РЕШАЯ НЕРАВЕНСТВО С ПАРАМЕТРОМ...

А. Я. Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

1. ТЩАТЕЛЬНО ИССЛЕДУЙТЕ ВСЕ СЛУЧАИ

Пусть надо решить относительно x следующее линейное неравенство:

$$\frac{3ax+4}{3a+9} < \frac{x}{a+3} + \frac{3a-5}{3a-9}.$$

Казалось бы, что может быть проще? Следуя известному школьному правилу, соберем все члены, содержащие x, в левой части неравенства, а свободные члены — в правой:

$$\frac{3ax}{3a+9} - \frac{x}{a+3} < \frac{3a-5}{3a-9} + \frac{4}{3a+9},$$

и упростим полученное неравенство:

$$\frac{a-1}{a+3}x < \frac{a^2-1}{a^2-9}. \qquad (1)$$

Теперь осталось «всего лишь» разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном.

Но именно на этом шаге — при делении обеих частей неравенства (1) на коэффициент при неизвестном — нужно быть предельно осторожным, ибо в неравенстве содержится *параметр*.

Неравенство с параметром — это по существу множество неравенств, каждое из которых получается из заданного при конкретном значении параметра. Представьте себе, что приятель предложил вам решить неравенство с параметром, а сам задумал конкретное числовое значение параметра. Вы не знаете задуманного значения, и ваша задача — не дать застигнуть себя врасплох, тщательно исследовать все случаи, которые могут представиться. После того как вы решили неравенство, и приятель объявил вам задуманное им значение параметра, вы должны найти в своем ответе случай, относящийся именно к этому значению.

Вернемся к нашему примеру. Могут представиться 4 случая:

1) одна или обе части неравенства не имеют смысла;

2) коэффициент при неизвестном равен нулю;

3) коэффициент при неизвестном положителен;

4) коэффициент при неизвестном отрицателен.

Первый случай возникнет при $a = \pm 3$. При этих значениях параметра, разумеется, неравенство (1) не имеет решений.

Второй случай возникнет при $a=1$. При этом значении параметра неравенство (1) принимает вид $0\cdot x<0$ и решений, очевидно, не имеет.

Третий случай возникнет при $a<-3$ или при $a>1$, $a\neq 3$. Разделив обе части неравенства (1) на *положительное* число $\frac{a-1}{a+3}$, получим:

$$x < \frac{a+1}{a-3}.$$

Четвертый случай возникнет при $-3<a<1$. Разделив обе части неравенства (1) на *отрицательное* число $\frac{a-1}{a+3}$, получим: $x > \frac{a+1}{a-3}$.

Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a=1$, $a=\pm 3$, то решений нет;

если $a<-3$, $1<a<3$, $a>3$, то

$$x < \frac{a+1}{a-3};$$

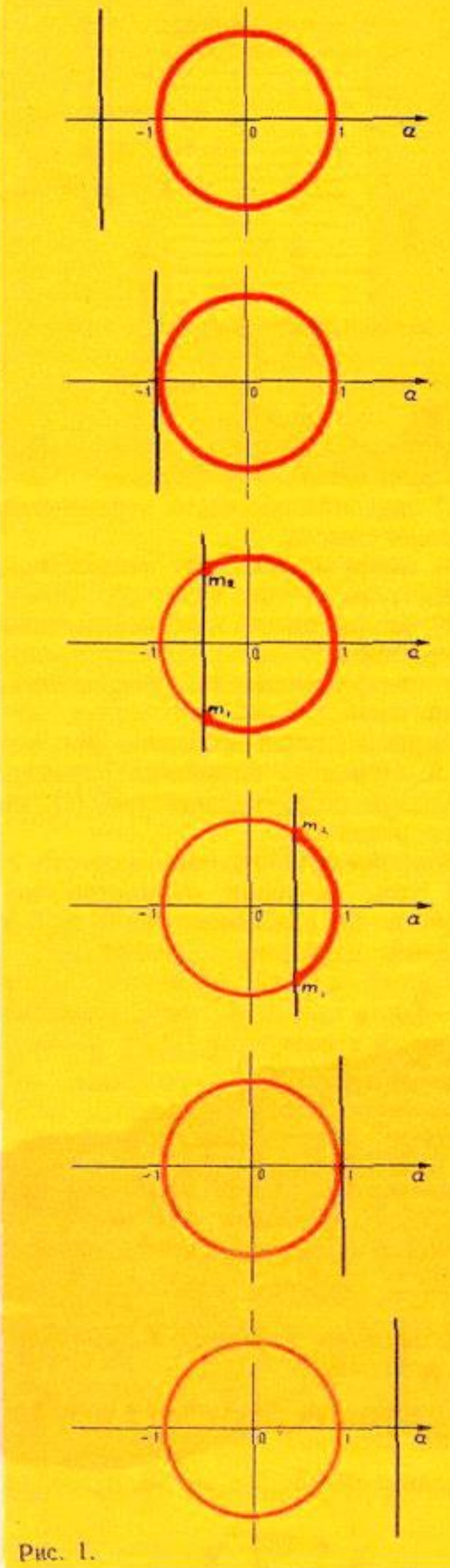

Рис. 1.

если $-3<a<1$, то $x>\frac{a+1}{a-3}$.

Приведенный ответ содержит в себе решение неравенства (1) *для любого значения параметра*. Именно это и является главной целью при решении неравенства с параметром.

Используя рисунок 1, решите неравенство $\cos x \geqslant a$ и докажите, что ответ такой:

если $a \leqslant -1$, то $-\infty<x<\infty$;
если $-1<a<1$, то
$m_1+2k\pi \leqslant x \leqslant m_2+2k\pi$,
где $m_1=-\arccos a$, $m_2=\arccos a$;
если $a=1$, то $x=2k\pi$;
если $a>1$, то решений нет.
$(k=0, \pm 1, \ldots)$

2. НЕ ТОРОПИТЕСЬ С ВЫВОДАМИ

Рассмотрим еще один простой пример. Решим неравенство $\sqrt{x}>a$. Велик соблазн написать $x>a^2$ и заявить, что эта запись содержит в себе все решения неравенства. Но не следует торопиться с выводами, когда решается неравенство с параметром: ведь a может быть меньше нуля; тогда решением неравенства $\sqrt{x}>a$ будет любое неотрицательное значение x; если же $a \geqslant 0$, то возведение в квадрат обеих частей неравенства $\sqrt{x}>a$ является равносильным преобразованием; выполнив его, получим $x>a^2$.

Ответ: если $a<0$, то $x \geqslant 0$;
если $a \geqslant 0$, то $x>a^2$.

А теперь перейдем к рассмотрению более сложных примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+x}<a-x. \qquad (2)$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного определяется неравенством $x^2+x \geqslant 0$. Кроме того, ясно, что если $a-x \leqslant 0$, то неравенство (2) не имеет решений, поэтому ограничимся случаем $a-x>0$. Но при выполнении условий

$$\begin{cases} x^2+x \geqslant 0, \\ a-x>0 \end{cases} \qquad (3)$$

обе части неравенства (2) можно возвести в квадрат (это не приведет к появлению посторонних решений). После возведения в квадрат и приведения подобных членов получим:

$$(1+2a)x<a^2. \qquad (4)$$

Неравенство (4) имеет следующие решения:

если $a=-\frac{1}{2}$,

то $-\infty<x<\infty$;

если $a>-\frac{1}{2}$, то $x<\frac{a^2}{1+2a}$;

если $a<-\frac{1}{2}$, то $x>\frac{a^2}{1+2a}$.

Но не следует торопиться с выводами и считать, что тем самым получены решения неравенства (2). Из найденных решений неравенства (4) нужно отобрать те, которые удовлетворяют условиям (3). Для облегчения дальнейшей работы решим относительно x систему неравенств (3) для любого значения a.

Первое неравенство системы (3) имеет решения $x\leqslant-1$ или $x\geqslant 0$. Второе неравенство имеет решения $x<a$. Дальнейшие рассуждения зависят от того, как расположено число a относительно чисел -1 и 0.

Разобрав случаи $a\leqslant-1$, $-1<a\leqslant 0$, $a>0$, получим следующие решения системы (3):

а) если $a\leqslant-1$, то $x<a$;
б) если $-1<a\leqslant 0$, то $x\leqslant-1$;
в) если $a>0$, то $x\leqslant-1$ или $0\leqslant x<a$.

Отберем теперь из найденных выше решений неравенства (4) те, которые удовлетворяют полученным только что условиям а), б), в). Это и будут решения исходного неравенства (2).

При $a=-\frac{1}{2}$ неравенству (4) удовлетворяют все действительные числа. Условие б) заставляет нас ограничиться значениями $x\leqslant-1$. Итак, если $a=-\frac{1}{2}$, то неравенство (2) имеет решения: $x\leqslant-1$.

При $a>-\frac{1}{2}$ неравенство (4) имеет решения $x<\frac{a^2}{1+2a}$.

Рассмотрим, в соответствии с условиями б) и в), два случая:

$$-\frac{1}{2}<a\leqslant 0 \text{ и } a>0.$$

В первом случае нам нужно найти все x, удовлетворяющие системе неравенств $x\leqslant-1$ и $x<\frac{a}{1+2a}$. Такими будут значения $x\leqslant-1$.

Итак, если $-\frac{1}{2}<a\leqslant 0$, то неравенство (2) имеет решения $x\leqslant-1$.

Во втором случае, то есть при $a>0$, нам нужно взять такие x, которые удовлетворяют одной из систем неравенств:

$$\begin{cases} x<\frac{a^2}{1+2a}, \\ x\leqslant-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\frac{a^2}{1+2a}, \\ 0\leqslant x<a. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решение $x\leqslant-1$. Чтобы решить вторую систему, нужно сравнить между собой числа a и $\frac{a^2}{1+2a}$. Составим разность

$$a-\frac{a^2}{1+2a}=\frac{a(a+1)}{1+2a}. \qquad (5)$$

Ясно, что при $a>0$ эта разность положительна, следовательно, $\frac{a^2}{1+2a}<a$. Значит, вторая система имеет следующие решения: $0\leqslant x<\frac{a^2}{1+2a}$.

Итак, если $a>0$, то неравенство (2) имеет решения $x\leqslant-1$;

$$0\leqslant x<\frac{a^2}{1+2a}.$$

При $a<-\frac{1}{2}$ неравенство (4) имеет решения $x>\frac{a^2}{1+2a}$. Рассмотрим, в соответствии с условиями а) и б), два случая:

$$a\leqslant-1 \text{ и } -1<a<-\frac{1}{2}.$$

В первом случае нам нужно решить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x > \frac{a^2}{1+2a}, \\ x < a. \end{cases}$$

Но из равенства (5) следует, что при $a \leqslant -1$ справедливо неравенство $a \leqslant \frac{a^2}{1+2a}$, поэтому система не имеет решений. Таким образом, если $a \leqslant -1$, то неравенство (2) не имеет решений.

Во втором случае, то есть при $-1 < a < -\frac{1}{2}$, нам нужно решить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x > \frac{a^2}{1+2a}, \\ x \leqslant -1. \end{cases}$$

Сравним числа $\frac{a^2}{1+2a}$ и -1, для чего составим разность

$$\frac{a^2}{1+2a} - (-1) = \frac{(a+1)^2}{1+2a}.$$

При $-1 < a < -\frac{1}{2}$ эта разность отрицательна, значит, $\frac{a^2}{1+2a} < -1$.

Но тогда последняя система неравенств имеет такие решения:

$$\frac{a^2}{1+2a} < x \leqslant -1.$$

Так выглядят решения неравенства (2) в случае $-1 < a < -\frac{1}{2}$.

Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a \leqslant -1$, то решений нет;

если $-1 < a < -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{a^2}{1+2a} < x \leqslant -1;$$

если $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$, то $x \leqslant -1$;

если $a > 0$, то $x \leqslant -1$;

$$0 \leqslant x < \frac{a^2}{1+2a}.$$

3. БУДЬТЕ ВНИМАТЕЛЬНЫ

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} + ax > 1.$$

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{ax^2 - x + 1}{x} > 0. \qquad (6)$$

Разложим числитель на множители, найдя предварительно его корни:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2a}.$$

Тут надо быть внимательным, чтобы не пропустить случай отрицательного дискриминанта квадратного трехчлена.

Это будет при $a > \frac{1}{4}$. Но тогда $ax^2 - x + 1 > 0$ при всех x и, следовательно, неравенство (6) в этом случае имеет решения $x > 0$.

При $a = \frac{1}{4}$, $x_1 = x_2 = 2$, и неравенство (6) можно переписать так:

$$\frac{(x-2)^2}{4x} > 0.$$

Последнее неравенство имеет решения $0 < x < 2$, $x > 2$.

Пусть теперь $a < \frac{1}{4}$. Тогда неравенство (6) преобразуется к виду

$$\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{x} > 0 \qquad (7)$$

и мы замечаем, что следует различать два случая: $a > 0$ или $a < 0$ (случай, когда $a = 0$ рассмотрим в конце решения).

Если $0 < a < \frac{1}{4}$, то неравенство (7) принимает вид $\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} > 0$, откуда $x > x_1$; $0 < x < x_2$.

Если $a < 0$, то неравенство (7) принимает вид

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} < 0,$$

откуда (учитывая, что при $a < 0$ $x_1 < 0 < x_2$) получаем $x < x_1$; $0 < x < x_2$.

При $a=0$ исходное неравенство принимает вид

$$\frac{1}{x}>1.$$

Решив это неравенство, получим: $0<x<1$. Объединяя все полученные результаты, запишем

Ответ: если $a<0$, то $x<$

$$<\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a} \text{ или } 0<x<$$

$$<\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a};$$

если $a=0$, то $0<x<1$;

если $0<a<\frac{1}{4}$, то $x>$

$$>\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}, \text{ или}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}>x>0;$$

если $a=\frac{1}{4}$, то $0<x<2$, или

$$x>2;$$

если $a>\frac{1}{4}$, то $x>0$.

Пример 3. Решить неравенство $\log_{1/2}(x^2-2x+a)>-3$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-2x+a>0, \\ x^2-2x+a<8. \end{cases}$$

Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} (x-1)^2>1-a, \\ (x-1)^2<9-a. \end{cases}$$

Обозначим $x-1$ через y и перепишем полученную систему в виде цепочки неравенств:

$$1-a<y^2<9-a.$$

Если мы сейчас будем внимательными, то заметим, что при $a\geqslant 9$ эта цепочка не имеет решений, а при $a>1$ неравенство $y^2>1-a$ выполняется при всех y, поэтому решениями цепочки в случае $1<a<9$ будут решения неравенства $y^2<9-a$, то есть

$$-\sqrt{9-a}<y<\sqrt{9-a}.$$

Если, наконец, $a\leqslant 1$, то, решив цепочку, получим

$$-\sqrt{9-a}<y<-\sqrt{1-a};$$

$$\sqrt{1-a}<y<\sqrt{9-a}.$$

Ответ: если $a\leqslant 1$, то

$$1-\sqrt{9-a}<x<1-\sqrt{1-a},$$

или $1+\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{9-a}$;

если $1<a<9$, то

$$1-\sqrt{9-a}<x<1+\sqrt{9-a};$$

если $a\geqslant 9$, то решений нет.

Пример 4. Решить неравенство

$$\cos x-\frac{1}{\cos x}\leqslant a \quad (a>0). \qquad (8)$$

(физфак МГУ, 1966 г.)

Решение. Замечаем прежде всего, что неравенству удовлетворяют все x, при которых $\cos x>0$ (тогда $\frac{1}{\cos x}\geqslant 1\geqslant \cos x$).

Будем теперь искать решения среди тех x, для которых $\cos x<0$.

В этом случае неравенство (8) принимает вид

$$\cos^2 x-a\cos x-1\geqslant 0,$$

откуда получаем $\cos x\geqslant\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ или $\cos x\leqslant\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$. Поскольку мы рассматриваем случай $\cos x<0$, то неравенство $\cos x\geqslant\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ мы отбросим.

Итак, $\cos x\leqslant\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$. От нашего внимания не должен ускользнуть тот факт, что при некоторых значениях a число $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ может оказаться меньше -1 (ведь в этом случае последнее неравенство не будет иметь решений). Поэтому нам еще предстоит сравнить числа $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ и -1. Легко показать, что $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}>-1$ (проверьте это!).

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+$

$$+2k\pi, \text{ или } \arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+$$

$$+2k\pi\leqslant x\leqslant 2\pi-$$

$$-\arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

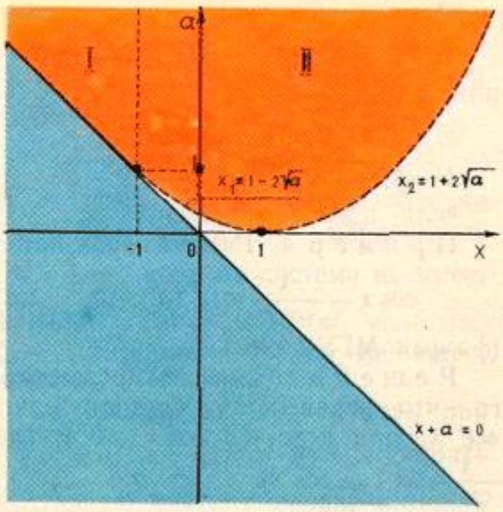

Рис. 2.

4. НЕ ЗАБЫВАЙТЕ О ГРАФИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

Пример 5. Решить неравенство

$$2\sqrt{x+a}>x+1. \qquad (9)$$

Решение. ОДЗ определяется неравенством $x+a\geqslant 0$. Соответственно на рисунке 2 синим цветом закрашена полуплоскость под прямой $x+a=0$ (область, в которой решений заведомо быть не может). Знак правой части неравенства (9) неизвестен, возводить обе части неравенства в квадрат нельзя. Рассмотрим два случая:

1. $x+1<0$ или $x<-1$ — неравенство (9) выполнено автоматически. На рисунке 2—соответствующая часть ОДЗ закрашена в оранжевый цвет и обозначена I.

2. $x+1\geqslant 0$ или $x\geqslant -1$. В этом случае можно возвести обе части неравенства (9) в квадрат. Получим $4(x+a)>x^2+2x+1$, откуда $a>\frac{1}{4}(x-1)^2$. На рисунке 2 парабола $a=\frac{1}{4}(x-1)^2$ проведена пунктиром и только при $x\geqslant -1$ (в соответствии с условием случая 2). Область, где $a>\frac{1}{4}(x-1)^2$ на рисунке 2 окрашена тоже в оранжевый цвет, но обозначена II.

Таким образом, область, окрашенная оранжевым на рисунке 2, дает множество пар $(x; a)$, удовлетворяющих неравенству (9). Чтобы получить решение неравенства (9) при определенном значении a, проведем через соответствующую точку на оси Oa прямую, параллельную оси Ox. Абсциссы точек отрезка этой прямой, заключенного в «оранжевой области», и будут решениями неравенства (9) при выбранном значении параметра. Для записи ответа нам нужно переписать уравнения линии, ограничивающих «оранжевую область» следующим образом: $x=-a$; $x=1-2\sqrt{a}$ (уравнение ветви параболы на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$); $x=1+2\sqrt{a}$ (уравнение ветви параболы при $x\geqslant 1$). Уравнения $x=1-2\sqrt{a}$ и $x=1+2\sqrt{a}$ получены из уравнения $a=\frac{1}{4}(x-1)^2$.

Ответ: если $a\leqslant 0$, то решений нет;

если $0<a\leqslant 1$, то

$1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a}$;

если $a>1$, то $-a\leqslant x<1+2\sqrt{a}$.

Заметим, что при таком методе решения x и a совершенно равноправны, и только для оформления ответа пришлось «распределять роли» между ними *).

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2a}}(a+2x-x^2)<2. \qquad (10)$$

Решение. ОДЗ неравенства определяется следующими условиями:

$$a>0,\ a\neq\frac{1}{2},\ a>x^2-2x.$$

*) Пример 5 взят из книги М. И. Башмакова и З. И. Боревича «Конкурсные задачи по математике» (издательство ЛГУ, 1968 г.). В этой книге читатель найдет ряд примеров неравенств с параметром, многие из которых решены графическим методом.

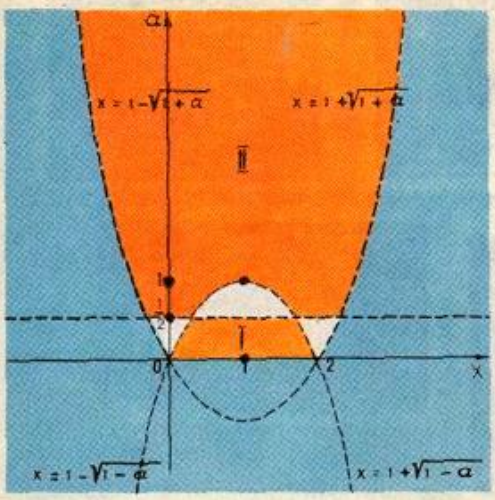

Рис. 3.

Соответственно на рисунке 3 закрашены синим цветом те области и проведены пунктиром те линии, все точки которых не принадлежат ОДЗ и поэтому не могут являться решениями неравенства (10).

Если $0<a<\frac{1}{2}$, то неравенство (10) преобразуется к виду

$$a+2x-x^2>(\sqrt{2a})^2, \text{ откуда}$$
$$a<-x^2+2x.$$

Значит, в этом случае неравенству (10) удовлетворяют те пары $(x; a)$, которые служат решениями следующей системы:

$$\begin{cases} a>0, \\ a<\frac{1}{2}, \\ a>x^2-2x, \\ a<-x^2+2x. \end{cases}$$

Эти решения заполняют зону I на рисунке 3.

Если $a>\frac{1}{2}$, то неравенство (10) преобразуется к виду

$$a+2x-x^2<(\sqrt{2a})^2,$$

откуда $a>-x^2+2x$.

Значит, в этом случае неравенству (10) удовлетворяют те пары $(x; a)$, которые служат решениями следующей системы:

$$\begin{cases} a>\frac{1}{2}, \\ a>x^2-2x, \\ a>-x^2+2x. \end{cases}$$

Эти решения заполняют зону II на рисунке 3.

Ответ: если $a\leqslant 0$ или $a=\frac{1}{2}$, то решений нет;

если $0<a<\frac{1}{2}$, то

$$1-\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1-a};$$

если $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$, то

$$1-\sqrt{1+a}<x<1+\sqrt{1-a};$$
$$1+\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1+a};$$

если $a>1$, то

$$1-\sqrt{1+a}<x<1+\sqrt{1+a}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решая неравенство с параметром, тщательно исследуйте все случаи, не торопитесь с выводами, будьте внимательны и не забывайте о графическом методе.

Упражнения

Решить относительно x следующие неравенства:

1. $2x+3(ax-8)+\frac{x}{3}<4\left(x+\frac{1}{2}\right)-5.$
2. $\frac{2ax+3}{5x-4a}<4.$
3. $\left|\frac{ax-5}{3}+x\right|<3.$
4. $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>a.$
5. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x\leqslant a \ (a>0).$
6. $\lg^2 \sin x-2a\lg\sin x-a^2+2>0.$
7. $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2}>a$ (использовать графический метод).
8. $\log_x(x-a)>2$ (использовать графический метод).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Метрические пространства»

2. Воспользуйтесь индукцией.

4б) Предположим, что нашлась такая точка P, которая лежит внутри r_2-окрестности M_2 и вне r_1-окрестности M_1, то есть $\rho(P, M_2) \leqslant r_2$ и $\rho(P, M_1) > r_1$. Тогда (мы воспользуемся аксиомой треугольника 3°)

$$r_2 + r \geqslant \rho(P, M_2) + \rho(M_2, M_1) \geqslant \rho(P, M_1) > r_1,$$

откуда $r_2 + r > r_1$ или $r_1 - r < r_2$.

5. $\varepsilon \geqslant \frac{\sqrt{2}}{10}$ для расстояния (4) и $\varepsilon \geqslant \frac{1}{5}$ для расстояния (5).

7. Воспользуйтесь тем, что расстояние между любыми двумя точками из ε-окрестности не превосходит 2ε.

8. Например, годятся такие функции ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1}; \\ n(n+1)x - n & \text{при } \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}; \\ 1 & \text{при } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

9. Да, может быть. Например, пусть наше пространство — отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 2$ с обычным расстоянием. Тогда 3-окрестность точки $x = 2$ — отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 2$, а 2-окрестность точки $x = 0$ — весь отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Утверждать, что R-окрестность точки A не может составлять часть r-окрестности точки B, можно только в том случае, если $R \geqslant 2r$.

10. Всего существует 2^n n-значных чисел из двух цифр (на первом месте может стоять 1 или 2, на втором — в каждом из этих случаев — тоже 1 или 2, и так далее). Введем на множестве этих чисел такое расстояние: $\rho(a, b)$ равно количеству разрядов, в которых a и b отличаются. Предположим, мы выбрали S слов, попарные расстояния между которыми не меньше 3. Тогда 1-окрестности этих слов не пересекаются (задача 4, a), каждая из них содержит $n+1$ число. Поэтому $S(n+1) \leqslant 2^n$.

13. ε-окрестность точки A в X с расстоянием ρ_2 содержится внутри $k\varepsilon$-окрестности точки A в X с расстоянием ρ_1. На плоскости достаточно рассмотреть точки $(0,0)$ и (x, y) и доказать соответствующие неравенства для расстояний (4), (5), (6), а именно:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant |x| + |y|; \quad |x| + |y| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\};$$

$$\max\{|x|, |y|\} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$|x| + |y| \leqslant 2\max\{|x|, |y|\};$$

$$\max\{|x|, |y|\} \leqslant |x| + |y|.$$

К статье «Идеальный газ».

1. 507 *м/сек*; 404 *м/сек*.

2. Если максимальная высота, на которую поднимается шарик при движении, равна h, то время между его последовательными ударами о поршень $t = 2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$. При ударе о поршень импульс шарика изменяется на величину $2mv$, где $v = \sqrt{2gh}$ — скорость шарика в момент его удара о поршень. Это означает, что на поршень за время t действует средняя сила $f = \frac{2mv}{t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg$. Как мы видим, эта сила не зависит от высоты, на которую подскакивает шарик. Так как шариков N, то все они действуют на поршень с силой $F = Nf = Nmg$. Поэтому давление газа под поршнем должно быть равно $p = \frac{Nmg + Mg}{S}$, то есть таким, каким было бы давление газа под поршнем, если бы шарики лежали на поршне не подпрыгивая.

3. $$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{3RT}{m}} \approx 3{,}5\cdot 10^{-7}\ \text{м/сек}.$$

К статье «Решая неравенство с параметром...»

1. Если $a = \frac{5}{9}$, то $-\infty < x < \infty$;

если $a > \frac{5}{9}$, то $x < \frac{63}{9a-5}$;

если $a < \frac{5}{9}$, то $x > \frac{63}{9a-5}$.

2. Если $a=10$, то $x<8$;

если $a>10$, то $\frac{3+16a}{2(10-a)}<x<\frac{4a}{5}$;

если $a<10$, то $x<\frac{4a}{5}$; $x>\frac{3+16a}{2(10-a)}$.

3. Если $a=-3$, то $-\infty<x<\infty$;

если $a>-3$, то $-\frac{14}{a+3}<x<\frac{4}{a+3}$;

если $a<-3$, то $\frac{14}{a+3}<x<-\frac{4}{a+3}$.

4. Если $a\leqslant 0$ или $a>1$, то $x\geqslant 1$;
если $a=1$, то $x>1$;

если $0<a<1$, то $x>\frac{a^2+1^2}{a}$.

5. Если $0<a<2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<$

$<\pi(k+1)$;

если $a=2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<\pi(k+1)$;

или $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$;

если $a>2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<\pi(k+1)$

или $k\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\Big(\pi-$

$-\arcsin\frac{2}{a}\Big)+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$.

6. Если $a\leqslant-\sqrt{2}$ или $a>\sqrt{2}$, то

$2k\pi+\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$;

если $-\sqrt{2}<a<-1$, то $2k\pi+$

$+\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$

или $2k\pi+\arcsin 10^{a+\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a+\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$;

если $a=-1$, то $2k\pi<x<(2k+1)\pi$

$\left(x\neq(-1)^k\arcsin\frac{1}{10}+k\pi\right)$;

если $-1<a<1$ или $1<a\leqslant\sqrt{2}$, то

$2k\pi<x<(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$.

7. Если $a>0$, то $0<x<a$;
если $a=0$, то решений нет;
если $a<0$, то $a\leqslant x\leqslant 0$.

8. Если $a<0$, то $1<x<\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$

если $a=0$, то решений нет;

если $0<a\leqslant\frac{1}{4}$, то $a<x<$

$<\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ или

$\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}<x<1$;

если $\frac{1}{4}<a<1$, то $a<x<1$;

если $a\geqslant 1$, то решений нет.

К задачам «Немного о пределах»

1. Объяснение этого парадокса хорошо известно. Если, скажем, скорость Ахиллеса вдвое больше скорости черепахи и первый отрезок пути Ахиллес пробежал за 1 секунду, то на второй у него уйдет лишь полсекунды, на третий — четверть секунды и так далее. Сумма (геометрической прогрессии)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$$

равна 2, подсчет очень простой:

$$b_1=1,\ q=\frac{1}{2},\ S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Через две секунды Ахиллес догонит черепаху.

2. Рассуждаем так же, как и в предыдущем примере. По формуле $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ время подъема и падения уменьшается вдвое после каждого отскока. Если первое падение заняло 1 секунду, то через 3 секунды шарик будет лежать на плите неподвижно.

3. Аналогичное рассуждение приводит нас к выводу, что через 2 секунды заяц будет виден сразу в обоих отверстиях. Единственное возможное возражение таково: а определили ли мы поведение зайца (как функцию от времени) в **каждый** момент? Первые две секунды заяц, действительно, будет прыгать, а потом?

Физики решают этот вопрос совсем просто: прыгать со скоростью, превышающей скорость света, заяц не может, указанный процесс невозможен.