Обратные тригонометрические функции

Кандидат физико-математических наук
К. Л. САМАРОВ,
кандидат физико-математических наук
М. И. ШАБУНИН

Напомним*), что если X — область определения, а Y — область значений функции f, то для каждого $x \in X$ существует единственное $y \in Y$ такое, что $f(x)=y$.

Нередко приходится по заданному значению $y \in Y$ искать соответствующее ему значение аргумента x, то есть решать уравнение $f(x)=y$ относительно x. Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений.

Например, в случае функции $y=x^2$ соответствующее уравнение для каждого $y>0$ имеет два решения. В случае функции $y=\sin x$ соответствующее уравнение для каждого $y \in [-1;\ 1]$ имеет бесконечно много решений.

Легко также привести примеры функций, для которых уравнение $f(x)=y$ однозначно разрешимо при каждом заданном y из области значений функции f. Например, этим свойством обладают функция $y=2x+3$ и функция $y=x^2$, рассматриваемая на луче $[0;\ +\infty[$.

Функция f (с областью определения X и областью значений Y) называется *обратимой*, если она принимает каждое свое значение только при одном значении аргумента. Для такой функции уравнение $f(x)=y$ при любом $y \in Y$ можно однозначно разрешить относительно x, то есть каждому $y \in Y$ соответствует единственное $x \in X$. Это соответствие определяет функцию g, *обратную* к функции f.

*) В ныне действующих школьных учебниках соответствующий материал изложен в пп. 21—22 учебника «Алгебра 8» и в п. 51 пособия «Алгебра и начала анализа 10». (*Прим. редакции.*)

Отметим, что

а) если g — функция, обратная к функции f, то и функция f — обратная к функции g; области определения и области значений взаимно-обратных функций f и g связаны условиями

$$D(g)=E(f),$$
$$E(g)=D(f),$$

то есть область определения функции g совпадает с областью значений функции f и наоборот;

б) для любых $x_0 \in D(f)$, $y_0 \in D(g)$ справедливо утверждение

$$f(x_0)=y_0 \Leftrightarrow g(y_0)=x_0$$

или

$$g(f(x_0))=x_0,$$
$$f(g(y_0))=y_0;$$

в) графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$;

г) функция, обратная к нечетной функции, тоже нечетна;

д) любая монотонная функция обратима, причем функция, обратная к возрастающей (убывающей), — возрастающая (убывающая).

* * *

Функция $\sin x$, как и любая периодическая функция, не обратима. В то же время, если ограничить ее область определения любым промежутком монотонности, полученная функция будет обратимой. В частности, функция $\sin x$ монотонна и обратима на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция, обратная к функции $\sin x$, рассмотренной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, называется *арксинусом*; значение этой функции в точке a обозначается $\arcsin a$ (рис. 1). Из определения арксинуса следует, что арксинус числа a есть число, заключенное между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен a.

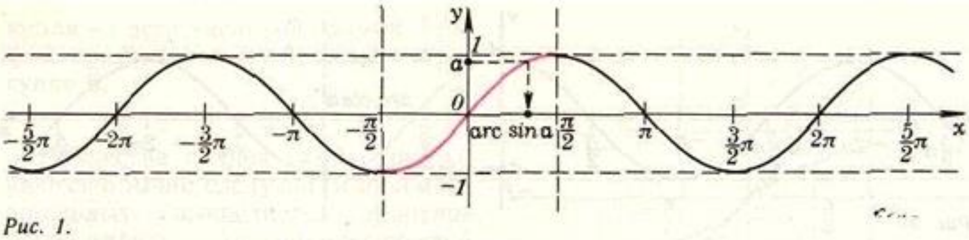

Рис. 1.

Подчеркнем, что функция $\arcsin x$ не является обратной к $\sin x$ — функция $\sin x$, не будучи обратимой, не имеет обратной. Функция $\arcsin x$ является обратной к «функции $\sin x$, рассмотренной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$», или, как еще говорят в математике, к *сужению функции* $\sin x$ *на отрезок* $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

В силу свойств взаимно-обратных функций, перечисленных в начале статьи,

$$D(\arcsin)=[-1;\ 1],$$
$$E(\arcsin)=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$$

и для любых $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $y_0 \in [-1;\ 1]$ справедливо утверждение

$$\sin x_0 = y_0 \Leftrightarrow \arcsin y_0 = x_0$$

или

$$\arcsin(\sin x_0) = x_0, \qquad (1)$$
$$\sin(\arcsin y_0) = y_0. \qquad (2)$$

Подчеркнем еще раз, что равенство (2) справедливо «всегда», то есть для любого $y_0 \in [-1;\ 1]$, а равенство (1) выполняется не для всех $x_0 \in \mathrm{R}$, а только при $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

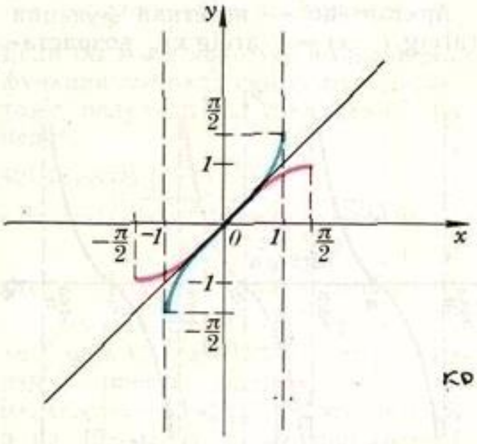

Рис. 2.

Иначе говоря, справедливо утверждение

$$\arcsin a = b \Rightarrow \sin b = a,$$

утверждение же

$$\sin a = b \Rightarrow \arcsin b = a$$

справедливо лишь при $a \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

График арксинуса получается по общему правилу — симметрией соответствующей части графика синуса относительно прямой $y=x$ (рис. 2).

Поскольку синус — нечетная функция, нечетен и арксинус:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \qquad (3)$$

Тождество (3), как и любое равенство, в которое входит арксинус, имеет место только тогда, когда аргумент арксинуса лежит на $[-1;\ 1]$.

Поскольку синус возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, арксинус возрастает на $[-1;\ 1]$. Арксинус — обратимая функция, обратной к ней является «синус, рассмотренный на $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$».

* * *

Перейдем к арккосинусу. Функция $\cos x$ не обратима, но, если ограничить ее область определения любым промежутком монотонности, полученная функция будет обратимой.

Функция, обратная к функции $\cos x$, рассмотренной на отрезке $[0;\ \pi]$, называется *арккосинусом*; значение этой функции в точке a обозначается $\arccos a$ (рис. 3). Арккосинус числа a есть число, заключенное между 0 и π, косинус которого равен a.

Из свойств взаимно-обратных функций следует, что

$$D(\arccos)=[-1;\ 1],$$
$$E(\arccos)=[0;\ \pi]$$

и для любых $x_0 \in [0;\ \pi]$, $y_0 \in [-1;\ 1]$ справедливо утверждение

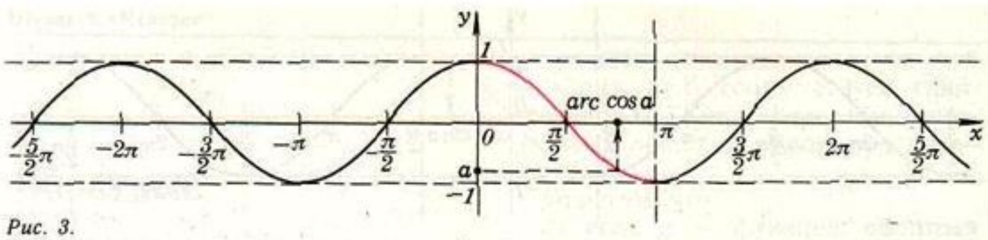

Рис. 3.

$$\cos x_0 = y_0 \Leftrightarrow \arccos y_0 = x_0$$

или

$$\arccos(\cos x_0) = x_0,$$
$$\cos(\arccos y_0) = y_0.$$

Другими словами,

$$\arccos a = b \Rightarrow \cos b = a,$$
$$\cos a = b \text{ и } 0 \leqslant a \leqslant \pi \Rightarrow \arccos b = a.$$

График арккосинуса получается симметрией соответствующей части графика косинуса относительно прямой $y = x$ (рис. 4).

Аналогом равенства (3) является тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad (4)$$

справедливое только при $-1 \leqslant x \leqslant 1$; мы его докажем ниже.

Арккосинус убывает на $[-1, 1]$. Обратной к функции $\arccos x$ является «косинус, рассмотренный на $[0; \pi]$».

Арксинус и арккосинус связаны тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

которое мы докажем ниже. Впрочем, при $0 < x < 1$ $\arcsin x$ и $\arccos x$ — углы прямоугольного треугольника; равенство (5) в этом случае очевидно.

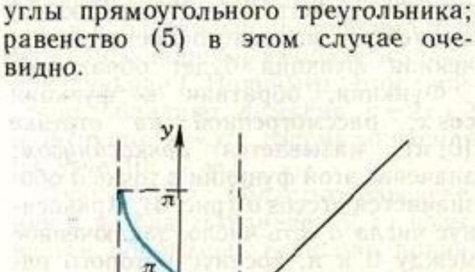

Рис. 4.

* * *

Наконец — об арктангенсе.

Функция, обратная к функции $\operatorname{tg} x$, рассмотренной на интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, называется *арктангенсом*; значение этой функции в точке a обозначается $\operatorname{arctg} a$ (рис. 5). Арктангенс числа a есть число, заключенное между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен a.

Из свойств взаимно-обратных функций следует, что

$$D(\operatorname{arctg}) = \mathrm{R},$$
$$E(\operatorname{arctg}) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

и для любых $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $y_0 \in \mathrm{R}$ справедливо утверждение

$$\operatorname{tg} x_0 = y_0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} y_0 = x_0$$

или

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0) = x_0,$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y_0) = y_0.$$

Иначе говоря,

$$\operatorname{arctg} a = b \Rightarrow \operatorname{tg} b = a,$$
$$\operatorname{tg} a = b \text{ и } -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} b = a.$$

Арктангенс — нечетная функция ($\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$), возраста-

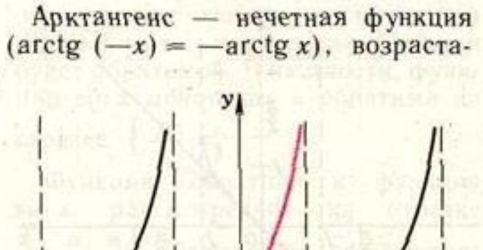

Рис. 5.

ющая на всей числовой прямой. График арктангенса изображен на рисунке 6.

* * *

Тождества с «аркусами» доказываются обычно следующим приемом: во-первых, вычисляется значение какой-нибудь тригонометрической функции φ (φ — это синус, косинус или тангенс) от обеих частей доказываемого тождества

$$A=B$$

и проверяется, что $\varphi(A)=\varphi(B)$, и, во-вторых, устанавливается, что A и B расположены на таком промежутке, где выбранная функция φ монотонна; тогда из равенства $\varphi(A)=\varphi(B)$ вытекает, что $A=B$.

Пример 1. Докажем, что для всех $x\in[-1;1]$ верно (4). Посчитаем косинус от обеих частей равенства (4):

$$\cos(\arccos(-x))=-x,$$

$$\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x.$$

Итак, $\cos(\arccos(-x))=\cos(\pi-\arccos x)$. По определению арккосинуса

$$0\leqslant\arccos(-x)\leqslant\pi.$$

Из неравенства $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ вытекает, что

$$0\leqslant\pi-\arccos x\leqslant\pi.$$

На $[0;\pi]$ косинус монотонен. Следовательно,

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

Если бы мы в качестве вычисляемой функции выбрали синус, то, конечно, тоже получили бы совпадение значений:

$$\sin(\arccos(-x))=\sqrt{1-\cos^2(\arccos(-x))}=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2},$$

$$\sin(\pi-\arccos x)=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2}$$

(в обоих случаях перед корнем пишется «плюс», так как $0\leqslant\arccos(-x)\leqslant\pi$ и $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, а на $[0;\pi]$ синус неотрицателен), но из равенства

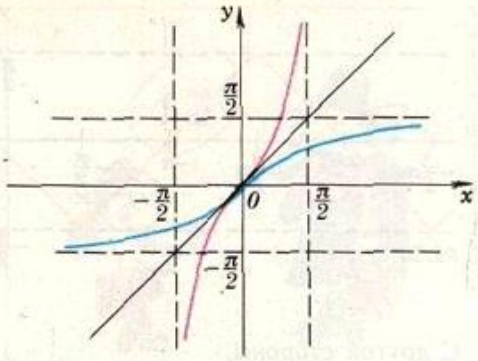

Рис. 6.

$\sin(\arccos(-x))=\sin(\pi-\arccos x)$ не следует (4), так как на $[0;\pi]$ синус не монотонен.

Пример 2. Докажем, что для всех $x\in[-1;1]$ верно тождество (5). Докажем мы его в равносильном виде

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

По определению арккосинуса

$$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,$$

откуда вытекает, что

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Значит, левая и правая части доказываемого равенства при всех допустимых значениях x принадлежат $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Вычислив синус от обеих его частей, получим

$$\sin(\arcsin x)=x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

На $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ синус монотонен. Следовательно,

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

Пример 3. Докажем, что для $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$

$$\arcsin(\sin x)=\pi-x.$$

С одной стороны,

$$\sin(\arcsin(\sin x))=\sin x,$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x.$$

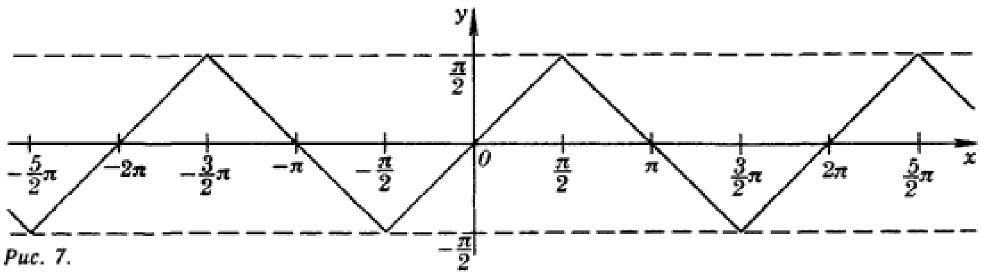

Рис. 7.

С другой стороны,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(\sin x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Из неравенства $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ следует, что

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

На $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ синус монотонен. Значит, $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Итак, $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Поскольку $\arcsin(\sin x)$ — периодическая функция с периодом 2π (почему?) и отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ имеет длину 2π, мы можем построить ее график (рис. 7).

* * *

Задачи на вычисления с «аркусами» решаются аналогично.

Пример 4. Вычислим $A = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$.

Прежде всего, $A = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} - \left(\pi - \arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos\frac{11}{\sqrt{130}} - \pi$. Оценим теперь число $B = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos\frac{11}{\sqrt{130}}$. Поскольку $\frac{4}{\sqrt{65}} > 0$ и $\frac{11}{\sqrt{130}} > 0$,

$$0 < \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} < \frac{\pi}{2}$$
$$0 < \arccos\frac{11}{\sqrt{130}} < \frac{\pi}{2}$$
$$\overline{0 < \quad B \quad < \pi}$$

Так как на $[0; \pi]$ синус не монотонен, а косинус монотонен, найдем $\cos B$: $\cos B =$

$$= \cos\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \cos\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \times \cos\left(\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right) - \sin\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \times \sin\left(\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right) =$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2} \cdot \frac{11}{\sqrt{130}} - \frac{4}{\sqrt{65}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из соотношений $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 < B < \pi$ следует, что $B = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит, $A = B - \pi = -\frac{3}{4}\pi$.

Пример 5. Сравним числа $\arcsin\frac{2}{5}$ и $\arccos\frac{2}{5}$. Поскольку $\frac{2}{5} > 0$,

$$0 < \arcsin\frac{2}{5} < \frac{\pi}{2}$$

и

$$0 < \arccos\frac{2}{5} < \frac{\pi}{2}.$$

(Окончание см. на с. 49)

Ф797. *Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряжения U на конденсаторе по закону $\varepsilon = \alpha U$, где $\alpha = 0{,}1$ $В^{-1}$. Параллельно этому «нелинейному» конденсатору (незаряженному) подключают обычный конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_0 = 60$ В. Каким будет напряжение на конденсаторах?*

Поскольку отличие «нелинейного» конденсатора от обычного заключается лишь в наличии между его обкладками диэлектрика, емкость «нелинейного» конденсатора при напряжении U на нем равна

$$C = \varepsilon C_0 = \alpha U C_0,$$

где C_0 — емкость обычного конденсатора. При этом заряд на «нелинейном» конденсаторе —

$$q_н = CU = \alpha C_0 U^2,$$

а заряд на обычном конденсаторе —

$$q = C_0 U$$

(напряжение U на конденсаторах при параллельном соединении одинаковое).

Начальный заряд обычного конденсатора был равен

$$q_0 = C_0 U_0,$$

и в силу закона сохранения заряда при любом напряжении U на конденсаторах

$$q_н + q = q_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha C_0 U^2 + C_0 U = C_0 U_0.$$

Отсюда находим напряжение U:

$$U = \frac{\sqrt{4\alpha U_0 + 1} - 1}{2\alpha} = 20 \text{ В}.$$

А. И. Буздик

Обратные тригонометрические функции

(Начало см. на с. 30)

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и синус, и косинус, и тангенс монотонны. Вычислим, например, косинус от сравниваемых чисел:

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

Так как на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ косинус убывает, из неравенства

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) > \cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$$

следует, что

$$\arcsin\frac{2}{5} < \arccos\frac{2}{5}.$$

Пример 6. Вычислим $\arcsin(\sin 11)$. Для этого сравним сначала 11 с $\frac{\pi}{2}k$ ($k \in \mathbf{Z}$). Из неравенства $3 < \pi < 3{,}142$ ($\pi = 3{,}14159\ldots$) следует, что $\frac{7}{2}\pi < 11 < 4\pi$. Значит, $-\frac{\pi}{2} < 11 - 4\pi < 0 < \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\arcsin(\sin 11) = \arcsin(\sin(11 - 4\pi)) = 11 - 4\pi.$$

Упражнения

1. Докажите тождество

а) $\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$

б) $2\,\mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x} + \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi$ $(0 \leqslant x < 1)$.

2. Вычислите

а) $\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \mathrm{arctg}\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\frac{1}{7} + \mathrm{arctg}\frac{1}{8}$;

б) $\arccos(\cos 4)$;

в) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

3. Постройте график функции

а) $\arccos(\cos x)$;

б) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)$.