и после деления всех трёх частей полученного равенства на q получается величина ЭДС индукции в прямолинейном участке проводника длиной l, составляющем угол β (рис. 5) с нормалью к плоскости нахождения векторов скорости проводника $\vec{v}$ и магнитной индукции поля $\vec{B}$, угол между которыми равен α:

$$\mathscr{E} = Bvl\sin\alpha\cos\beta = Bvl_{экв}\sin\alpha. \qquad (13)$$

Ясно, что выражение для ЭДС индукции по формуле (11) есть частный случай выражения для ЭДС индукции по формуле (13), когда $\beta = 0$.

Физический смысл $l_{экв}$ в формуле (13) проясняется, если воспользоваться понятием силовых линий и заметить, что расположенный вдоль AA' (рис. 6) проводник длиной $l_{экв}$ будет пересекать при движении со скоростью v столько же силовых линий в единицу времени, сколько их пересекает наш проводник длиной l. А это и означает, что ЭДС индукции в этих проводниках одинакова.

в) При движении криволинейного участка контура (всего контура) его следует мысленно разбить на достаточно малые, практически прямолинейные отрезки, найти ЭДС индукции в каждом отрезке и алгебраически сложить все ЭДС индукции, предварительно выбрав положительное направление обхода контура. Полученная сумма даст значение ЭДС индукции в криволинейном участке контура (во всём контуре).

Итак, *причиной появления ЭДС индукции в движущихся в постоянном магнитном поле проводниках является сила Лоренца, играющая роль сторонних сил. Направление действия ЭДС индукции в движущемся проводнике совпадает с возможным направлением движения в нём положительных зарядов под действием силы Лоренца.*

Следует заметить, что во всех генераторах тока, в которых ротор вращается в постоянном внешнем магнитном поле, появление ЭДС индукции обязано силе Лоренца.

2-й случай. *Контур покоится в переменном магнитном поле.*

Ясно, что на покоящиеся заряды в проводнике сила Лоренца не действует. По какой же причине они приходят в движение и создают индукционный ток?

Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению в пространстве *вихревого электрического поля*, причём независимо от наличия проводящего контура. С помощью проводящего контура можно лишь обнаружить наличие электрического поля по возникновению в контуре индукционного тока. Силовые линии этого поля, согласно Максвеллу, замкнуты. Отсюда и название – вихревое поле.

Это вихревое электрическое поле действует на заряды, способные перемещаться внутри проводника, и заставляет их двигаться вдоль проводника, создавая ток. Работа же силы, действующей со стороны вихревого электрического поля, по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру и представляет собой ЭДС индукции в контуре. Роль сторонних сил в этом случае играют силы, действующие на перемещаемый вдоль контура заряд со стороны вихревого электрического поля.

§5. Энергия магнитного поля

Для того, чтобы в контуре с индуктивностью L создать ток силы I, надо затратить работу. Эта работа равна энергии, запасённой в магнитном поле контура с током: $W=(LI^2)/2$. Эта формула приводится без вывода.

Задача 3. Магнитное поле создаётся протекающим по катушке постоянным током. Магнитный поток этого поля через катушку $\Phi=0{,}1\text{Вб}$, индуктивность катушки $L=0{,}01\text{Гн}$. Чему равна энергия магнитного поля катушки?

Решение. Пусть ток через катушку равен I. Тогда $\Phi=LI$, а энергия магнитного поля $W=\dfrac{LI^2}{2}$. Исключая из последних двух равенств ток I, находим энергию магнитного поля катушки $W=\dfrac{\Phi^2}{2L}=0{,}5\,\text{Дж}$.

Глава 2. Колебания

§1. Введение

Колебаниями называются процессы, в той или иной степени повторяющиеся во времени.

Если мы говорим, что система колеблется, то под этим подразумевается, что некоторая физическая величина, характеризующая систему, совершает колебания, т. е. изменяется, неоднократно принимая одно и то же значение. При колебаниях математического маятника (рис. 7) колеблющимися физическими величинами будут угол α отклонения нити

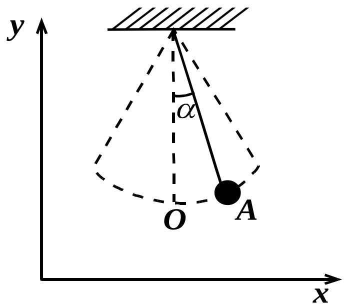

Рис. 7

от вертикали, координаты маятника x и y, расстояние вдоль траектории (по дуге окружности) от т. A до т. O и т. д. Когда верхушка дерева качается под действием ветра, то колеблются координаты верхушки. При распространении звука в воздухе колеблется давление воздуха в каждой точке воздушной среды. При дыхании человека колеблющейся физической величиной может служить объём грудной клетки. В колебательном контуре совершают колебания заряд конденсатора, напряжение на конденсаторе, ток в контуре и т. д. Напряжение на горящей лампочке в квартире и ток через неё тоже колеблются. Такие физические величины, как давление и температура, характеризующие состояние атмосферы, в течение, скажем, месяца, неоднократно принимают одни и те же значения, т. е. совершают колебания.

Колебательные процессы встречаются в разнообразных физических явлениях и широко распространены в окружающем нас мире. Несмотря на то, что колебания могут иметь различную физическую природу, они часто подчиняются одним и тем же закономерностям, описываются одинаковыми математическими формулами и уравнениями. Это позволяет с единой точки зрения математически описать отличающиеся по физической природе колебания.

§2. Периодические колебания

Колебания некоторой физической величины S называются периодическими, если все значения этой величины полностью повторяются через одно и то же время T, называемое *периодом*, т. е. $S(t+T)=S(t)$ для любого значения времени t. Если T – период, то $2T,\ 3T,\ 4T\ldots$ – тоже периоды. Поэтому в физике под периодом обычно понимают наименьший период, т. е. наименьший положительный отрезок времени, через который физическая величина S повторяется. При этом говорят, что за время одного периода совершается одно колебание.

Частотой периодических колебаний ν называется число колебаний в единицу времени. Легко показать, что $\nu=\dfrac{1}{T}$.

Действительно, если за время t совершено N колебаний, то частота $\nu=\dfrac{N}{t}$, а период $T=\dfrac{t}{N}$. Отсюда видно, что $\nu=\dfrac{1}{T}$. В системе СИ единицей измерения частоты служит *герц* (Гц), $1\ \text{Гц}=\text{с}^{-1}$.

Пусть периодически колеблющаяся величина S изменяется в пределах от $S_0 - A$ до $S_0 + A$, где $A > 0$. Тогда говорят, что величина S колеблется с *амплитудой* A около значения S_0.

§3. Гармонические колебания

Важным частным случаем периодических колебаний являются *гармонические колебания*, т. е. такие изменения во времени t физической величины S, которые идут по закону:

$$S(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{14}$$

где $A > 0$, $\omega > 0$. Из курса математики известно, что функция вида (14) изменяется в пределах от $-A$ до A и что наименьший положительный период у неё $\frac{2\pi}{\omega}$. Поэтому гармоническое колебание вида (14) происходит с амплитудой A и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Не следует путать *циклическую (круговую) частоту* ω и частоту ν колебаний. Между ними простая связь. Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $\nu = \frac{1}{T}$, то

$$\omega = 2\pi\nu.$$

В системе СИ размерность как ω, так и ν равна $с^{-1}$. Наименование Гц обычно применяется только для величины ν, а если необходимо указать размерность ω, то пишут просто $с^{-1}$.

Величина $\omega t + \varphi_0$ называется *фазой колебаний*. При $t = 0$ фаза равна φ_0, и поэтому φ_0 называется *начальной фазой*.

Отметим, что при одном и том же t:

$$A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos[\omega t + (\varphi_0 + 2\pi n)], \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Видно, что начальная фаза для одного и того же колебания есть величина, определённая с точностью до $2\pi n$. Поэтому из множества возможных значений начальной фазы выбирают обычно значение начальной фазы наименьшее по модулю или наименьшее положительное. Но делать это не обязательно. Например, если дано колебание $S = A\cos(\omega t + \frac{13}{6}\pi)$, то удобнее записать его в виде $S = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$ и работать в дальнейшем с последним видом записи этого колебания. Можно показать, что колебания вида

$$S = a\sin(\gamma t + \alpha_0) \quad \text{и} \quad S = a\cos(\gamma t + \alpha_0), \tag{15}$$

где a и γ могут быть любого знака, с помощью простых тригонометрических преобразований всегда приводятся к виду (14), причём $A = |a|$, $\omega = |\gamma|$, а φ_0 не равно α_0, вообще говоря. Таким образом, колебания вида (15) являются гармоническими с амплитудой $|a|$ и циклической частотой $|\gamma|$. Не приводя общего доказательства, проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пусть требуется показать, что колебание $S = -16\sin(20\pi t - \frac{\pi}{3})$ будет гармоническим и найти амплитуду A, циклическую частоту ω, период T и начальную фазу φ_0. Действительно,

$$S = -16\sin(20\pi t - \frac{\pi}{3}) = 16\sin(\frac{\pi}{3} - 20\pi t) =$$

$$= 16\cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{3} - 20\pi t)) = 16\cos(20\pi t + \frac{\pi}{6}).$$

Видим, что колебание величины S удалось записать в форме (14). При этом $A = 16$, $\omega = 20\pi$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{10}$, $\varphi_0 = +\frac{\pi}{6}$.

Попробуйте самостоятельно убедиться, что

$$x = -18\cos(\frac{\pi}{10} - 5t) = 18\cos(5t + \frac{9\pi}{10}),$$

$$S = 4\sin(8t - \frac{\pi}{3}) = 4\cos(8t - \frac{5\pi}{6}).$$

Естественно, что запись гармонических колебаний в форме (15) ничем не хуже записи в форме (14), и переходить в конкретной задаче от записи в одной форме к записи в другой обычно нет необходимости. Нужно только уметь сразу находить амплитуду, циклическую частоту и период, имея перед собой любую форму записи гармонического колебания.

Иногда полезно знать характер изменения первой и второй производных по времени от величины S, которая совершает гармонические колебания (колебания по гармоническому закону). Если $S = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, то дифференцирование S по времени t даёт:

$$S' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0), \quad S'' = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Видим, что S' и S'' колеблются по гармоническому закону с той же циклической частотой ω, что и величина S, и амплитудами $A\omega$ и $A\omega^2$.

Пример. Координата x тела, совершающего гармонические колебания вдоль оси x, изменяется по закону $x = 2\sin 6t$, где x – в сантиметрах, время t – в секундах. Требуется записать закон изменения скорости и ускорения тела и найти их максимальные значения. Для ответа на поставленный вопрос заметим, что первая производная по времени от величины x есть проекция скорости тела на ось x, а вторая производная от x есть проекция ускорения на ось x: $x' = v_x$, $x'' = a_x$. Продифференцировав выражения для x по времени, получаем: $x' = v_x = 12\cos 6t,\ x'' = a_x = -72\sin 6t$. Максимальные значения скорости и ускорения $v_{\max} = 12$ см/с, $a_{\max} = 72$ см/с^2.

§4. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Пусть некоторая физическая величина S совершает гармонические колебания:

$$S(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (16)$$

Легко показать, что вторая производная по времени от S равна $S'' = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$. С учётом (16) получаем, что $S'' = -\omega^2 S$, т. е.

$$\boxed{S'' + \omega^2 S = 0.} \qquad (17)$$

Итак, можно сделать вывод: если величина S изменяется по гармоническому закону (16), то отсюда следует справедливость равенства (17). В математике показывается и обратное: если для величины $S = S(t)$ справедливо равенство (17) при всех допустимых значениях t, то $S(t)$ имеет только вид (16) и никакой другой. Причём A и φ_0 в (16) есть произвольные постоянные, конкретные значения которых зависят от так называемых начальных условий, т. е. от значений S и её производной S' в некоторый момент времени t (обычно при $t = 0$).

Равенства, связывающие функцию, её аргумент и производные функции по этому аргументу, называются в математике дифференциальными уравнениями. Поэтому равенство (17) называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

Таким образом, мы получили чрезвычайно важное как для теории, так и для решения задач утверждение: *если с помощью законов физики для физической величины S удалось записать дифференциальное уравнение вида $S'' + \omega^2 S = 0$, то отсюда будет следовать, что S изменяется обязательно по гармоническому закону $S(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ с циклической частотой ω* ($\omega = \sqrt{\omega^2} > 0$).

Конкретные значения амплитуды A *и начальной фазы* φ_0 *зависят от начальных условий.*

Заметим, что в (17) стоит величина ω^2, которая всегда положительна. Поэтому, например, уравнение $S''-6S=0$ не будет дифференциальным уравнением гармонических колебаний, т. к. не найдётся такого действительного значения ω, для которого ω^2 было бы равно -6.

§5. Свободные и собственные колебания. Затухание

Свободными колебаниями называются колебания, которые возникают в системе в результате однократного выведения её из состояния устойчивого равновесия. При свободных колебаниях в системе всегда действуют силы (в общем случае причины), стремящиеся возвратить систему в *положение равновесия* (положение, при котором в системе отсутствуют колебания). В случае колебаний груза на пружине возвращающей силой будет сила упругости пружины.

Если в системе отсутствуют силы трения или любые другие причины, препятствующие свободным колебаниям, то нет потерь энергии, и колебания могут происходить сколь угодно долго с постоянной амплитудой. Такие свободные колебания называют *собственными колебаниями*, а их частоту – *собственной частотой*.

Колебания, которые происходят с постоянным размахом (амплитудой) колеблющейся величины в течение всего времени наблюдения, называют *незатухающими*. Колебания, идущие с постоянно уменьшающимся размахом, называют *затухающими*. Ясно, что собственные колебания есть колебания незатухающие.

Свободные колебания реальных систем всегда затухающие. Механические колебания затухают, главным образом, из-за трения и возбуждения в окружающей среде упругих волн. В электрических колебательных системах затухание вызывается тепловыми потерями в проводниках, потерями энергии на излучение электромагнитных волн, тепловыми потерями в диэлектриках и ферромагнетиках, находящихся в электрических и магнитных полях. Чем сильнее препятствующее колебаниям воздействие, тем быстрее затухают колебания и прекращаются вовсе.

Наличие трения или любого другого сопротивления колебаниям вызывает торможение колебательного процесса, что приводит к увеличению периода, точнее, условного периода. Дело в том, что при затухании те понятия периода и частоты, которые были введены нами ранее, теряют смысл, т. к. затухающие колебания идут с уменьшающимся размахом изменения колеблющейся физической величины, и нет строгой повторяемости значений у колеблющейся величины. Для характеристики таких непериодических колебаний вводят понятие *условного периода* и *условной частоты*, называемых часто просто периодом и частотой затухающих колебаний. *Условным периодом* называют промежуток времени между следующими друг за другом моментами, когда колеблющаяся физическая величина S принимает аналогичные значения, например, промежуток времени между двумя максимальными значениями величины S или между соответствующими равновесными значениями S. Связь между условными частотой и периодом аналогична связи между обычными частотой и периодом.

Следует отметить, что небольшое затухание слабо меняет период. Например, в колебательном контуре с $L = 5$ мГн, $C = 0,2$ мкФ и $R = 20$ Ом амплитуда тока в контуре при свободных колебаниях уменьшается за период приблизительно в 1,5 раза. Периоды, рассчитанные по известной формуле $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (без учёта затухания) и по более точной формуле, учитывающей затухание, будут отличаться всего на 0,2 %. Даже при ещё большем сопротивлении, когда амплитуда тока уменьшается в 3 – 7 раз за период (сильное затухание), погрешность в определении периода по формуле, не учитывающей затухание, составит не более 5 %.

К сказанному выше о затухающих колебаниях можно добавить, что при увеличении затухания в системе условный период возрастает и при некоторых условиях

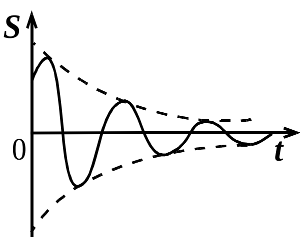

Рис. 8

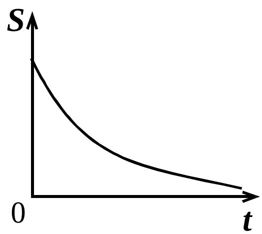

Рис. 9

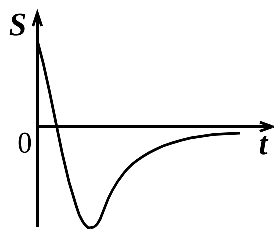

Рис. 10

обращается в бесконечность. Это означает, что изменение величины S не носит колебательного характера, а представляет собой так называемый *апериодический* процесс. На рис. 8 приведён пример зависимости $S(t)$ для затухающего колебания, а примеры апериодических процессов даны на рис. 9 и 10. Значение S при $t = 0$, т. е. начало графика $S(t)$, для затухающих колебаний или апериодического процесса зависит от того, в каком положении была система в момент начала наблюдений.

§6. Вынужденные колебания и резонанс

Колебательная система не всегда бывает предоставлена самой себе, совершая при этом свободные (в общем случае затухающие) колебания. На колебательную систему может действовать внешнее периодическое возмущающее воздействие, под влиянием которого в системе возникают так называемые вынужденные колебания.

Вынужденными колебаниями называют колебания системы, вызванные действием на неё внешней периодической силы (внешнего периодического воздействия), называемое вынуждающей силой. Если подвешенный на пружине груз двигать рукой вверх-вниз с некоторой частотой, то роль вынуждающей силы выполняет сила, действующая на груз со стороны руки. В колебательном контуре (рис. 11) с включённым в него внешним источником с ЭДС $\mathscr{E}\ (t)$, периодически изменяющейся во времени, вынуждающей силой будет $\mathscr{E}\ (t)$. После приложения вынуждающей силы (не обязательно гармонической) в колебательной системе, собственные колебания которой тоже не обязательно гармонические, возникает так называемый переходный режим вынужденных колебаний. Оказывается, что в этом режиме изменяющаяся величина $S(t)$ может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t).$$

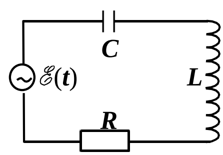

Рис. 11

Первое слагаемое $S_1(t)$ соответствует свободным затухающим колебаниям (с частотой, близкой к собственной), а второе слагаемое $S_2(t)$ представляет собой периодическое колебание с частотой возмущающей силы. Отсюда становится ясно, какой смысл вкладывается в слова, когда говорят, что в переходном режиме вынужденных колебаний система участвует в двух колебаниях. Отметим ещё, что при очень сильном затухании $S_1(t)$ может иметь не колебательный характер, а апериодический.

Через некоторое время свободные затухающие колебания $S_1(t)$ практически прекращаются, и система переходит в режим установившихся вынужденных колебаний с частотой вынуждающей силы.

Интересно, что при некотором значении (или даже значениях) частоты внешнего воздействия, называемой резонансной частотой, наступает *резонанс* – резкое возрастание амплитуды установившихся вынужденных колебаний.

Если вынуждающая сила меняется по гармоническому закону, а собственные колебания системы тоже гармонические, то резонанс наступает при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой. Правда, наличие затухания в любой реальной колебательной системе приводит к тому, что резонансная частота, как правило, несколько отличается от собственной частоты и от частоты (условной) свободных затухающих колебаний. Различие между всеми этими частотами тем меньше, чем меньше затухание. Поэтому говорят, что резонанс наступает при частоте внешнего воздействия, близкой к собственной.

Если же вынужденные колебания происходят под действием периодической с частотой ν, но не гармонической силы, а собственные колебания системы гармонические, то резонанс наступает тогда, когда какое-либо значение из набора $\nu,\ 2\nu,\ 3\nu, \ldots$ совпадает с частотой собственных колебаний (на практике из-за наличия затухания это совпадение только приближённое). Например, математический маятник (или качели) можно сильно раскачивать, если сильно толкать его (действовать с периодической, но не гармонической силой) не только с частотой, равной собственной, но и с частотой в целое число раз меньше собственной, т. е. толкать один раз за период колебаний, один раз за два периода, один раз за три периода и т. д.

В наиболее общем случае вынужденных колебаний, происходящих под действием периодической, но не гармонической силы частоты ν, и когда собственные колебания частоты ν_c тоже не гармонические, резонанс наступает, если какое-нибудь число из набора $\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu, \ldots$ будет близко к какому-либо числу из набора $\nu_c, 2\nu_c, 3\nu_c, \ldots$ Резонанс при этом может проявляться как сильно, так и слабо. Все зависит от характера собственных колебаний и характера внешнего периодического воздействия.

§7. Примеры колебательных процессов. Методы решения задач

Пример 1. На гладком горизонтальном столе груз массой m совершает колебания вдоль оси x на лёгкой пружине жёсткости k (рис. 12), прикреплённой одним концом к грузу, а другим к стене. Показать, что свободные колебания такого пружинного маятника гармонические и найти их период.

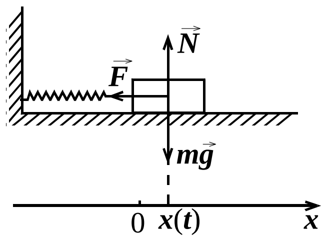

Рис. 12

Решение. Начало координат ($x = 0$) поместим в точку, соответствующую равновесному положению груза. За колеблющуюся физическую величину возьмём координату x груза.

<u>*1-й способ решения. Используется второй закон Ньютона.*</u>

Пусть груз при колебаниях в некоторый момент времени t имеет координату $x = x(t)$. Тогда проекция на ось x силы $\vec{F}$. действующей на груз со стороны пружины,

$$F_x = -kx \tag{18}$$

при любом знаке x, что легко проверить. На рис. 12 показано направление силы $\vec{F}$ при $x > 0$. На груз ещё действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны стола. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N},$ где $\vec{a}$ – ускорение груза.

Это векторное равенство, записанное в проекциях на ось x, имеет вид $ma_x = F_x$. Здесь $a_x = x''$ – проекция ускорения на ось x. Учитывая (18), имеем $mx'' = -kx$. Отсюда

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$

2-й способ. Используется закон сохранения энергии.

В момент, когда груз имеет координату x и проекцию на ось x скорости x', кинетическая энергия груза будет $\frac{1}{2}m(x')^2$, а потенциальная энергия деформированной пружины $\frac{1}{2}kx^2$. Так как полная энергия системы при колебаниях сохраняется, то $\frac{m(x')^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const$. Продифференцируем последнее равенство по времени: $\frac{1}{2}m \cdot 2x'x'' + \frac{1}{2}k \cdot 2xx' = 0$. Откуда $x'' + \frac{k}{m}x = 0$.

Как и в первом способе решения, но уже другим путём, мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Пример 2. Показать, что при действии на груз из предыдущего примера постоянной силы $\vec{F}_0$, направленной вдоль оси x, колебания остаются гармоническими с прежним периодом, но около нового положения равновесия, смещённого относительно прежнего на $x_0 = F_0 / k$ в сторону действующей силы $\vec{F}_0$ $\left(F_0 = \left|\vec{F}_0\right|\right)$.

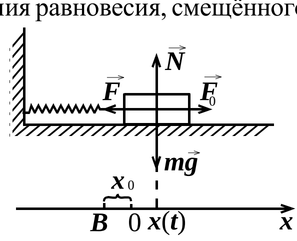

Рис. 13

Решение. Пусть для определённости сила $\vec{F}_0$ направлена вправо (рис. 13). При другом направлении силы все рассуждения аналогичны приведённым ниже. Положение равновесия – это положение системы при отсутствии колебаний. Ясно, что в положении равновесия пружина удлинена под действием силы $\vec{F}_0$ на величину

$$x_0 = \frac{F_0}{k} \tag{19}$$

по сравнению с ненапряжённым состоянием.

За начало координат возьмём точку, соответствующую равновесному положению груза.

Точка B соответствует положению груза при ненапряжённой пружине, т. е. положению равновесия груза в отсутствии силы $\vec{F}_0$.

Пусть $x = x(t)$ – зависящая от времени координата груза при колебаниях. Тогда удлинение пружины $\Delta x = x_0 + x$, а проекция на ось x силы $\vec{F}$, действующей на груз со стороны пружины,

$$F_x = -k(x + x_0). \tag{20}$$

Приведённые выражения для Δx и F_x справедливы при любом значении x, а не только при указанном на рис. 13, что можно проверить. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}_0 + \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}$, где $\vec{a}$ – ускорение груза, $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – сила нормального давления, действующая со стороны стола на груз. Запишем это векторное равенство в проекциях на ось x: $ma_x = F_0 + F_x$.

Подставляя сюда выражения для F_x из (20) и x_0 из (19) и учитывая, что проекция ускорения на ось x есть $a_x = x''$, имеем после упрощения $x'' + \frac{k}{m}x = 0$. Нами получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, не зависящим от F_0. Утверждение, сформулированное в условии примера 2, доказано.

Пример 3. На лёгкой пружине жёсткостью k подвешен груз массой m. Показать, что вертикальные собственные колебания такого пружинного маятника гармонические, и найти их период.

Решение. Направим ось x вниз (рис. 14), начало координат поместим в точку, соответствующую равновесному положению груза. В

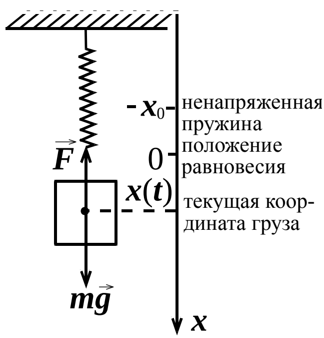

Рис. 14

этом положении пружина растянута по сравнению с ненапряжённым состоянием на величину x_0, причём

$$kx_0 = mg. \tag{21}$$

1-й способ. Используется второй закон Ньютона.

Если текущая координата $x = x(t)$, то проекция на ось x силы $\vec{F}$, действующей на груз со стороны пружины,

$$F_x = -k(x_0 + x). \tag{22}$$

Равенство (22) справедливо для любого значения координаты x колеблющегося груза, что, вообще говоря, нужно проверить, т. к. мы хотим получить дифференциальное уравнение колебаний, справедливое не только для одного значения x, а для всех значений.

Запишем уравнение движения груза (уравнение второго закона Ньютона) в проекциях на ось x, учитывая, что проекция на ось x ускорения груза есть вторая производная x'' от координаты по времени:

$$mx'' = F_x + mg. \tag{23}$$

С учётом (22) и (21) уравнение (23) принимает вид:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \tag{24}$$

Видно, что это дифференциальное уравнение гармонических колебаний, период которых

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{25}$$

2-й способ решения. Используется закон сохранения энергии.

За нулевой уровень потенциальной энергии груза в поле тяжести удобно взять положение равновесия. Полная механическая энергия колебаний системы представляет собой сумму кинетической энергии груза $\frac{1}{2}m(x')^2$, потенциальной энергии груза в поле тяжести $mg(-x) = -mgx$ и потенциальной энергии деформации пружины $\frac{1}{2}k(x_0 + x)^2$. Здесь x' – проекция скорости груза на ось x, её квадрат равен, естественно, квадрату модуля скорости.

Полная механическая энергия при колебаниях должна сохраняться:

$$\frac{m(x')^2}{2} + \frac{k(x_0 + x)^2}{2} - mgx = const. \tag{26}$$

Дифференцируем (26) по времени:

$$mx'x'' + k(x_0 + x)x' - mgx' = 0.$$

С учётом (21) после простых преобразований получаем $x''+\dfrac{k}{m}x=0$, что совпадает с (24). Итак, колебания гармонические с периодом, даваемым (25).

3-й способ. Сведение задачи к известной другой.

Заметим, что сила тяжести $m\vec{g}$ есть постоянно действующая на груз сила, аналогичная силе $\vec{F}_0$ в примере 2. Поэтому сразу можно сказать, что колебания подвешенного на пружине груза будут гармоническими с периодом

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (27)$$

Причём новое положение равновесия висящего груза сместится на величину x_0 вниз ($kx_0=mg$) по отношению к положению равновесия при отсутствии поля тяжести. Около нового положения равновесия и колеблется подвешенный груз.

Теперь становится ясным, почему говорят, что период колебаний пружинного маятника определяется формулой (27), и не указывают при этом, скользит ли груз по столу или подвешен на пружине. Это полезно знать.

Пример 4. Показать, что в однородном поле тяжести малые собственные колебания в вертикальной плоскости математического маятника длиной l являются гармоническими и найти их период.

Решение. Пусть у маятника длина нити l и масса шарика m. За колеблющуюся физическую величину удобно взять угол α отклонения нити от вертикали (рис. 15). Будем считать α положительным, если маятник отклонён вправо от положения равновесия, и отрицательным, если он отклонён влево.

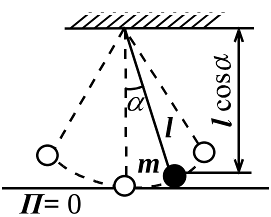

Рис. 15

Выразим кинетическую и потенциальную энергии шарика массой m в произвольный момент времени t через угол $\alpha=\alpha(t)$ и производную угла по времени $\alpha'=\alpha'(t)$. Угловая скорость шарика α', его линейная скорость $v=\alpha' l$ и кинетическая энергия

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2.$$

Если за нулевой уровень потенциальной энергии ($\Pi=0$) взять уровень, соответствующий нахождению шарика в положении равновесия маятника, то потенциальная энергия шарика в момент отклонения нити на угол α окажется $\Pi=mg(l-l\cos\alpha)$. Поскольку $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, то $\Pi=2mgl\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$. Для малых углов можно считать, что значения их синусов приблизительно равны самим углам (в радианах). Поэтому $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$, и можно принять, что

$$\Pi = 2mgl\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mgl\alpha^2.$$

Полная энергия системы, равная $K+\Pi$ при колебаниях сохраняется. Следовательно, $\frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2+\frac{1}{2}mgl\alpha^2=const$.

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\frac{1}{2}ml^2 2\alpha'\alpha''+\frac{1}{2}mgl2\alpha\alpha'=0.$$

После упрощения имеем: $\alpha''+\frac{g}{l}\alpha=0.$

Нами получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины α с циклической частотой $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Итак, малые колебания математического маятника являются гармоническими с периодом $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$

Пример 5. Дан колебательный контур без затухания (сопротивление равно нулю) с постоянными ёмкостью C и индуктивностью L. Показать, что свободные электрические колебания в контуре гармонические и найти их период.

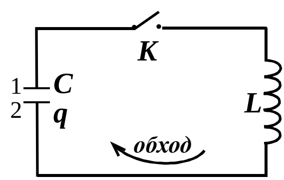

Рис. 16

Решение. Если зарядить конденсатор и затем замкнуть ключ, то в схеме на рис. 16 возникнут колебания заряда на конденсаторе, колебания тока в цепи, колебания ЭДС самоиндукции в катушке и т. д. За колеблющуюся величину удобно взять заряд на одной из обкладок конденсатора.

1-й способ решения. Используем закон Ома.

Выберем положительное направление обхода контура, например по часовой стрелке, как показано на рис. 16. Это означает, что ток I положителен, если его направление совпадает с положительным направлением обхода, и отрицателен, если не совпадает. Аналогичное можно сказать и про знак ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}$, при расчёте которой по формуле $\mathscr{E}=-LI'$ автоматически будет получаться знак у ЭДС, согласованный с направлением обхода.

Обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, для которой $q' = I$ (для другой обкладки $q' = -I$, что не очень удобно). Это легко сделать, если учесть, что $q' = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$. Для схемы на рис. 16 q следует взять на нижней обкладке.

По закону Ома для участка $1 - L - 2$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E} = IR. \tag{28}$$

Поскольку сопротивление в контуре $R = 0$, $\varphi_1 - \varphi_2 = -\dfrac{q}{C}$, $\mathscr{E} = -LI' = -L(q')' = -Lq''$, то равенство (28) после деления на $-L$ принимает вид:

$$q'' + \frac{1}{LC} q = 0. \tag{29}$$

Итак, получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины q с циклической частотой $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Полезно заметить, что при изменении заряда по гармоническому закону $q = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ ток

$$I = q' = -q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = q_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

ЭДС самоиндукции $\mathscr{E} = -LI' = Lq_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ и напряжение на конденсаторе $U = \dfrac{q}{C} = \dfrac{q_0}{C}\cos(\omega t + \varphi_0)$. Итак, заряд на конденсаторе, ток в катушке, ЭДС самоиндукции в катушке и напряжение на конденсаторе совершают гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$, причём $q, \mathscr{E}, U$ колеблются в фазе, а колебания тока опережают колебания заряда по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$.

2-й способ решения. Используется закон сохранения энергии.

Выберем положительное направление обхода контура и обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, для которой $q' = I$. По закону сохранения энергии

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = const. \tag{30}$$

Продифференцируем (30) по времени: $LII'+\frac{1}{C}qq'=0$. Учитывая, что $I=q'$, а $I'=(q')'=q''$, получим $q''+\frac{1}{LC}q=0$. Последнее уравнение совпало, что и следовало ожидать, с уравнением (29), и дальнейшие рассуждения те же, что и в первом способе решения.

Пример 6. Батарею с постоянной ЭДС $\mathscr{E}_0$ подключили к катушке с индуктивностью L и конденсатору с ёмкостью C через ключ K. В начальный момент времени ключ K разомкнут и конденсатор заряжен до напряжения $3\mathscr{E}_0$ (рис. 17). Показать, что колебания тока в таком контуре гармонические и найти их период. Построить график зависимости тока от времени. Омическими сопротивлениями в схеме пренебречь.

Замечание. Если решение этого примера окажется непонятным, поскольку требуется значительная математическая культура, то рекомендуется прочитать и осмыслить только вывод в конце решения.

Решение. Выберем положительное направление обхода контура по часовой стрелке. Если через q обозначить заряд нижней обкладки конденсатора, то ток в контуре $I=q'$ и ЭДС индукции в катушке $\mathscr{E}=-LI'=-Lq''$. Заметим, что в состоянии равновесия колебательной системы (при отсутствии колебаний в контуре с замкнутым ключом) заряд нижней обкладки конденсатора равен $C\mathscr{E}_0$. Используя закон Ома, получим:

$$\mathscr{E}_0+\mathscr{E}-\frac{q}{C}=0.$$

После подстановки в последнее равенство выражения для $\mathscr{E}$ и простых преобразований имеем:

$$q''+\frac{1}{LC}q=\frac{\mathscr{E}_0}{L}. \qquad (31)$$

Дифференциальное уравнение (31) отличается от уравнения (29) только тем, что в его правой части вместо нуля стоит постоянная величина $\mathscr{E}_0/L$. Уравнение (31) можно привести к дифференциальному уравнению гармонических колебаний, аналогичному (17). Для этого запишем (31) в виде:

$$q''+\frac{1}{LC}\left(q-C\mathscr{E}_0\right)=0 \qquad (32)$$

и перейдём к новой переменной Q такой, что $Q = q - C\mathscr{E}_0$. Ясно, что $Q' = q'$ и $Q'' = q''$. Поэтому (32) принимает вид:

$$Q'' + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

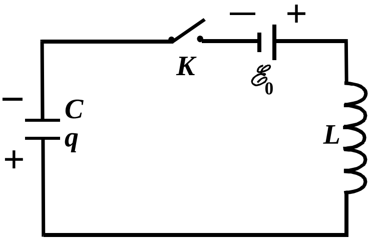

Рис. 17

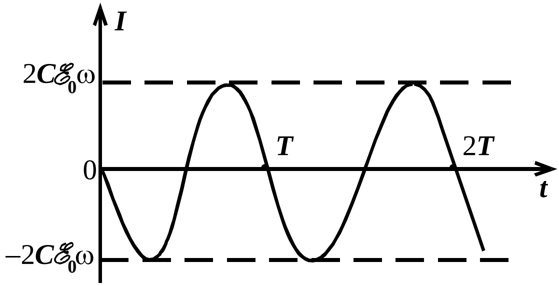

Рис. 18

Получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний для величины Q с циклической частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Итак, $Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где Q_0 и $\varphi -$ некоторые постоянные. Отсюда следует, что ток изменяется по закону $I = -Q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$. Значения Q_0 и φ найдём, воспользовавшись тем, что при $t = 0$ ток $I = 0$, а заряд конденсатора $q = 3C\mathscr{E}_0$, т. е. $Q = q - C\mathscr{E}_0 = 2C\mathscr{E}_0$. Тогда получим $Q_0 = 2C\mathscr{E}_0$, $\varphi = 0$, и окончательно закон изменения тока имеет вид:

$$I = -2C\mathscr{E}_0 \omega \sin \omega t,$$

где $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Таким образом, колебания тока в контуре гармонические с периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$ и амплитудой $2C\mathscr{E}_0\omega$. График зависимости тока от времени дан на рис. 18.

Вывод. *При наличии в цепи колебательного контура батареи с постоянной ЭДС период колебаний тока в контуре остаётся таким же, как и в контуре без батареи.* Кроме того, можно дополнительно показать, что колебания заряда конденсатора идут около нового равновесного значения заряда, равного $C\mathscr{E}_0$, а колебания напряжения на конденсаторе происходят тоже около нового равновесного значения напряжения, равного ЭДС батареи. Причём период колебаний заряда и напряжения будет таким же, как и при отсутствии батареи.

Пример 7. Последовательно с катушкой индуктивности L и конденсатором C через ключ K подключили батарею с постоянной ЭДС $\mathscr{E}_0$ (рис. 19). В начальный момент времени конденсатор не заряжен. Определить максимальную величину тока в цепи после замыкания ключа K. Омическим сопротивлением в цепи пренебречь (МФТИ, 1982).

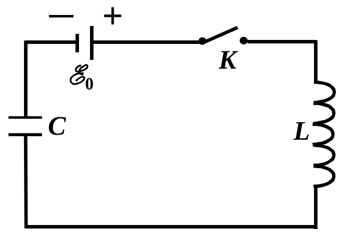

Рис. 19

Решение. Можно было бы доказать, что ток в цепи изменяется по гармоническому закону $I = \mathscr{E}_0 C\omega \sin \omega t$ с циклической частотой $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. А далее заключить, что максимальное значение тока $I_0 = C\mathscr{E}_0\omega = \mathscr{E}_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}$. Решая задачу, сформулированную в этом примере, таким способом, мы получим ответ на большее количество вопросов, чем спрашивается, и, в частности, докажем, что после замыкания ключа колебания тока гармонические и фактически найдём их период, что совершенно не требуется в задаче! Для ответа на некоторые вопросы в задачах с электрическими схемами иногда достаточно воспользоваться фундаментальными законами сохранения энергии и заряда, законом Ома, тем, что при максимальном значении изменяющегося тока его производная по времени равна нулю (вспомним исследование функций) и ЭДС самоиндукции тоже, соответственно, равна нулю, и другими соображениями.

Вернёмся к нашей задаче. Пусть в момент, когда ток максимален и равен I_0, заряд на нижней обкладке конденсатора q. Такой же суммарный заряд пройдёт с момента замыкания ключа и через источник $\mathscr{E}_0$, и источник совершит работу $q\mathscr{E}_0$. По закону сохранения энергии работа источника пойдёт на изменение энергии магнитного поля катушки индуктивности и электрического поля в конденсаторе:

$$\frac{LI_0^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = q\mathscr{E}_0. \tag{33}$$

В любой момент для контура, используя закон Ома, можно записать

$$\mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_{\text{инд}} - \frac{q}{C} = IR. \tag{34}$$

Поскольку сопротивление контура $R = 0$ и при максимальном значении тока I ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}} = 0$, то (34) принимает вид:

$$\mathscr{E}_0 - \frac{q}{C} = 0. \qquad (35)$$

Исключая из (33) и (35) q, находим, что максимальное значение тока

$$I_0 = \mathscr{E}_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Контрольные вопросы

1. В катушку вставляется постоянный магнит (рис. 20). В каком направлении течёт ток через гальванометр Γ? Куда направлена сила, действующая на катушку?

2. На общий сердечник намотаны две катушки (рис. 21). Найти направление тока через гальванометр Γ при перемещении движка реостата вверх.

3. Из кольца выдвигается магнит. Какое электромагнитное явление возникает в кольце из: а) проводника; б) диэлектрика?

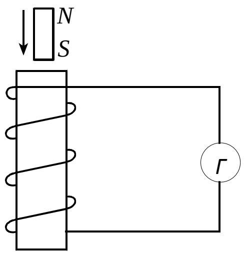

Рис. 20

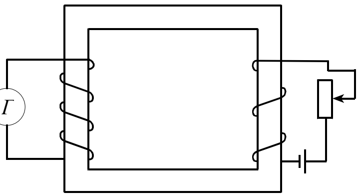

Рис. 21

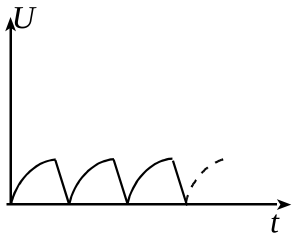

Рис. 22

4. Не выполняя тригонометрических преобразований, найти амплитуду A и циклическую частоту ω следующих гармонических колебаний:

1) $U = -9\sin(14t - 0{,}3\pi)$, где U в вольтах, t в секундах;

2) $x = 17\cos(0{,}24\pi - 5t)$, где x в сантиметрах, t в секундах.

5. Координата тела, колеблющегося вдоль оси x, изменяется по закону $x = -4\sin(6t - \pi/7)$, где t в секундах, x в сантиметрах. Найти амплитудные значения скорости и ускорения тела.

6. Подвешенный на пружине шарик отклонили от его равновесного положения вниз на $S =$ 20 см и сообщили ему начальную скорость $v_0 = 7$ м/с, направленную тоже вниз, начав одновременно отсчёт времени. Определить амплитуду колебаний шарика и записать закон изменения координаты x шарика от времени. Ось x направлена вертикально вверх. Масса шарика $m =$ 0,1 кг, жёсткость пружины $k =$ 40 Н/м.

7. Как и во сколько раз изменятся периоды колебаний математического и пружинного маятников на Луне, где ускорение свободного падения в 6 раз меньше, чем на Земле?

8. Как и во сколько раз изменится период собственных колебаний в колебательном контуре, если параллельно конденсатору подключить конденсатор с ёмкостью в 8 раз большей?

9. В колебательном контуре при свободных колебаниях напряжение на конденсаторе изменяется по закону $U = 60\sin 200\pi t$. Здесь t в секундах, U в вольтах. Индуктивность контура $L = 1$ Гн. Найти период колебаний и ёмкость контура. Записать закон изменения тока в контуре.

10. Напряжение на зажимах генератора (рис.11) изменяется периодически со временем t по закону, графически представленному на рис. 22. При каких значениях частоты генератора можно ожидать резкого увеличения тока в цепи, если $L =$ 100 мГн, $C =$ 10мкФ?

Задачи

1. Из идеального проводника (с нулевым удельным сопротивлением) изготовлен угол (рис. 23). По сторонам этого угла двигают с постоянной скоростью $v = 2$ м/с вдоль биссектрисы A_1C угла стержень A_2A_3 так, что он остаётся всё время перпендикулярным биссектрисе. Площадь поперечного сечения стержня $S = 1$ мм^2, удельное сопротивление $\rho = 2{,}1\cdot 10^{-7}$ Ом. Сила тока в цепи $A_1A_2A_3$ равна $I = 5$А. Определить величину индукции B однородного магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости угла. (МФТИ, 1983)

2. Проводящий стержень MN длиной l расположен параллельно диагонали $B'D$ куба (рис. 24). Стержень движется поступательно с постоянной скоростью v вдоль ребра AD в постоянном однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль ребра $C'C$. Найти ЭДС индукции в стержне.

3. Металлический стержень AC одним концом (точка A) шарнирно закреплён на вертикальном диэлектрическом стержне AO (рис. 25). Другой конец (точка C) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити OC длиной $R =$ 1 м. Стержень AC вращается вокруг стержня AO в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна $B = 10^{-2}$ Тл. Угловая скорость вращения стержня AC $\omega =$ 60 рад/с. Определить разность потенциалов (по модулю) между точками A и C. (МФТИ, 2002)

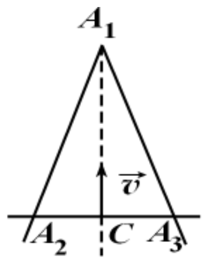

Рис. 23

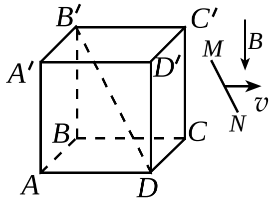

Рис. 24

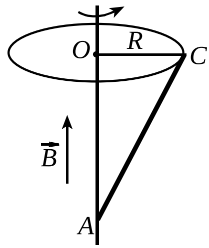

Рис. 25

4. В цепи (рис. 26) $L = 3$ мГн, $\mathcal{E} = 12$ В. Ключ замыкают. С какой скоростью начнёт (сразу после замыкания) возрастать ток?

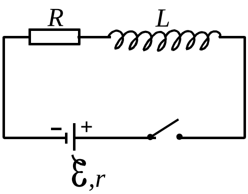

Рис. 26

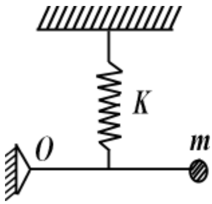

Рис. 27

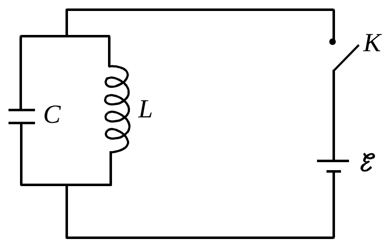

Рис. 28

5*. Конструкция (рис. 27) из жёстко соединённых легкого стержня и небольшого по размерам шарика массой m может совершать колебания в вертикальной плоскости под действием пружины с жёсткостью k, двигаясь при вращении без трения вокруг горизонтальной оси O. Пружина лёгкая, точка её прикрепления к стержню делит его длину в отношении 1:2, считая от шарика. В положении равновесия стержень горизонтален, а ось пружины вертикальна. Найти: 1) удлинение пружины в положении равновесия системы; 2) период малых колебаний конструкции.

6. В цепи (рис. 28) $L, C, \mathcal{E}$ известны, конденсатор вначале не заряжен. Ключ K на некоторое время замыкают, а затем размыкают. Определить ток I_0 через катушку индуктивности в момент размыкания ключа, если максимальный ток, протекающий через неё после размыкания, оказался $2I_0$. Сопротивлением катушки и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

7*. Цепь, состоящая из двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 и катушки с индуктивностью L (рис. 29), первоначально разомкнута. Конденсатор C_1 заряжают до напряжения V, а конденсатор C_2 остаётся незаряженным. Определить максимальную величину силы тока в цепи после замыкания ключа K. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

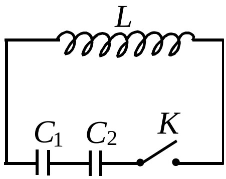

Рис. 29

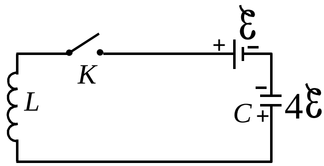

Рис. 30

8*. В цепи (рис. 30) в начальный момент времени ключ K разомкнут и конденсатор заряжен до напряжения $4\mathcal{E}$. Индуктивность катушки L, ёмкость конденсатора C, ЭДС батареи $\mathcal{E}$. Пренебрегая омическими сопротивлениями в схеме, показать, что после замыкания ключа K колебания тока в таком контуре гармонические, и найти их период. Построить график зависимости тока от времени.