ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

А. Я. МАРГУЛИС, Б. А. РАДУНСКИЙ

При изучении курса математики школьникам часто приходится решать неравенства и системы неравенств с одним неизвестным. При этом геометрическая иллюстрация решений (в совокупности с методом интервалов) помогает им кратчайшим путем находить правильные решения.

Рассмотрим, например, неравенство

$$\log_2(x^2-4x+3)\leqslant 3.$$

Его решение сводится к решению системы двух неравенств с одним неизвестным

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0 & \text{(необходимо для существования логарифма)},\\ x^2-4x+3\leqslant 8 & \text{(получается при потенцировании заданного неравенства)}. \end{cases}$$

Множество значений x, удовлетворяющих первому неравенству, есть совокупность двух интервалов

$$x<1 \text{ и } x>3,$$

а второму — отрезок

$$1\leqslant x\leqslant 5$$

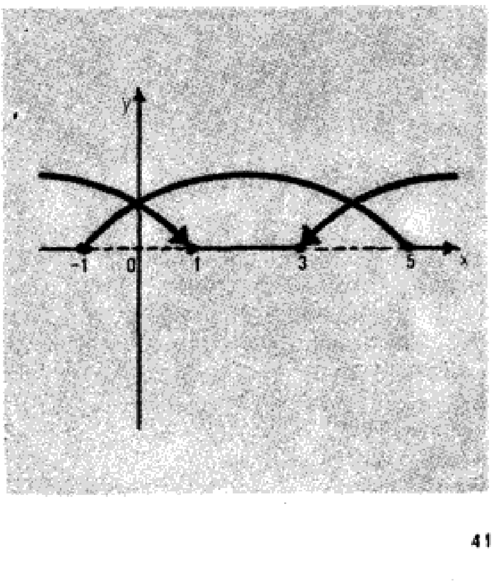
(это вытекает из свойств квадратного трехчлена).

Отметив на числовой оси эти промежутки (рис. 1), мы видим, что множество значений x, удовлетворяющих системе неравенств, заполняет два полуоткрытых интервала, $-1\leqslant x<1$ и $3<x\leqslant 5$ (на рисунке они даны пунктиром).

Для большей наглядности на самом рисунке отмечено, какие из концов интервалов принадлежат к области решений, а какие — нет.

Геометрическая иллюстрация оказалась здесь весьма полезной. Ее роль еще больше возрастает при решении неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными.

Рис. 1



Рассмотрим неравенства с двумя неизвестными вида

$$y - f(x) > 0. \qquad (1)$$

Построим график функции $y=f(x)$ и возьмем произвольную точку A_1' с абсциссой $x=x_0$ (рис. 2). Если при том же $x=x_0$ ее ордината y_1 больше ординаты y_0, соответствующей точки A кривой $y=f(x)$, то точка A_1' лежит над кривой. Точка A_1'' лежит под кривой $y=f(x)$, если ее ордината y_2 меньше ординаты y_0. Следовательно, координаты всех точек, лежащих ниже кривой $y=f(x)$, удовлетворяют неравенству $y<f(x)$, а координаты всех точек, лежащих выше кривой $y=f(x)$, удовлетворяет неравенству $y>f(x)$.

Таким образом, график функции $y=f(x)$ разбивает координатную плоскость на две части, в одной из которых выполняется неравенство $y-f(x)>0$, а в другой $y-f(x)<0$.

Введем следующее о п р е д е л е н и е. *Множество точек плоскости называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками A и B содержит все точки отрезка AB.*

Рассмотрим, например, внутреннюю часть любого треугольника, круга, квадрата. Можно показать, что эти множества являются выпуклыми.

Очевидно, что те части, на которые кривая $y=f(x)$ разбивает плоскость, могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (см. рис. 2).

Проиллюстрируем теперь на ряде примеров, как при помощи геометрических представлений можно решать неравенства и системы неравенств с двумя неизвестными.

Рассмотрим линейную функцию

$$f(x)=ax+b. \qquad (2).$$

Графиком линейной функции $y=ax+b$ является прямая линия (рис. 3). Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости: верхнюю и нижнюю. В первой из них выполняется неравенство $y-(ax+b)>0$, а во второй $y-(ax+b)<0$. Заметим, что обе эти полуплоскости являются выпуклыми множествами.

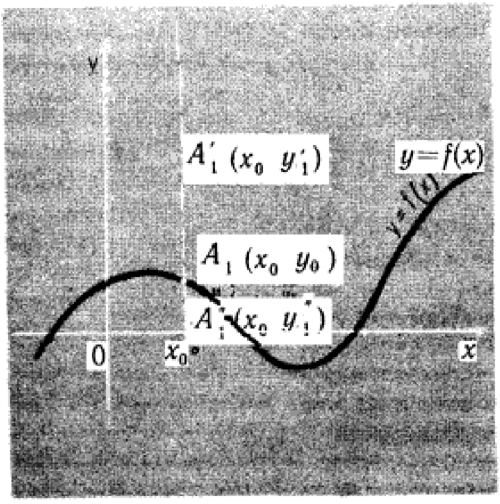
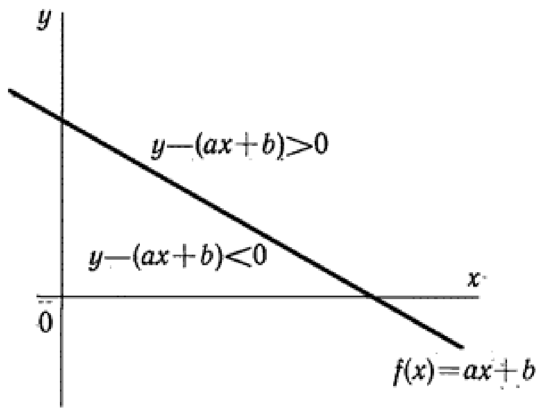
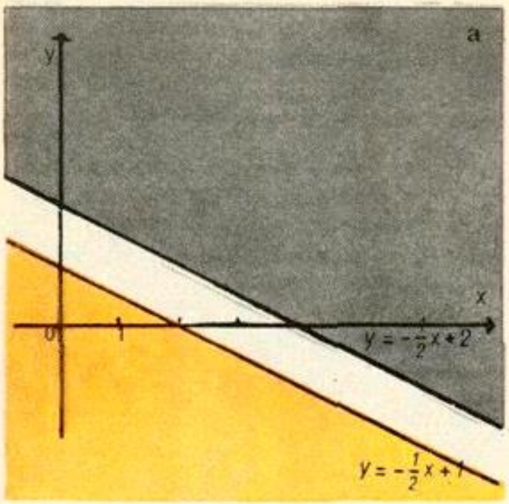


Рис. 2

Рис. 3

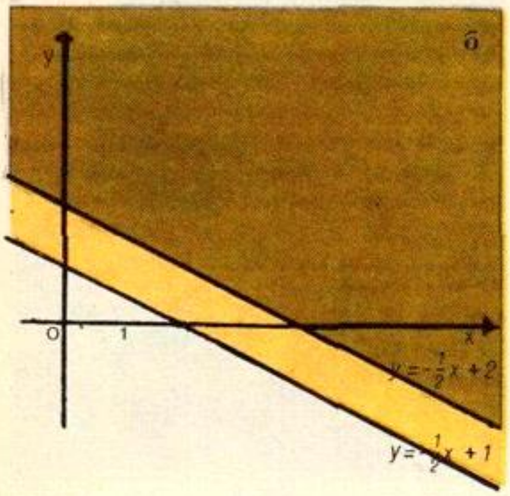




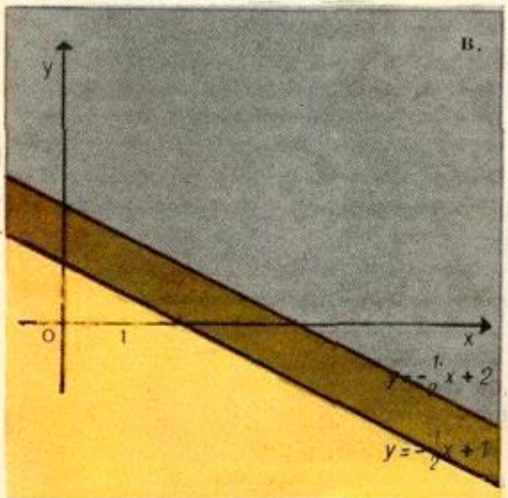
П р и м е р 1. Найти на координатной плоскости геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют системам двух линейных неравенств (решить графически заданные системы неравенств):

а) $\begin{cases} y > -\frac{1}{2}x+2, \\ y < -\frac{1}{2}x+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y > -\frac{1}{2}x+2, \\ y > -\frac{1}{2}x+1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y < -\frac{1}{2}x+2, \\ y > -\frac{1}{2}x+1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geqslant \frac{1}{3}x+1, \\ y \leqslant 2x-2. \end{cases}$



Р е ш е н и е. На рисунке 4 приведены графические решения данных неравенств. Если решения каждого из неравенств закрасить желтой или серой краской, то решением системы является часть плоскости, закрашенная обоими цветами. Из рисунка 4 видно, что система а) решений не имеет (рис. 4,*а*); решением системы б) является полуплоскость, лежащая над прямой $y=-\frac{1}{2}x+2$ (рис. 4,*б*); решением системы в) является бесконечная полоса между прямыми $y=-\frac{1}{2}x+1$ и $y=-\frac{1}{2}x+2$ (рис. 4,*в*); а решением системы г) является часть плоскости, лежащая внутри дважды закрашенного угла, включая его стороны (рис. 4,*г*).



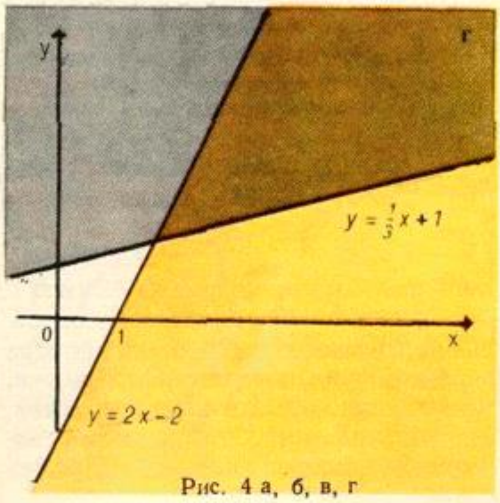


Рис. 4 а, б, в, г

Отметим, что во всех случаях области решений системы линейных неравенств являются выпуклыми множествами. Это не случайно. Мы уже отмечали, что любая прямая делит плоскость на два выпуклых множества, а *пересечение* (*общая часть*) *любого числа выпуклых множеств всегда является выпуклым множеством.*

П р и м е р 2. Решить графически систему трех линейных неравенств

$$\begin{cases} y < \frac{1}{3}x + 2, \\ y > -\frac{1}{2}x + 3, \\ y > 2x - 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Эту задачу можно решать так же, как и предыдущую. Но ввиду большого количества ограничений удобнее закрашивать не те области, где выполняется то или иное неравенство, а наоборот, те области, где решений быть не может. При этом отпадает необходимость в разных красках: ведь там, где не выполняется хотя бы одно из неравенств системы, решений всей системы быть не может. На рисунке 5 приведено графическое решение этого примера. Совокупность решений — множество внутренних точек треугольника ABC. Для наглядности треугольник окрашен зеленой краской.

К системам линейных неравенств сводятся и некоторые иррациональные и трансцендентные неравенства.

П р и м е р 3. Решить графически неравенство $\sqrt{y-(x+1)} < 1$.

Р е ш е н и е. Заданное неравенство эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} y-(x+1) \geq 0 \\ y-(x+1) < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y-(x+1) \geq 0, \\ y-(x+2) < 0. \end{cases}$$

Графическое решение этого примера приведено на рисунке 6. Так же, как и в примере 3, множество точек, удовлетворяющих этой системе, закрашено зеленой краской. Прямая

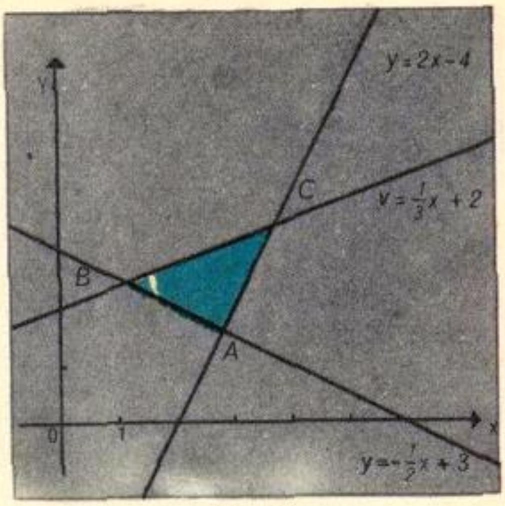


Рис. 5

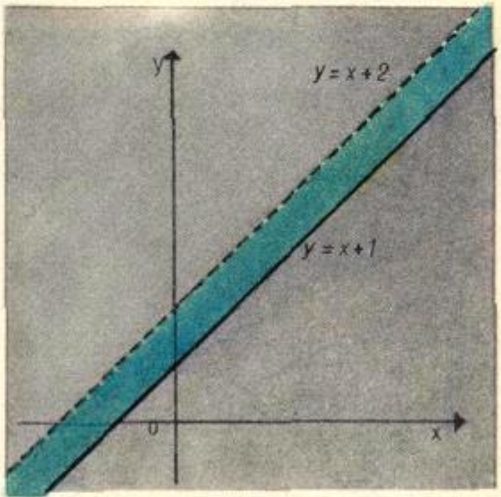


Рис. 6

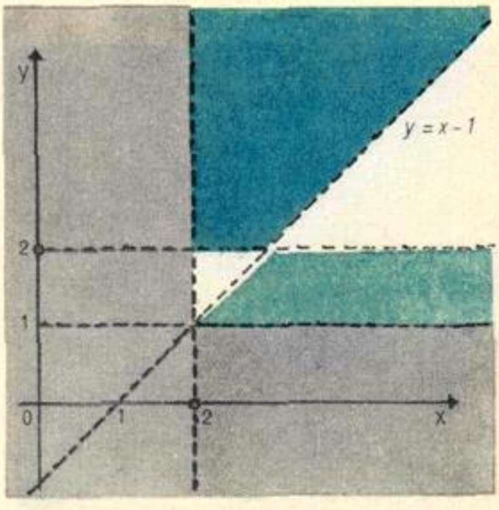


Рис. 7

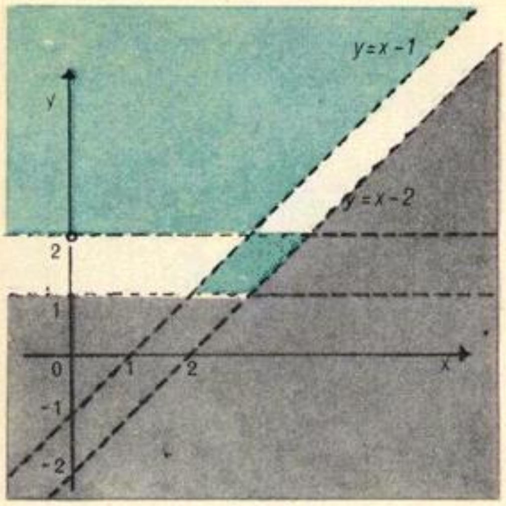


Рис. 8

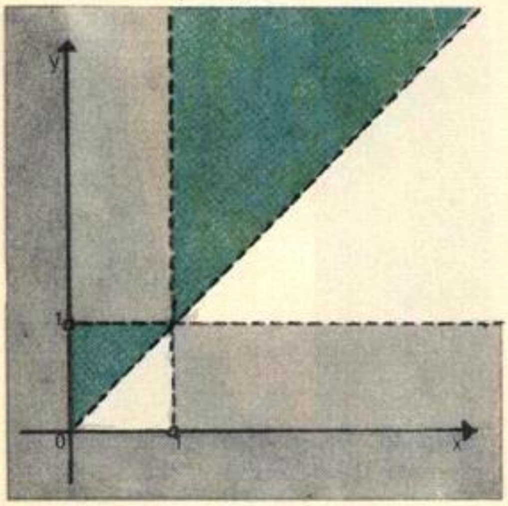


Рис. 9

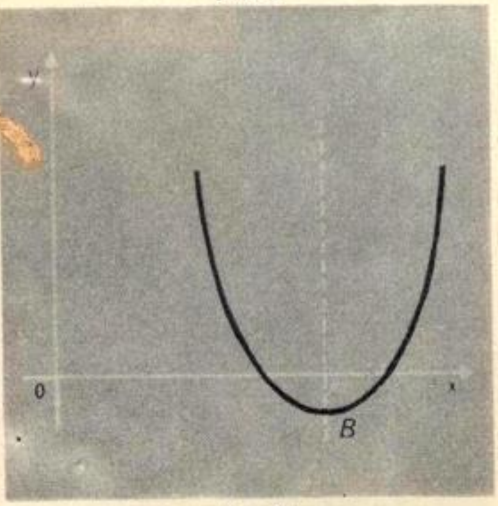


Рис. 10

$y=x+1$, принадлежащая области решений, проведена сплошной линией, а прямая $y=x+2$, не принадлежащая области решений,— пунктиром.

Пример 4. Решить графически неравенство $\log_{y-1}(x-2)<1$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) неизвестных, очевидно, определяется системой неравенств

$$x>2, \quad y>1, \quad y\neq 2.$$

В соответствии с данной системой исключим вначале множества, в которых система заведомо не может иметь решения. Для этого на рисунке 7 закрасим серой краской полуплоскость $x<2$, полуплоскость $y<1$, и пунктиром проведем прямую $y=2$.

Рассмотрим теперь два случая:

а) $1<y<2$. Потенцируя исходное неравенство, получим $x-2>y-1$ или $y<x-1$.

б) При $y>2$ получаем $x-2<y-1$, $y>x-1$.

Решения, соответствующие этим случаям, на рисунке 7 окрашены в зеленый цвет.

Решите самостоятельно примеры 5 и 6.

Пример 5. Решить графически неравенство $\log_{y-1}(y-x+2)>0$ (см. рис. 8).

Пример 6. Решить графически неравенство $\log_x \log_x y>0$ (см. рис. 9).

Рассмотрим теперь квадратный трехчлен

$$f(x)=ax^2+bx+c. \qquad (3)$$

Как известно, графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат, и с вершиной в точке $B\left(-\frac{b}{2a}, \quad -\frac{D}{4a}\right)$, где $D=b^2-4ac$.

График одного из квадратных трехчленов (при $a>0$) схематически показан на рисунке 10. Этот график делит плоскость на две части, в одной из которых выполняется неравенство $y-(ax^2+bx+c)>0$, а в другой $y-(ax^2+bx+c)<0$. Читатель без труда заметит, что только одна из этих частей является выпуклым множеством.

Пример 7. Решить графически неравенство $\log_y(5x-x^2-6)>1$.

Решение. Область допустимых значений определяется, очевидно, неравенствами

$$\begin{cases} 5x-x^2-6>0, \\ y>0, \\ y\neq 1. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств эквивалентно неравенству $x^2-5x+6<0$. Его решения заполняют интервал $2<x<3$.

На рисунке 11 серым закрашены те части плоскости, где $x<2$ и $x>3$, и полуплоскость $y<0$, а также исключены точки, лежащие на проведенной пунктиром прямой $y=1$.

Рассмотрим два случая: $y>1$ и $0<y<1$.

а) $y>1$. Потенцируя исходное выражение, получаем неравенство $5x-x^2-6>y$, или $y-(-x^2+5x-6)<0$. Последнему неравенству удовлетворяют координаты всех точек, расположенных под параболой $y=-x^2+5x-6$, но ни одна из них не соответствует условию $y>1$. Таким образом, при $y>1$ решений нет.

б) $0<y<1$. Аналогично получаем неравенство $5x-x^2-6<y$, т. е. $y-(-x^2+5x-6)>0$.

Очевидно, что решением является закрашенная на рисунке 11 зеленым цветом область над параболой $y=-x^2+5x-6$.

Решите самостоятельно примеры 8 и 9.

Пример 8. Решить графически неравенство $\sqrt{y}<x-1$ (см. рис. 12).

Пример 9. Решить графически неравенство (см. рис. 13)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{y-x+3}}.$$

Пример 10. Решить графически неравенство

$$\sqrt{1-(x-3)^2-(y-2)^2}<$$
$$<\sqrt{1-(x-4)^2-(y-2)^2}.$$

Решение. В данном случае ОДЗ определяется неравенствами

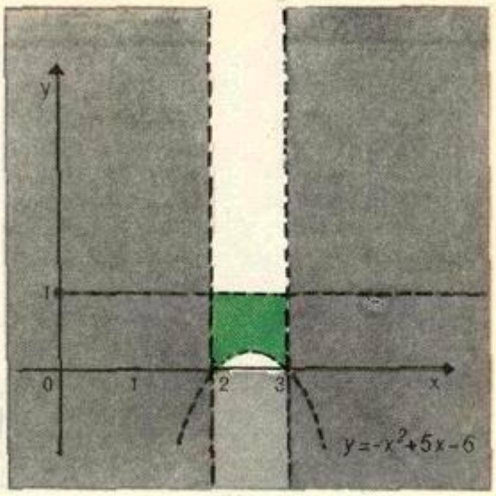


Рис. 11

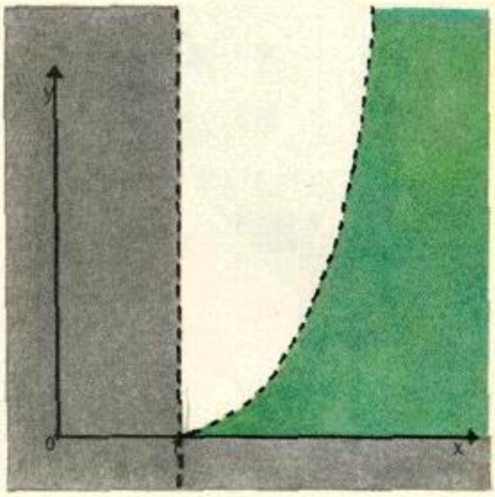


Рис. 12

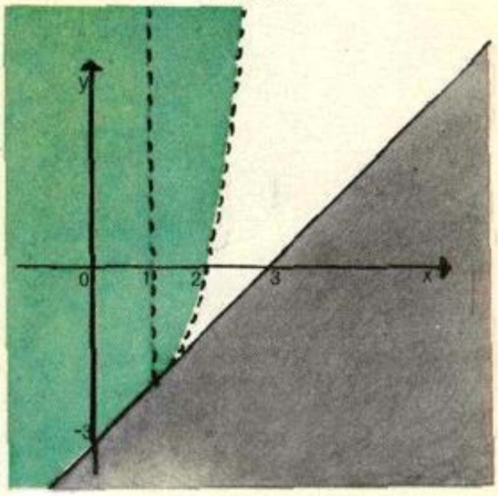


Рис. 13

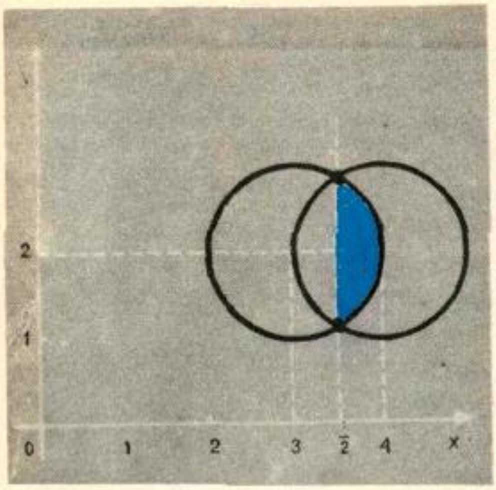


Рис. 14

$$\begin{cases} 1-(x-3)^2-(y-2)^2 \geqslant 0, \\ 1-(x-4)^2-(y-2)^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2 \leqslant 1, \\ (x-4)^2+(y-2)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Уравнение $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ является уравнением окружности единичного радиуса с центром в точке $O_1(3;2)$. Неравенству $(x-3)^2+(y-2)^2 \leqslant 1$ удовлетворяют все точки, удаленные от точки O_1 не более чем на единицу, т. е. все точки указанного круга, включая и его границу. Аналогично определяется и множество *точек, координаты которых* удовлетворяют второму неравенству полученной системы. Отсюда получаем, что областью допустимых значений неизвестных является общая часть двух кругов (рис. 14). Остается найти множество точек, для которых выполняется заданное неравенство. После очевидных преобразований получим неравенства, которые в данной ОДЗ равносильны исходному:

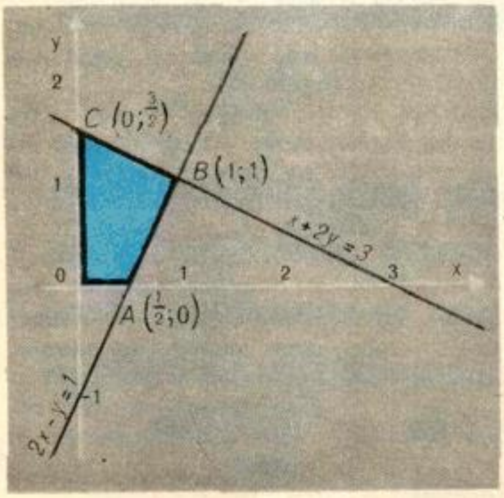
$$1-(x-3)^2-(y-2)^2 <$$
$$< 1-(x-4)^2-(y-2)^2$$
$$(x-4)^2-(x-3)^2 < 0,$$
$$x > \frac{7}{2}.$$

Таким образом, **решением** является *закрашенная на рисунке* 14 синей краской область (часть ОДЗ, лежащая правее прямой $x=\frac{7}{2}$).

В заключение рассмотрим следующий пример.

П р и м е р 11. Среди точек, координаты которых удовлетворяют условиям $x+2y \leqslant 3$, $2x-y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, найти такую точку, для которой выражение x^2+y^2 будет наибольшим.

Рис. 15



Решение. Найдем при помощи графического решения системы неравенств

$$x+2y\leqslant 3,\quad 2x-y\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0$$

множество точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям. Из рисунка 15 видно, что это будет четырехугольник $OABC$. (Координаты его вершин легко определяются из уравнений граничных прямых и указаны на том же рисунке.)

Теперь наша задача сформулируется так. Среди точек четырехугольника $AOBC$ найти такую точку, для которой выражение x^2+y^2 является наибольшим. Но мы знаем, что выражение x^2+y^2 определяет квадрат расстояния от точки с координатами (x, y) до начала координат. Следовательно, задача сводится к отысканию в четырехугольнике $OABC$ точки, наиболее удаленной от начала координат. Очевидно, что такой точкой является точка $C\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$. Докажите!

Решите сами две задачи такого типа (эти задачи предлагались в 1968 году на вступительных письменных экзаменах по математике).

Пример 12 (физфак Ленинградского университета). Среди всех пар чисел, удовлетворяющих неравенству $\log_{x^2+y^2}(x+y)\geqslant 1$, найти те, у которых y наибольшее.

Пример 13 (мехмат Новосибирского университета). Для каждого a среди всех точек плоскости, координаты которых $(x,\ y)$ удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y-2x\geqslant 0,\\ -x^2+2ax-a^2+a+1-y\geqslant 0,\end{cases}$$

найти точку с наибольшим y.

СЛУЧАЙ НА ЛЕКЦИИ

В начале лекции лектор сформулировал известную теорему Коши, по которой среднее арифметическое неравных между собой положительных чисел больше их среднего геометрического.

В этот момент студента вызвали в деканат. Когда он возвращался на лекцию, то еще за дверью услышал, как лектор заканчивал формулировку задачи:

«Подскажу, что все корни уравнения не только действительны, но еще и положительны».

Когда студент вошел в аудиторию, то на доске все уже было стерто, кроме записи

x^{20} — $20x^{19}$ ... $+1=0$.

— Все ясно — сказал студент и назвал все корни уравнения, которые в его отсутствие записывал лектор.

А вы сможете их назвать?