Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей
«Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института (государственного университета)»

ФИЗИКА

Основные законы механики

Задание №1 для 11-х классов

(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2013

Составитель: А.Ю. Чугунов, магистр естественных наук.

Физика: задание №1 для 11-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2013, 32 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 28 сентября 2013г.

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов, являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Чугунов Алексей Юрьевич
Подписано 05.06.13. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0.
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1400. Заказ №2-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-6 3-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

В предлагаемом Задании основное внимание будет уделено примерам решения задач по темам различных разделов механики. Для успешной работы над ним Вам будет полезно использование соответствующего материала школьных учебников по физике.

§1. Кинематика

В *кинематике* устанавливаются математические соотношения между различными характеристиками механического движения, такими как перемещение, пройденный путь, скорость, ускорение, время движения. При этом механическое движение рассматривается без выяснения причин, его вызывающих.

Пространственное положение тела (материальной точки) определяется с помощью её *радиус-вектора* $\vec{r}$ или, что равносильно, совокупности трёх чисел x, y и $z,$ представляющих собой проекции радиус-вектора на соответствующие оси декартовой системы координат. *Движение тела определено, если известна зависимость радиус-вектора от времени* $\vec{r}(t)$ или *известны скалярные функции* $x(t), y(t)$ *и* $z(t)$.

Для равномерного прямолинейного движения, т. е. для движения с постоянной скоростью $\vec{v} = const,$ функция $\vec{r}(t)$ имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \tag{1}$$

для равнопеременного движения с постоянным ускорением $\vec{a} = const$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \tag{2}$$

В этих формулах $\vec{r}_0$ характеризует начальное положение тела и представляет собой его радиус-вектор в начальный момент времени $t = 0,$ соответственно $\vec{v}_0$ – начальная скорость тела при $t = 0.$

Зависимость *мгновенной скорости* $\vec{v}$ (или просто *скорости* $\vec{v}$) тела от времени t при равнопеременном движении получается путём дифференцирования (2) по времени и имеет вид:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{3}$$

Часто в процессе решения задач для удобства приходится переходить от одной системы отсчёта (условно назовем её неподвижной) к другой системе отсчёта, движущейся определённым образом относительно первой. В этих случаях необходимо знать так называемые формулы преобразования радиус-векторов, скоростей и ускорений тел в различных системах отсчёта. Так, *если одна система отсчёта движется поступательно относительно другой, условно неподвижной, то справедливы следующие соотношения* для указанных величин:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}',$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ – радиус-векторы материальной точки соответственно в неподвижной и движущейся системах отсчёта, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начала координат (точки O') движущейся системы отсчёта в неподвижной системе отсчёта. Аналогичные обозначения использованы в приведённых формулах для скоростей и ускорений материальной точки.

Из последней формулы вытекает важное следствие, а именно: при $\vec{a}_0 = 0,$ когда скорость поступательно движущейся системы отсчёта постоянна, ускорения материальной точки в неподвижной и движущейся системах отсчёта одинаковы.

При решении задач бывает удобно записывать векторные кинематические уравнения в проекциях на оси координат. В случаях, когда траектория тела лежит в одной плоскости, можно ограничиться двумя координатными осями Ox и $Oy,$ так чтобы исходные векторные уравнения сводились к двум скалярным. Для этого нужно всего лишь совместить плоскость xOy с плоскостью траектории тела. Так, например, векторные уравнения (2) и (3) будут соответственно эквивалентны системам скалярных уравнений (4) и (5):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}, \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $x(t), y(t); x_0, y_0; v_{0x}, v_{0y}; v_x, v_y; a_x, a_y$ – проекции на оси Ox и Oy векторов $\vec{r}(t);\ \vec{r}_0;\ \vec{v}_0; \vec{v}$ и $\vec{a}$ соответственно.

При равномерном движении тела по окружности вектор скорости изменяется только по направлению, оставаясь неизменным по модулю и направленным по касательной к окружности. При этом вектор ускорения направлен к центру окружности перпендикулярно вектору скорости, т. е. по нормали $\vec{n}$ к траектории (рис. 1). Такое ускорение часто называют *центростремительным* или *нормальным,* его модуль равен

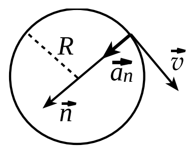

Рис. 1

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad (6)$$

где R – радиус окружности. Эта же формула справедлива и при движении тела с постоянной по модулю скоростью v по произвольной криволинейной траектории. В этом случае R есть радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке. Вектор ускорения $\vec{a}_n$ направлен к центру кривизны перпендикулярно вектору скорости и характеризует изменение скорости по направлению.

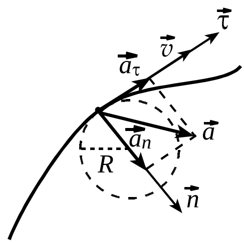

Рис. 2

Если же скорость изменяется не только по направлению, но и по модулю, то у вектора ускорения $\vec{a}$ кроме нормальной составляющей (6) будет ещё так называемая *тангенциальная* составляющая $\vec{a}_\tau$, направленная по касательной $\vec{\tau}$ к траектории в данной точке (рис. 2) в сторону вектора скорости или против него в зависимости от того, увеличивается или уменьшается модуль скорости тела. Модуль полного ускорения $\vec{a}$ по теореме Пифагора будет равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Решение кинематических задач сводится к использованию указанных выше формул и уравнений в конкретных сформулированных условиях.

Задача 1. Необходимо переправиться через реку шириной H. Под каким углом α к течению должна плыть лодка, чтобы переправиться на противоположный берег за минимальное время? Где окажется лодка, переплыв реку? Какой путь S она пройдёт, если скорость течения реки постоянная и равна $\vec{v}_1$, а скорость лодки относительно воды постоянна и равна $\vec{v}_2$?

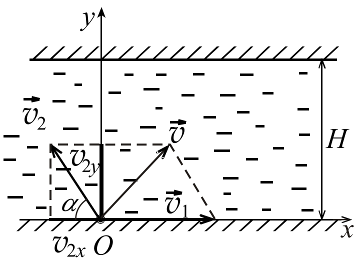

Рис. 3

Решение. Поместим начало O неподвижной системы отсчёта в то место, где лодка отчаливает от берега. Оси координат направим так, как показано на рис. 3. При таком выборе системы отсчёта начальные координаты лодки равны нулю:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0.$$

Скорость лодки $\vec{v}$ в выбранной системе отсчёта равна векторной сумме скорости течения $\vec{v}_1$ и скорости лодки относительно воды $\vec{v}_2$, то есть

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Предположим, что вектор $\vec{v}_2$ составляет с берегом угол α. Поскольку лодка движется прямолинейно и равномерно, то, записав уравнение (1) в проекциях на оси координат, получим:

$$\begin{cases} x = (v_1 - v_2\cos\alpha)\cdot t, \\ y = (v_2\sin\alpha)\cdot t. \end{cases}$$

Время $t_{\text{п}}$, необходимое для переправы через реку, находим из последнего уравнения при условии $y = H$, а именно $t_{\text{п}} = \dfrac{H}{v_2\sin\alpha}$. Значение $t_{\text{п}}$ будет минимальным, если $\sin\alpha$ максимален, т. е. при $\alpha = \pi/2$. Отсюда $t_{\min} = \dfrac{H}{v_2}$. Этот случай показан на рис. 4. При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ уравнение для x принимает вид: $x = v_1 t$. Поэтому, когда лодка окажется на другом берегу, смещение X вдоль оси Ox будет равно $X = v_1 t_{\min} = \dfrac{v_1}{v_2}H.$

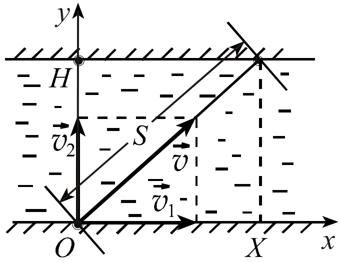

Рис. 4

Длину S пройденного лодкой пути найдём по теореме Пифагора:

$$S = \sqrt{X^2 + H^2} = \frac{H}{v_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Задача 2. Тело бросают с поверхности земли, сообщив ему начальную скорость $\vec{v}_0$, направленную под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите нормальную и тангенциальную составляющие ускорения тела на высоте h, когда тело ещё не достигло наивысшей точки траектории. Найдите также время $t_{\text{п}}$ подъёма тела на высоту h и горизонтальную проекцию l перемещения тела в этот момент времени.

Решение. Направим оси декартовой прямоугольной системы координат так, как показано на рис. 5. Начало отсчёта O поместим в точку бросания. Запишем начальные условия движения тела: $x_0 = 0,\ \ y_0 = 0,$ $v_{0x} = v_0\cos\alpha,\ v_{0y} = v_0\sin\alpha$. При отсутствии сопротивления воздуха тело движется с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Проекции ускорения тела на оси координат равны: $a_x = 0, a_y = -g$. С учётом сказанного кинематические уравнения равнопеременного движения (4) и (5) в нашем случае принимают вид:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases} \qquad (7) \qquad\qquad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha, \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt. \end{cases} \qquad (8)$$

Пусть при $t = t_{\text{ї}}$ тело достигло высоты h, тогда $y = h$, $x = l$. В этом случае уравнения системы (7) дают:

$$l = (v_0 \cos\alpha)t_{\text{п}}, \quad h = (v_0 \sin\alpha)t_{\text{п}} - \frac{g{t_{\text{п}}}^2}{2}.$$

Из последнего уравнения находим

$$t_{\text{п}} = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}\right).$$

Второе значение $t_{\text{п}}$ (со знаком «+» перед квадратным корнем) соответствует случаю, когда тело «перевалило» за наивысшую точку траектории и вновь оказалось на высоте h над землёй. Этот случай по условию задачи нас не интересует.

В момент времени $t = t_{\text{п}}$ проекция l перемещения тела равна

$$l = (v_0 \cos\alpha)t_{\text{п}} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g} \cdot \left(v_0 \sin\alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}\right).$$

Модули нормальной и тангенциальной составляющих ускорения тела будут соответственно равны

$$a_n = g\cos\beta, \quad a_\tau = -g\sin\beta,$$

где β – угол, который составляет с горизонтом (осью Ox) вектор $\vec{v}$ скорости тела в момент времени $t = t_{\text{п}}$ (рис. 5). Угол β легко определить, записав уравнения системы (8) при $t = t_{\text{п}}$, а именно

$$v\cos\beta = v_0 \cos\alpha,$$
$$v\sin\beta = v_0 \sin\alpha - gt_{\text{п}}.$$

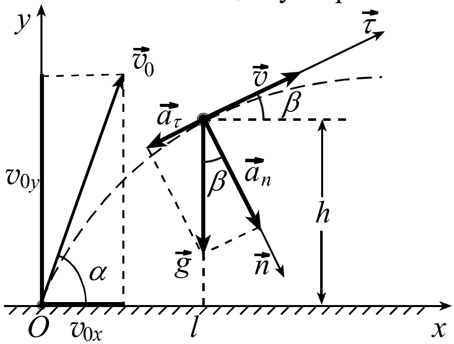

Рис. 5

Действительно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad \text{и} \quad \cos\beta = \frac{v_0 \cos\alpha}{v}.$$

Отсюда $\beta = \arccos\left(\dfrac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\right)$.

§2. Динамика

В *динамике* механическое движение изучается в связи с причинами, вызывающими тот или иной его характер. В инерциальных системах отсчёта этими причинами являются различные *взаимодействия* рассматриваемого тела с другими телами, что выражается в наличии *сил,* действующих на тело.

В основе динамики материальной точки лежат законы Ньютона.

1-й закон: *тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия со стороны других тел не выведут его из этого состояния.*

Система отсчёта, по отношению к которой тело, свободное от внешних воздействий, покоится или движется равномерно и прямолинейно, называется ***инерциальной системой отсчёта.***

2-й закон: *в инерциальных системах отсчёта ускорение* $\vec{a}$ *тела прямо пропорционально равнодействующей* $\vec{F}$ *всех сил, действующих на тело со стороны других тел, обратно пропорционально массе* m *тела и направлено в сторону* $\vec{F}$: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

3-й закон: *тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю, противоположными по направлению и приложенными соответственно к взаимодействующим телам.*

В инерциальных системах отсчёта все силы обусловлены только взаимодействием тел, эти силы возникают парами и к ним применим 3-й закон Ньютона.

Формулу, выражающую 2-й закон Ньютона, можно записать более удобно: $\vec{F} = m\vec{a}$. Однако такую запись не следует трактовать как равенство двух сил $\vec{F}$ и $m\vec{a}$. Это есть выражение равнодействующей силы $\vec{F}$ через массу тела и вызванное этой силой ускорение. В динамике взаимодействия тел считаются заданными, поэтому выражения для сил, входящих в законы динамики, должны быть взяты из других разделов физики, где изучается их природа.

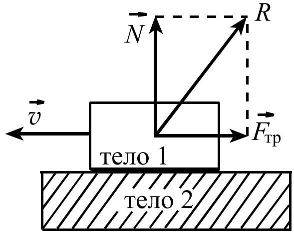

Рис. 6

Во многих задачах приходится рассматривать трение тел друг о друга. При наличии трения силу $\vec{R}$, с которой одно тело действует на другое, удобно рассматривать как векторную сумму двух сил (рис. 6): силы $\vec{N}$, направленной перпендикулярно к поверхности контакта (это – *сила нормального давления* или *сила нормальной реакции опоры)*, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной по касательной к поверхности контакта.

Удобство заключается в том, что при скольжении тел относительно друг друга модули этих составляющих связаны между собой законом Кулона – Амонтона, установленным экспериментально:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \qquad (9)$$

Коэффициент трения скольжения μ зависит от рода соприкасающихся поверхностей. Обычно пренебрегают слабой зависимостью силы трения от площади контакта и от величины относительной скорости v тел.

Для трения покоя закон (9) не применим, т. к. при постоянной силе N модуль силы трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения, обычно несколько превышающего силу трения скольжения для этих поверхностей (так называемое *явление застоя).* Но для простоты максимальное значение силы трения покоя также принимают равным μN .

Если тело может катиться по той или иной поверхности, то из-за деформации материала этой поверхности перед катящимся телом возникает *сила трения качения,* которая обратно пропорциональна радиусу катящегося тела. Обычно сила трения качения гораздо меньше силы трения скольжения, и ею поэтому пренебрегают.

При движении твёрдого тела в жидкости или газе возникает *сила сопротивления,* зависящая от скорости движения тела относительно среды (жидкости, газа). Эта сила может быть прямо пропорциональна как самой указанной скорости, так и квадрату скорости. При этом «сопротивление покоя», аналогичное трению покоя, отсутствует.

При решении задач следует также иметь в виду, что основное уравнение динамики, выражающее 2-й закон Ньютона, является векторным уравнением. Однако часто бывает так, что силы, действующие на то или иное тело, лежат в одной плоскости. Тогда можно выбрать систему отсчёта, оси Ox и Oy которой будут принадлежать плоскости действия сил, и указанное векторное уравнение сведётся к двум скалярным (в проекциях на выбранные оси).

Задача 3. Два груза массами m_1 и m_2 подвешены на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Определите ускорения грузов в процессе их движения. Трением в блоке пренебречь.

Решение. Для описания движения системы здесь будет достаточно одной координатной оси Oy, которую направим вертикально вниз. Пусть груз m_1 движется вниз с ускорением $\vec{a}_1$, а груз m_2 – вверх с ускорением $\vec{a}_2$ (рис. 7). На каждый из грузов действуют сила тяжести и сила натяжения нити, изображённые на рисунке. Запишем уравнение 2-го закона Ньютона в проекциях на ось Oy для каждого груза:

$$m_1a_1 = m_1g - T_1,$$
$$-m_2a_2 = m_2g - T_2.$$

Поскольку нить и блок невесомы (их массы равны нулю), то $T_1 = T_2$. Из нерастяжимости нити следует равенство модулей ускорений грузов: $a_1 = a_2$. Решая полученные уравнения с учётом двух последних равенств, найдём:

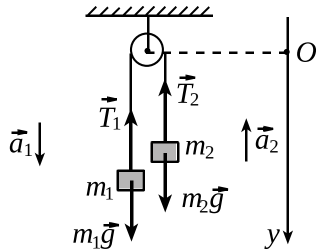

Рис. 7

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

Если $m_1 < m_2$, то направления ускорений грузов будут противоположными тем, которые мы выбрали изначально на рис. 7.

∗ **Задача 4.** Доску с находящимся на ней бруском удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 60^\circ$ (рис. 8 а).

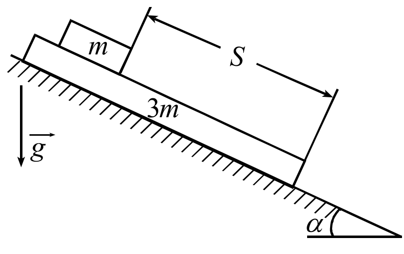

Рис. 8а

Расстояние от бруска до края доски $S = 49$ см. Доску и брусок одновременно отпускают, и доска начинает скользить по наклонной плоскости, а брусок – по доске. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской $\mu_1 = 0,3$, а между доской и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0,4$. Масса доски в три раза больше массы бруска. 1) Определите ускорение бруска относительно наклонной плоскости при скольжении бруска по доске. 2) Через какое время брусок достигнет края доски?

(МФТИ, 2001г.)

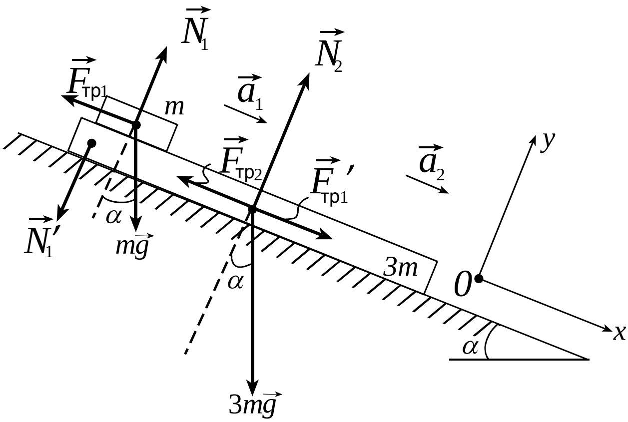

Рис. 8б

Решение. Выберем систему координат и изобразим силы, действующие на брусок и доску, на рис. 8б. Заметим, что сила нормальной реакции $\vec{N}_1$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр1}$ действуют на брусок массой m и обусловлены его взаимодействием с доской массой $3m$. По третьему закону Ньютона такие же по модулю, но противоположно направленные им силы $\vec{N}_1^{'}$ и $\vec{F}_{тр1}^{'}$, действуют со стороны бруска на доску. Точки их приложения к доске на рис. 8б пространственно разнесены по соображениям удобства восприятия чертежа. Смысл остальных сил ясен из их обозначений.

Пусть $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – ускорения бруска и доски соответственно относительно наклонной плоскости. Тогда по второму закону Ньютона в проекциях на оси Ox и Oy можно записать для бруска:

$$\begin{cases} ma_1 = mg\sin\alpha - F_{тр1}, \\ 0 = N_1 - mg\cos\alpha, \end{cases}$$

для доски:

$$\begin{cases} 3ma_2 = 3mg\sin\alpha + F_{тр1}^{'} - F_{тр2}, \\ 0 = N_2 - N_1' - 3mg\cos\alpha. \end{cases}$$

К этим уравнениям необходимо добавить выражения для сил трения:

$$F_{тр1} = F_{тр1}^{'} = \mu_1 N_1, \ F_{тр2} = \mu_2 N_2.$$

Решая совместно записанные уравнения, находим:

$$a_1 = g\left(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha\right) \approx 7\,\text{м/с}^2,$$

$$a_2 = \frac{1}{3}g\left(3\sin\alpha + \left(\mu_1 - 4\mu_2\right)\cos\alpha\right) \approx 6{,}4\,\text{м/с}^2.$$

Видим, что доска движется по наклонной плоскости с ускорением, меньшим, чем брусок. Заметим, что движение доски не влияет на ускорение a_1. Это связано с тем, что и при движущейся, и при закреплённой доске сила трения $F_{\text{тр}1}$ между бруском и доской одна и та же.

Пусть брусок достиг края доски через время t с момента начала движения. За это время брусок и доска пройдут относительно наклонной плоскости пути $S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$ и $S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$ соответственно (это – кинематические соотношения). Их разность $S_1 - S_2$ будет равна пути, пройденному бруском по доске, то есть – начальному расстоянию S от бруска до края доски. Тогда $S = S_1 - S_2 = \frac{a_1 - a_2}{2}\cdot t^2$, откуда

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a_1 - a_2}}.$$

С учётом выражений для a_1 и a_2 получим

$$t = \sqrt{\frac{3S}{2\left(\mu_2 - \mu_1\right)g\cos\alpha}} \approx 1{,}2\text{ с}.$$

Ответ: 1) $a_1 \approx 7\,\text{м/с}^2$; 2) $t \approx 1{,}2$ с.

∗ **Задача 5.** С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью $u = 9{,}8\,\text{м/с}$ под углом $\beta = 30^\circ$ к горизонту. Модуль вертикальной составляющей скорости в точке бросания был на 20% больше, чем в точке падения. Найти время полёта мяча. Считать, что сила сопротивления движению мяча со стороны воздуха прямо пропорциональна его скорости. (МФТИ, 1989 г.)

Решение. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости $\vec{v}$ мяча и равна $-k\vec{v}$, где k – коэффициент пропорциональности. Разобьём время t полёта мяча на сколь угодно малые интервалы времени Δt_i. Для произвольно взятого интервала времени Δt_i обозначим средний вектор скорости мяча на этом интервале через $\vec{v}_i$ (рис. 9) и запишем уравнение второго закона Ньютона для движения мяча:

$$m\vec{g} - k\vec{v}_i = m\frac{\Delta\vec{v}_i}{\Delta t_i},$$

где m – масса мяча, $\Delta\vec{v}_i$ – изменение скорости мяча за время Δt_i. Здесь мы воспользовались определением ускорения $\vec{a}_i = \Delta\vec{v}_i / \Delta t_i$.

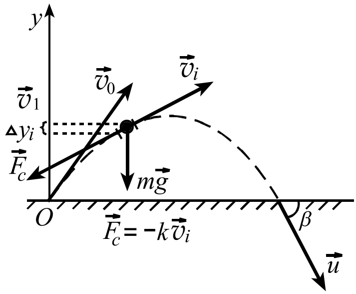

Рис. 9

Спроецируем написанное уравнение на ось Oy, направленную вертикально вверх, и умножим обе части уравнения на Δt_i. Тогда $-mg\cdot\Delta t_i - kv_{iy}\cdot\Delta t_i = m\cdot\Delta v_{iy}$, где v_{iy} и Δv_{iy} – проекции на ось Oy скорости и изменения скорости мяча соответственно. Заметим, что за интервал времени Δt_i изменение вертикальной координаты мяча $\Delta y_i = v_{iy}\cdot\Delta t_i$. С учётом этого получаем: $-mg\cdot\Delta t_i - k\cdot\Delta y_i = m\cdot\Delta v_{iy}$. Аналогичные уравнения будут справедливы для любого интервала Δt_i. Если сложить эти уравнения для всех интервалов времени Δt_i, получим

$$-mg\cdot t - k\cdot\Delta y = m\cdot\Delta v_y. \qquad (*)$$

Здесь Δy и Δv_y – изменение координаты мяча по оси Oy и изменение проекции на ось Oy скорости мяча за всё время полёта t. В нашей задаче $\Delta y = 0$ (камень был брошен с земли и упал на землю, т. е. конечная и начальная координаты мяча одинаковы), а $\Delta v_y = u_y - v_{0y} = -u\sin\beta - 1{,}2u\sin\beta = -2{,}2u\sin\beta$. С учётом этого из уравнения (*) находим

$$t = 2{,}2\frac{u}{g}\sin\beta \approx 1{,}1\text{с.} \ *$$

Задача 6. Санки скользят по ледяной горке, имеющей форму дуги окружности (рис. 10а). В некоторой точке A, определяемой углом α, сила нормального давления санок на горку численно равна силе тяжести санок. Определить ускорение санок в точке A. Трением и размерами санок пренебречь.

Решение. По условию задачи сила $\overrightarrow{N'}$, с которой санки давят на горку в точке A, численно равна силе тяжести, действующей на санки. По третьему закону Ньютона горка действует на санки с такой же по величине силой. В нашем случае это – сила нормальной реакции опоры

$\vec{N}$ (рис. 10б). Итак, $N = N' = mg.$

Полное ускорение $\vec{a}$ санок в точке A складывается из тангенциальной $\vec{a}_\tau$ и нормальной $\vec{a}_n$ составляющих. С учётом этого запишем уравнение второго закона Ньютона для движения санок в проекциях на взаимно перпендикулярные направления $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$:

$$ma_\tau = mg\sin\alpha; \quad ma_n = N - mg\cos\alpha.$$

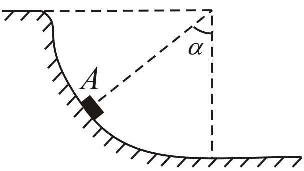

Рис. 10а

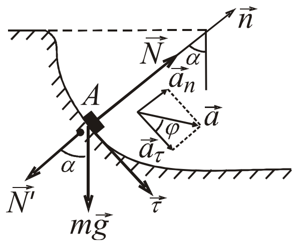

Рис. 10б

Отсюда находим $a_\tau = g\sin\alpha, a_n = g(1-\cos\alpha)$. Здесь мы учли, что $N = mg$. Тогда модуль ускорения санок равен

$$a = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^2} = g\sqrt{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2} = g\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 2g\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Направление вектора $\vec{a}$ определим с помощью угла φ, который вектор $\vec{a}$ составляет с направлением $\vec{\tau}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

§3. Статика

В *статике* изучается равновесие тел. Наряду с моделью материальной точки, здесь в большинстве случаев используется *модель абсолютно твёрдого тела*, т. е. тела, форма и размеры которого считаются неизменными.

Будем считать, что *тело находится в равновесии в некоторой системе отсчёта, если в этой системе отсчёта оно покоится.*

Условием равновесия материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчёта является равенство нулю суммы всех сил, действующих на материальную точку:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \qquad (11)$$

Условием равновесия абсолютно твёрдого тела в некоторой инерциальной системе отсчёта является равенство нулю суммы всех внешних сил $\vec{F}_i$, действующих на тело, и равенство нулю суммы моментов M_i всех внешних сил относительно любой оси в пространстве:

$$\sum_i \vec{F} = 0; \qquad \sum_i M_i = 0. \qquad (12)$$

Приведённые выше векторные уравнения можно записывать в проекциях на любую координатную ось. При этом каждое из полученных равенств будет означать, что при равновесии тела сумма проекций на соответствующую координатную ось всех сил, входящих в векторное уравнение, равна нулю.

В случае, когда вектор силы, действующей на твёрдое тело, лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, *момент этой силы равен произведению модуля силы на её плечо,* т. е. расстояние от линии действия силы до оси вращения. Если же вектор силы не перпендикулярен оси вращения, то *момент такой силы равен моменту той её составляющей, которая перпендикулярна оси вращения.*

Выбор оси вращения для написания уравнения моментов в системе (12) осуществляется произвольно, исходя из соображений удобства решения конкретной задачи. Уравнение моментов будет тем проще, чем больше сил будут иметь равные нулю моменты. При составлении уравнения моментов нужно помнить *правило знаков:* *моментам, вызывающим вращение тела по часовой стрелке относительно выбранной оси, приписывают знак «+», а моментам, вызывающим вращение против часовой стрелки, – знак «–».*

Следует, однако, иметь в виду, что сформулированные условия равновесия являются необходимыми, но не достаточными условиями. Действительно, при выполнении этих условий и материальная точка, и твёрдое тело могут не только покоиться (находиться в равновесии). Так, материальная точка при выполнении условия равновесия может двигаться равномерно и прямолинейно. Аналогично, центр масс твёрдого тела может двигаться равномерно и прямолинейно, а само тело может вращаться вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью. Но если известно, что материальная точка или твёрдое тело находятся в равновесии, то отсюда обязательно (необходимо) следует выполнение соответствующих условий равновесия!

В механике важное значение имеют понятия *центра масс* тела и *центра тяжести* тела (подразумевается модель абсолютно твёрдого тела). Если тело массой M мысленно разбить на множество сколь угодно малых частей с массами $m_1, m_2, m_3, \ldots$, каждую из которых можно считать материальной точкой, то пространственное положение *i*-й материальной точки с массой m_i можно определить радиус-вектором $\vec{r}_i$ (рис. 11). При этом очевидно, что

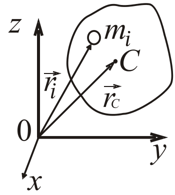

Рис. 11

$$\sum_i m_i = M.$$

Центром масс тела (или системы тел) называется точка C (рис. 11), *радиус-вектор $\vec{r}_C$ которой определяется по формуле*

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Можно показать, что 1) положение центра масс относительно тела не зависит от выбора начала координат *O*, 2) центр масс однородного центральносимметричного тела совпадает с его центром симметрии, 3) центр масс однородного осесимметричного тела лежит на оси симметрии тела.

Кроме того, в ряде случаев при решении задач можно мысленно сосредоточить в центре масс всю массу тела и, считая тело материальной точкой, применять законы механики для материальной точки.

Центром тяжести тела, находящегося в поле тяготения, называют точку приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на все части тела. Эта сила называется *силой тяжести,* действующей на тело.

В однородном поле тяжести (например, вблизи поверхности Земли) центр тяжести тела совпадает с его центром масс. Заметим, что *центр масс существует независимо от поля тяжести, в то время как о центре тяжести имеет смысл говорить только при наличии такого поля.*

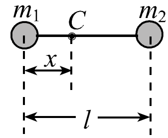

Рис. 12

Например, центр масс и центр тяжести гантели, представляющей собой два шарика с массами m_1 и m_2, соединённые жёстким невесомым стержнем длины l (рис. 12), совпадают и располагаются в точке C, отстоящей от шарика m_1 на расстояние $x=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}l$ (покажите это самостоятельно). В отсутствие поля тяжести центр масс гантели остаётся в точке C, тогда как понятие центра тяжести теряет смысл.

Задача 7. Какую горизонтальную силу нужно приложить к бруску массой m, находящемуся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α, чтобы он не двигался?

Решение. На брусок (рис. 13) действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны наклонной плоскости и сила $\vec{F}$, которую надо найти. (Сила трения отсутствует, поскольку поверхность

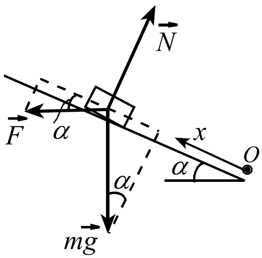

Рис. 13

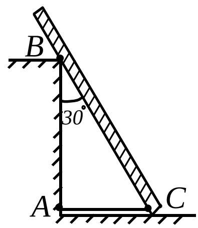

Рис. 14

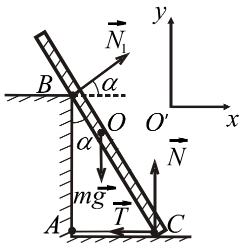

Рис. 15

наклонной плоскости гладкая.) Так как брусок находится в покое, запишем условие (11) равновесия бруска, считая его материальной точкой: $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}=0$. В проекциях на ось Ox, направленную вдоль наклонной плоскости (рис. 13), это уравнение даёт: $F\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$. Откуда $F=mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Задача 8. Однородная балка (рис. 14) массой $m\left(mg=1200\text{Н}\right)$ и длиной 2м опирается о гладкий пол и гладкий выступ B на высоте $1{,}5\text{м}$ над полом. Балка составляет с вертикалью угол $\alpha=30^\circ$ и удерживается верёвкой AC, натянутой у пола. Найдите силу натяжения верёвки и силы реакций пола и выступа.

Решение. На балку действуют (рис. 15) сила тяжести $m\vec{g}$ (приложенная к центру тяжести балки – точке O), сила натяжения нити $\vec{T}$ (приложенная к балке в точке C), сила $\vec{N}$ нормальной реакции со стороны пола (приложенная в точке C и направленная перпендикулярно полу, т. к. поверхность гладкая и трения нет) и сила $\vec{N}_1$ нормальной реакции со стороны выступа (приложенная в точке B и направленная перпендикулярно балке по той же причине отсутствия трения). Запишем условия (12) равновесия для балки, предварительно спроецировав указанные силы на оси $O'x$ и $O'y$ и выбрав для вычисления моментов этих сил ось, проходящую через точку C перпендикулярно плоскости рисунка 15:

$$O'x:\ N_1\cos\alpha - T = 0,\qquad O'y:\ N_1\sin\alpha + N - mg = 0,$$

$$\textit{Ось } C:\quad N_1\cdot|BC| - mg\cdot|OC|\cdot\sin\alpha = 0.$$

Моменты сил $\vec{T}$ и $\vec{N}$ относительно оси C оказались нулевыми, поскольку линии действия этих сил проходят через точку C и, следовательно, их плечи равны нулю. В этих уравнениях $|BC| = |AB|/\cos\alpha = \sqrt{3}$ м, и так как центр тяжести однородных симметричных тел расположен в их геометрическом центре или на оси симметрии (в нашем случае – посередине балки, в точке O), то $|OC| = 1$ м.

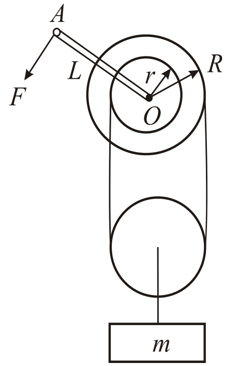

Рис. 16

Решив полученную систему из трёх уравнений, найдём

$$N_1 = mg\cdot\frac{|OC|}{|BC|}\cdot\sin\alpha = 200\sqrt{3}\ \text{Н},\ T = N_1\cos\alpha = 300\ \text{Н},$$

$$N = mg\cdot\left(1 - \frac{|OC|}{|BC|}\sin^2\alpha\right) \approx 1027\ \text{Н}.$$

*** Задача 9.** Дифференциальный ворот представляет собой два скреплённых соосных цилиндра радиусами $R = 10$ см и $r = 8$ см, на которые намотан трос (рис. 16). Трос перекинут через подвижный блок, и его концы закреплены на цилиндрах. При вращении рукоятки OA длиной $L = 20$ см вокруг неподвижной горизонтальной оси цилиндров O трос наматывается на большой цилиндр и сматывается с меньшего, а груз, подвешенный к подвижному блоку, поднимается. Массами цилиндров, рукоятки, троса, подвижного блока и трением в осях пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Найдите минимальную силу F, которую необходимо приложить к рукоятке ворота, чтобы поднимать груз массой $m = 140$ кг. (МФТИ, 2008г.)

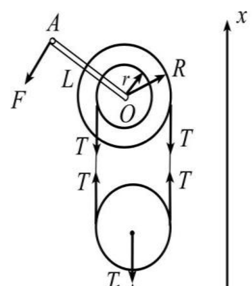

Рис. 17

Решение. Изобразим на рис. 17 силы, действующие на цилиндры и груз, где через T обозначена сила натяжения троса, связывающего подвижный блок с дифференциальным воротом, через T_1 – сила натяжения троса, на котором к подвижному блоку подвешен груз, а через mg – сила тяжести груза.

Поскольку массой подвижного блока можно пренебречь, то в проекциях на ось O_1x можно записать

$$2T - T_1 = 0.$$

Для груза, находящегося в равновесии, в проекциях на ту же ось имеем:

$$T_1 - mg = 0.$$

Для моментов сил, действующих на дифференциальный ворот, относительно оси ворота, проходящей через точку O, справедливо уравнение:

$$TR - Tr - FL = 0.$$

Решая совместно три написанных уравнения, найдём

$$F = \frac{R-r}{2L} mg = 70 \text{ Н.} \ast$$

§4. Импульс. Работа. Энергия

Решение механических задач часто облегчается применением законов изменения и сохранения импульса и энергии тела. Особенно эффективным является использование этих законов в тех случаях, когда действующие силы переменны во времени и непосредственное решение уравнений динамики с помощью методов элементарной математики затруднительно.

Напомним, что *импульсом тела* называется векторная величина $\vec{p}$, равная произведению массы m тела на его скорость $\vec{v}$: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Импульсом системы тел $\vec{P}$ называют векторную сумму импульсов всех тел, составляющих эту систему. Например, если система состоит из трёх тел с импульсами $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ и $\vec{p}_3$, то импульс такой системы тел равен $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$.

В общем случае импульс тела в процессе движения может изменяться как по величине, так и по направлению. При этом справедлив *закон изменения импульса тела:* *приращение импульса тела равно произведению равнодействующей силы* $\vec{F}$ *на промежуток времени* Δt, *в течение которого она действует на тело:* $\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$. Произведение $\vec{F} \cdot \Delta t$ называют *импульсом силы.* Аналогичное соотношение справедливо и для системы тел, только в этом случае под $\vec{F}$ надо понимать равнодействующую только внешних сил: *приращение* $\Delta\vec{P}$ *импульса системы тел равно импульсу равнодействующей* $\vec{F}$ *внешних сил, действующих на систему:* $\Delta\vec{P} = \vec{F} \cdot \Delta t$. Внутренние силы взаимодействия между телами, входящими в систему, не могут изменить импульс системы.

Из сказанного следует *закон сохранения импульса* системы тел (или отдельно взятого тела). *Импульс системы тел (тела) сохраняется (т. е. $\Delta\vec{P}=0$) при любых взаимодействиях тел системы, если импульс равнодействующей $\vec{F}$ внешних сил $\vec{F}\cdot\Delta t$ равен нулю.* Это возможно в каком-либо из трёх случаев:

1) если внешние силы на систему (тело) не действуют вообще (система изолированная);

2) если равнодействующая $\vec{F}$ внешних сил, действующих на систему (тело), равна нулю;

3) если промежуток времени Δt, в течение которого на систему (тело) действуют внешние силы, мал $(\Delta t\to 0)$, а равнодействующая $\vec{F}$ ограничена по модулю (не бесконечно большая).

Встречаются ситуации, когда импульс системы тел (тела) в целом не сохраняется, но *сохраняется проекция* P_x импульса на некоторое направление $Ox\left(\Delta P_x=0\right)$. Это возможно в трёх случаях:

1) если внешние силы, действующие на систему (тело), направлены перпендикулярно оси Ox;

2) если проекция F_x на ось Ox равнодействующей $\vec{F}$ внешних сил равна нулю;

3) если промежуток времени Δt мал, а проекция F_x ограничена по модулю $\left(\left|F_x\right|\neq\infty\right)$.

Часто при решении задач для определения импульса системы тел бывает удобно воспользоваться понятием *центра масс* рассматриваемой системы. Можно показать, что *импульс $\vec{P}$ системы тел равен произведению массы M системы (т. е. суммы масс тел, входящих в систему) и скорости $\vec{v}_c$ движения её центра масс (точки C): $\vec{P}=M\vec{v}_c$.* В связи с этим справедлива *теорема о движении центра масс: центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием силы, равной векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.* Использование сформулированной теоремы позволяет порой существенно упростить процесс решения задачи.

Изменение импульса тела (системы) характеризует действие силы в течение конкретного промежутка времени. Для характеристики действия силы на определённом перемещении служит физическая величина, называемая *механической работой.*

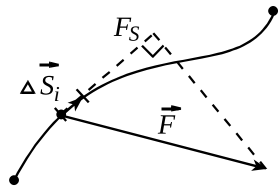

Рис. 18

Пусть материальная точка движется по некоторой не обязательно прямолинейной траектории (рис. 18). Пусть также на материальную точку действует сила $\vec{F}$, которая в общем случае в процессе движения может меняться как по модулю, так и по направлению. Разобьём траекторию на множество сколь угодно малых участков, каждый из которых можно считать прямолинейным, а силу $\vec{F}$ на каждом таком участке можно считать постоянной. Рассмотрим малое перемещение $\Delta\vec{S}_i$, $i=1,2,...$

Работой ΔA_i *силы* $\vec{F}$ *на малом перемещении* $\Delta\vec{S}_i$ *называют величину, равную скалярному произведению векторов* $\vec{F}$ *и* $\Delta\vec{S}_i$: $\Delta A_i=\vec{F}\cdot\Delta\vec{S}_i$.

По определению скалярного произведения можно записать:

$$\Delta A_i=F\cdot\Delta S_i\cdot\cos\alpha_i=F_{S,i}\cdot\Delta S_i=F\cdot\Delta S_{i,F},$$

где α_i – угол между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{S}_i$, $F_{S,i}$ – проекция $\vec{F}$ на направление $\Delta\vec{S}_i$, $\Delta S_{i,F}$ – проекция $\Delta\vec{S}_i$ на направление $\vec{F}$.

Работа A силы $\vec{F}$ на всём участке траектории равна алгебраической сумме работ ΔA_i, совершаемых силой $\vec{F}$ на каждом из малых участков, на которые разбита траектория: $A=\sum\limits_i \Delta A_i$. Когда на материальную точку действуют n сил, их общая работа A равна алгебраической сумме работ каждой из сил в отдельности: $A=\sum\limits_{j=1}^{n} A_i$, $j=1,2,...,n$.

Если мы имеем дело не с материальной точкой, а с твёрдым телом или системой тел, то данное выше определение работы остаётся справедливым, но в этом случае надо только иметь в виду, что под $\Delta\vec{S}$ следует понимать *перемещение точки приложения силы* $\vec{F}$. Игнорирование этого обстоятельства зачастую приводит к ошибочным результатам.

Часто говорят о работе, которую совершает или может совершить над телом какое-либо другое тело. Здесь, во избежание недоразумений, надо чётко понимать, что по определению работу над телом совершает *сила, действующая на него со стороны рассматриваемого другого тела*.

Способность конкретного тела совершать работу характеризуют с помощью *энергии*. Кинетической энергией K движущейся материальной точки называют половину произведения массы m точки на квадрат её скорости $v,$ т. е. $K = mv^2/2.$

Для определения кинетической энергии конкретного твёрдого тела его следует мысленно разбить на множество материальных точек. *Кинетическая энергия K тела будет равна алгебраической сумме кинетических энергий K_i* этих материальных точек: $K = \sum_i K_i = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}.$

В случае, когда тело массой m движется поступательно (не вращаясь), скорости v_i составляющих его материальных точек в каждый конкретный момент времени одинаковы и равны скорости v поступательного движения тела. Тогда кинетическая энергия K такого тела в соответствии со сказанным выше в каждый момент времени равна

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum_i m_i.$$

Очевидно, что $\sum_i m_i = m,$ где $m -$ масса тела. Следовательно, *кинетическая энергия K тела массой $m,$ движущегося поступательно со скоростью v, равна $K = \frac{mv^2}{2}$*. Если движение тела не поступательное (присутствует вращение), то для нахождения его кинетической энергии эта формула непосредственно не применима!

Так, например, в случае, когда однородный обруч массой m катится без проскальзывания со скоростью v по горизонтальной поверхности, его кинетическая энергия равна $K = mv^2.$

Кинетическая энергия тела есть мера его движения. *Приращение кинетической энергии ΔK рассматриваемого тела равно суммарной работе A всех сил, действующих на тело:*

$$\Delta K = A. \tag{13}$$

Здесь $\Delta K -$ разность между конечным K_2 и начальным K_1 значениями кинетической энергии $\Delta K = K_2 - K_1.$ Утверждение (13) называется *<u>теоремой об изменении кинетической энергии.</u>*

Силы, действующие на тело, могут различаться по своей природе и свойствам. В механике сложилось, в частности, разделение сил на консервативные и неконсервативные. *Консервативными* (или *потенциальными*) называются силы, работа которых не зависит от траектории движения тела, а определяется только начальным и конечным его положением. Такими силами являются, например, сила тяжести и сила упругости. В общем случае работа любых консервативных сил может быть представлена как убыль некоторой величины Π, которую называют *потенциальной энергией* тела:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2. \qquad (14)$$

(Убыль величины отличается от приращения знаком: $\Pi_1 - \Pi_2 = -\Delta\Pi.$)

Например, потенциальная энергия тела массы m, находящегося на высоте h над поверхностью земли, равна $\Pi = mgh$, если за «нулевой уровень» условно принята поверхность земли. Потенциальная энергия тела, находящегося под действием упругой силы деформированной пружины, равна $\Pi = kx^2/2$, где $x -$ величина деформации (сжатия или растяжения) пружины, $k -$ коэффициент жёсткости пружины.

Неконсервативными называются силы, работа которых зависит от формы траектории и пройденного пути. Для таких сил равенство (14) несправедливо (понятие потенциальной энергии не применяется). Неконсервативными являются, например, сила трения скольжения, силы сопротивления воздуха или жидкости (зависящие от скорости).

Физическую величину, равную сумме кинетической и потенциальной энергий тела, называют его *механической энергией* $E = K + \Pi$. Можно показать, что приращение механической энергии равно суммарной работе A неконсервативных сил, действующих на тело в процессе движения. Следовательно, *если неконсервативные силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы над телом в течение интересующего нас времени, то механическая энергия тела остаётся постоянной за это время:* $E = \mathrm{const}$. Это утверждение известно как *закон сохранения механической энергии.*

Взаимодействия тел, изучаемые в механике, отличаются большим разнообразием. Частным случаем таких взаимодействий являются *столкновения* тел. Среди них выделяют так называемые упругие и неупругие столкновения. Следует отметить, что в учебной литературе наблюдается некоторая неопределённость терминологии на этот счёт. Здесь мы будем называть столкновения, при которых сохраняется суммарная механическая энергия тел, *абсолютно упругими* (или просто *упругими*). Так, например, в большинстве случаев можно считать абсолютно упругим центральное столкновение двух стальных шаров.

Столкновения, при которых изменяется суммарная механическая энергия взаимодействующих тел, будем называть *неупругими.* Изменение суммарной механической энергии при таких столкновениях характеризуется её убылью и сопровождается, например, выделением тепла. Причём количество выделившейся теплоты в точности равно убыли механической энергии системы. Если тела после столкновения движутся как единое целое (с одинаковыми по величине и направлению скоростями), то такое столкновение будем называть *абсолютно неупругим.*

Задача 10. С наклонной плоскости одновременно без начальных скоростей начинают соскальзывать брусок и скатываться без проскальзывания обруч. При каком коэффициенте трения скольжения между бруском и наклонной плоскостью оба тела будут двигаться, не обгоняя друг друга? Угол наклона плоскости к горизонту равен α.

Решение. Из динамики известно, что ускорение a_1 бруска, скользящего по наклонной плоскости вниз, равно $a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Пусть обруч скатывается с наклонной плоскости в течение времени t. За это время его центр масс пройдёт путь l, равный длине наклонной плоскости. Пусть скорость центра масс обруча в конце этого пути равна v. Из кинематики известно, что $l = \frac{a_2 t^2}{2}$, $v = a_2 t$ (где a_2 – ускорение центра масс обруча).

Приращение кинетической энергии обруча за время t равно $\Delta K = K_2 - K_1$. Поскольку $K_1 = 0$ (по условию), а $K_2 = Mv^2$, где M – масса обруча, то $\Delta K = Mv^2$. С другой стороны, по теореме об изменении кинетической энергии эта величина равна работе всех сил, действующих на обруч в течение времени t. С учётом этого имеем:

$$Mv^2 = Mgl\sin\alpha,$$

где $Mgl\sin\alpha$ – работа силы тяжести (покажите это самостоятельно). Сила нормальной реакции опоры работы не совершает, так как направлена перпендикулярно перемещению центра масс обруча. Работа силы трения также равна нулю, так как обруч катится без проскальзывания и, следовательно, в каждый момент времени скорость точки касания обруча с наклонной плоскостью (точки приложения силы трения) равна нулю. Учитывая кинематические уравнения, найдём $a_2 = \frac{g}{2}\sin\alpha$. Тела не будут обгонять друг друга, если $a_1 = a_2$. Отсюда $\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$.

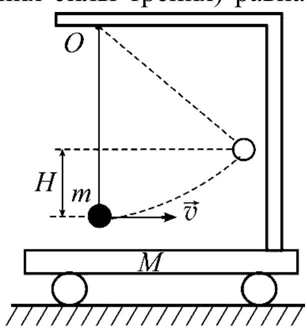

Рис. 19

Задача 11. На подвижной тележке массой M, находящейся на горизонтальной плоскости, с помощью лёгкого стержня, который может свободно вращаться вокруг точки O (рис. 19), подвешен маленький шарик массой m. Вначале система покоилась. Шарику кратковременным ударом сообщают горизонтальную скорость v. На какую наибольшую высоту H по сравнению с первоначальным уровнем поднимется шарик? Считать, что угол отклонения стержня от вертикали не превышает 90°. Трением и массой колёс тележки пренебречь. (Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ, 2005 г.)

Решение. В горизонтальном направлении на систему «шарик–тележка» никакие силы не действуют (трения нет). Сила упругости стержня, на котором подвешен шарик, является внутренней силой, и импульса системы изменить не может. Таким образом, проекция импульса системы «шарик – тележка» на горизонтальное направление сохраняется. В начальный момент она была равна mv, а в момент достижения шариком максимальной высоты H шарик и тележка движутся с одинаковой скоростью v_1 в горизонтальном направлении (на рис. 19 – вправо). С учётом сохранения проекции импульса на направление движения тележки имеем:

$$mv = \left(m + M\right)v_1.$$

Считая потенциальную энергию шарика в поле силы тяжести в начальный момент равной нулю, можно записать по закону сохранения механической энергии: $\dfrac{mv^2}{2} = mgH + \dfrac{\left(m+M\right)v_1^2}{2}.$

Из двух написанных уравнений получаем ответ: $H = \dfrac{Mv^2}{2\left(M+m\right)g}.$

Задача 12. Тело движется со скоростью $v_1 = 6\text{м/с}$ и догоняет такое же тело, движущееся со скоростью $v_2 = 3\text{м/с}$ (вдоль той же прямой). Определите скорости тел после центрального абсолютно упругого удара. (МИЭМ, 2006 г.)

Решение. Удар называется центральным, если скорости тел до удара направлены вдоль линии, соединяющей центры масс тел (рис. 20 а). Заданные скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ направлены вдоль одной прямой. Направим ось Ox параллельно этой прямой в сторону движения тел. Пусть скорости тел после удара равны $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Эти скорости в данном случае могут быть только параллельными оси Ox. Предположительно направим их так, как показано на рис. 20 б.

Систему тел будем считать замкнутой (в условии иного не оговорено). По закону сохранения импульса суммарный импульс тел до удара равен суммарному импульсу тел после удара. В проекциях на ось Ox можно, следовательно, записать:

$$mv_1 + mv_2 = mu_{1x} + mu_{2x}, \tag{15}$$

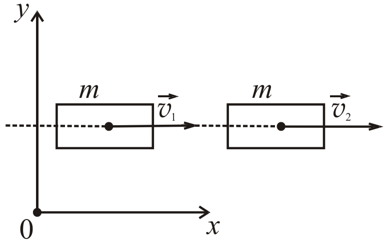

Рис. 20а

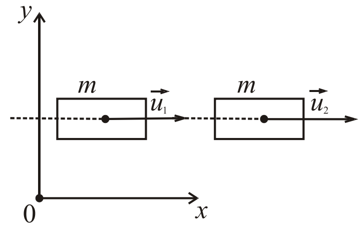

Рис. 20б

где u_{1x} и u_{2x} – проекции на ось Ox векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ соответственно. (Если направления векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ выбраны правильно, то $u_{1x} = u_1$, а $u_{2x} = u_2$.) По условию удар абсолютно упругий, следовательно, суммарная механическая энергия тел сохраняется. Тогда

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}. \tag{16}$$

При этом, в связи с выше сказанным, независимо от знака проекций u_{1x} и u_{2x}:

$$u_1^2 = u_{1x}^2 \quad \text{и} \quad u_2^2 = u_{2x}^2. \tag{17}$$

Перегруппируем слагаемые в (15) и сократим на m. Тогда получим:

$$v_1 - u_{1x} = u_{2x} - v_2. \tag{18}$$

Аналогично уравнение (16) преобразуем к виду:

$$v_1^2 - u_1^2 = u_2^2 - v_2^2.$$

Или с учётом (17)

$$v_1^2 - u_{1x}^2 = u_{2x}^2 - v_2^2.$$

Воспользовавшись алгебраической формулой для разности квадратов, можно записать:

$$(v_1 - u_{1x})(v_1 + u_{1x}) = (u_{2x} - v_2)(u_{2x} + v_2).$$

Поскольку $v_1 - u_{1x} = u_{2x} - v_2$ (см. выше) и, очевидно, $v_1 - u_{1x} \neq 0$ и $u_{2x} - v_2 \neq 0$, то сократив на эти выражения, получим:

$$v_1 + u_{1x} = u_{2x} + v_2. \tag{19}$$

Вычитая (18) из (19), найдём $u_{1x} = v_2$. Складывая (18) и (19), получим $u_{2x} = v_1$. Видим, что u_{1x} и u_{2x} получились положительными. Значит направления скоростей $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ указаны на рис. 20 б верно. В рассматриваемом случае тела в результате удара «обмениваются» скоростями:

$$u_1 = v_2 = 3\text{м/с},\ u_2 = v_1 = 6\text{м/с}.$$

∗ **Задача 13.** Лёгкий пластилиновый шарик массы m летит со скоростью $\vec{v}$ и сталкивается с массивной плитой, движущейся навстречу шарику со скоростью $\vec{u}$ (рис. 21). Какое количество теплоты выделится при абсолютно неупругом столкновении шарика с плитой? Массу M плиты считать много большей массы шарика $(M >> m)$.

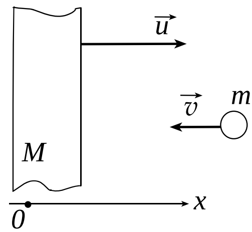

Рис. 21

Решение. Направим ось Ox в сторону движения плиты, как показано на рис. 21. Пусть $\vec{u}_1-$ совместная скорость плиты с шариком после столкновения (на рис. 21 не показана). Считая, что после столкновения плита с шариком движутся в том же направлении, что и плита до столкновения, по закону сохранения импульса (система тел замкнута) можно записать в проекциях на ось Ox уравнение:

$$Mu - mv = (M+m)u_1.$$

Отсюда скорость u_1 равна: $u_1 = \dfrac{Mu - mv}{M+m} = \dfrac{M}{M+m}u - \dfrac{m}{M+m}v.$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$u_1 = \frac{M}{M\left(1+\frac{m}{M}\right)}u - \frac{m}{M\left(1+\frac{m}{M}\right)}v = \frac{1}{1+\frac{m}{M}}u - \frac{\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}v.$$

Считая отношение $\dfrac{m}{M}$ близким к нулю (по условию $M >> m$) и пренебрегая им по сравнению с единицей $\left(\dfrac{m}{M} << 1\right)$ в знаменателе уменьшаемого, а вычитаемое по той же причине отбрасывая вовсе, получим $u_1 = u$, то есть после столкновения шарик с плитой движутся с той же скоростью, что и плита до столкновения. Иными словами, скорость плиты не изменилась. Перейдём в систему отсчёта, связанную с плитой. В свете сказанного эту систему отсчёта можно считать инерциальной. В ней плита покоится, а шарик до удара движется навстречу плите со скоростью $v+u$. Следовательно, перед столкновением

$K=\dfrac{m(u+v)^2}{2}$. После столкновения в выбранной системе отсчёта плита и шарик покоятся, их суммарная механическая энергия равна нулю. Убыль суммарной механической энергии тел равна искомому количеству теплоты

$$Q=\frac{m(v+u)^2}{2}.\ *$$

Задача 14. Шар массой $m_1=2$ кг, движущийся со скоростью $v_1=2\,\text{м/с}$, сталкивается с шаром массой $m_2=1$ кг, движущимся со скоростью $v_2=3\,\text{м/с}$. В результате столкновения шары слипаются. Определите количество выделившейся при столкновении теплоты и совместную скорость шаров после столкновения. В момент столкновения скорости шаров взаимно перпендикулярны.

Решение. Из условия задачи следует, что столкновение абсолютно неупругое, и после него шары будут двигаться как одно целое (рис. 22). Считая систему тел замкнутой, по закону сохранения импульса имеем:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{u},$$

где $\vec{u}-$ совместная скорость слипшихся шаров после столкновения. Написанное уравнение проиллюстрировано на рис. 22. Возведём обе части этого уравнения в квадрат:

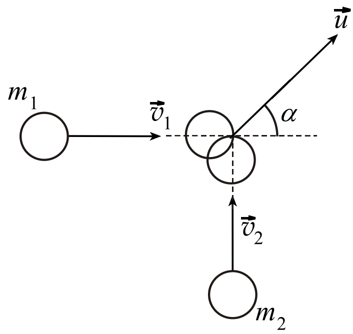

Рис. 22

$$m_1^2\vec{v}_1^{\,2}+2m_1m_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+m_2^2\vec{v}_2^{\,2}=(m_1+m_2)^2\,\vec{u}^{\,2}.$$

Поскольку по условию скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$. Учитывая также, что $\vec{v}_1^{\,2}=v_1^2, \vec{v}_2^{\,2}=v_2^2,\ \vec{u}^{\,2}=u^2,$ получим $m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2=(m_1+m_2)^2u^2.$

Откуда модуль искомой скорости u равен

$$u=\frac{\sqrt{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2}}{m_1+m_2}=\frac{5}{3}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\approx 1{,}7\,\text{м/с}.$$

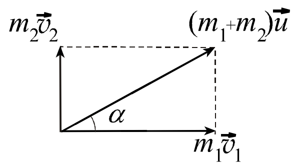

Рис. 23

Направление скорости $\vec{u}$ составляет угол α с направлением скорости $\vec{v}_1$ (рис. 23), причём

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{3}{4} \text{ (см. рис. 23).}$$

Искомое количество теплоты, выделившейся при столкновении, будет равно убыли суммарной механической энергии шаров:

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Контрольные вопросы

1. Материальная точка движется по окружности радиусом $2\,\text{м}$. Найдите путь и перемещение точки за время, в течение которого радиус-вектор точки повернулся на 90° относительно своего первоначального положения. Начало радиус-вектора совпадает с центром окружности.

2. Мяч был брошен дважды с поверхности земли вертикально вверх. Во второй раз ему сообщили скорость, в 4 раза большую, чем в первый раз. Во сколько раз выше поднимется мяч при втором бросании? Мяч в полёте не вращается. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3*. Точки A и B движутся вдоль одной координатной оси Ox. При этом координата точки A изменяется по закону $x_A = 4 - t^2$. В то же время относительно точки B координата точки A описывается уравнением $x_{\text{отн}} = 2t^2 - 4t - 2$. Найдите по этим данным ускорения точек a_A и a_B и их скорости v_A и v_B в момент времени $t = 1\text{с}$ с момента начала движения.

4*. Точка движется в плоскости XY вдоль оси x с постоянной скоростью $v_x = 0{,}5\text{м/с}$, а вдоль оси Y так, что уравнение траектории имеет вид $y(x) = 4x^2 + 16x^3$. Найти зависимость скорости движения точки вдоль оси Y от времени, полагая, что при $t = 0$ точка находилась в начале координат.

5. Проволока выдерживает груз максимальной массы $m_{\max} = 500\text{кг}$ в состоянии покоя. С каким максимальным ускорением можно поднимать груз массы $m = 400\text{кг}$, подвешенный на этой проволоке, чтобы она не оборвалась?

6. Брусок массой $m = 10\text{кг}$ положили на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения скольжения между бруском и наклонной плоскостью равен $\mu = 0{,}1$. Чему равна сила трения, действующая на брусок?

7. В условиях предыдущего контрольного вопроса определите, чему равна равнодействующая всех сил, действующих на брусок.

8. В условиях контрольного вопроса №6 определите, с каким ускорением будет скользить брусок по наклонной плоскости.

9. С балкона, находящегося на высоте $h = 10\text{м}$ над землёй, бросили вверх мячик массой $0{,}5\text{кг}$ под некоторым углом к горизонту со скоростью $v_0 = 10\text{м/с}$. Мячик в полёте не вращается. Приняв за уровень отсчета потенциальной энергии поверхность земли, определите, чему равна механическая энергия мячика в момент бросания. Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. В условиях предыдущего контрольного вопроса определите механическую энергию мячика в момент его падения на землю.

11. В условиях контрольного вопроса №9 определите скорость мячика в момент его падения на землю.

12. По горизонтальным рельсам со скоростью $v = 20\text{км/ч}$ движется по инерции платформа массы $M = 200\text{кг}$. На нее вертикально падает камень массы $m = 50\text{кг}$ и остаётся на платформе. Через некоторое время в платформе точно под камнем открывается люк, камень проваливается вниз на землю. С какой скоростью u движется после этого платформа? Трением пренебречь.

Задачи

1*. По горизонтальной поверхности стола протягивают с постоянной скоростью v тонкую ленту шириной d. На ленту въезжает скользящая по столу монета, имея скорость $\frac{4}{3}v$, направленную перпендикулярно краю ленты (рис. 24). Монета скользит по ленте и покидает её со скоростью v относительно стола под неравным нулю углом к краю ленты. 1) Найдите модуль скорости монеты относительно ленты в начале движения по ленте. 2) Найдите коэффициент трения скольжения между монетой и лентой. (МФТИ, 2004г.)

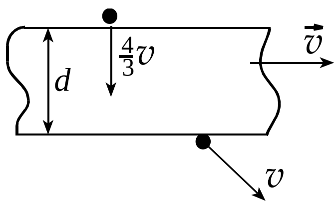

Рис. 24

2. Тонкий однородный жёсткий стержень AB подвешен у гладкой стенки с помощью легкой нерастяжимой нити BC, как показано на рисунке 25. Конец A стержня не закреплён и опирается о стенку. Определите угол α, который составляет нить с вертикалью, если угол $\beta = 45^\circ$. (МГУ, хим. фак. 2003г.)

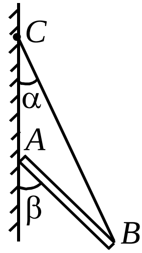

Рис. 25

3. К одному концу лёгкой нерастяжимой веревки, перекинутой через блок, подвешен груз массой $m = 10\,\text{кг}$ (рис. 26). С какой силой F нужно тянуть вертикально вниз за другой конец верёвки, чтобы груз поднимался вверх с ускорением $a = 1\,\text{м/с}^2$?

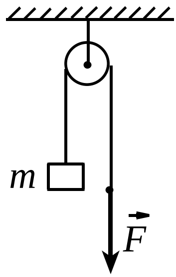

Рис. 26

4*. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится клин с углом α при основании (рис. 27). Брусок массой m, положенный на клин, опускается с некоторым постоянным ускорением относительно стола, направленным под углом β к горизонту $(\beta > \alpha)$. Определите массу M клина. Трением между бруском и клином пренебречь. (Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ).

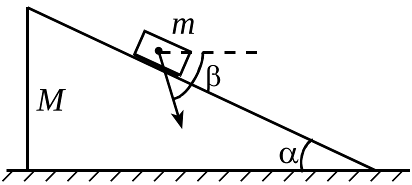

Рис. 27

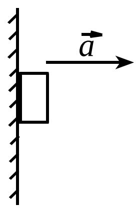

Рис. 28

5. Вертикальная стенка движется горизонтально с ускорением a, толкая перед собой прямоугольный брусок (рис. 28). Определите величину минимально возможного коэффициента трения между бруском и стеной, при котором брусок не падает. (Новосибирский государственный университет).

6. На лёгкой нити длиной L висит шар. Пуля летит горизонтально со скоростью v_0, пробивает шар и продолжает лететь в прежнем

направлении. В результате максимальный угол отклонения шара на нити оказался $\alpha = 60^\circ$. Масса шара в 10 раз больше массы пули.
1) Найти скорость шара сразу после вылета из него пули.
2) Найти скорость вылетевшей из шара пули (МФТИ, 1997г.).

7. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя вершинами, высоты которых H и $3H$. На левой вершине горки (высотой $3H$) находится шайба массой m (рис. 29). Масса горки $5m$, её поверхность гладкая. От незначительного толчка вправо шайба приходит в движение. Найти скорость шайбы на правой вершине горки (высотой H), если: 1) горка закреплена на столе; 2) горка не закреплена. Считать, что при движении шайба не отрывается от поверхности горки, а поступательно движущаяся горка – от поверхности стола. (МФТИ, 1997г.)

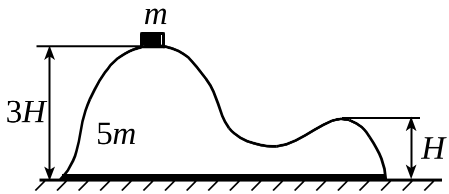

Рис. 29