ЕЩЕ РАЗ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ПАРАМЕТРАМИ

А. Я. Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

Вы уже не раз встречались с уравнениями и неравенствами, содержащими один параметр. А если параметров больше, чем один? Естественно ожидать, что большим станет и число возможных случаев, подлежащих рассмотрению. Ни один из возможных вариантов не должен быть пропущен. Как это сделать? Единого метода, годного для любых уравнений и неравенств с параметрами, нет. В этой статье мы на примерах покажем, как решаются уравнения с двумя параметрами.

Общий вид уравнения относительно x с двумя параметрами a, b таков:

$$F(x;\ a;\ b) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) при заданной функции F — это, по сути дела, бесчисленное множество уравнений, каждое из которых определяется упорядоченной парой чисел $(a;\ b)$.

Как известно, такую упорядоченную пару можно интерпретировать как точку на координатной плоскости. Это дает возможность установить взаимно однозначное соответствие между всеми уравнениями вида (1) при заданной функции F и точками плоскости.

Для этого введем систему координат aOb и условимся каждому уравнению вида (1) ставить в соответствие точку плоскости aOb с координатами $(a;\ b)$, и наоборот. Назовем эту плоскость плоскостью параметров. Такое соответствие несколько необычно (уравнению соответствует точка), но оно поможет нам в каждом конкретном случае наглядно представить себе множество допустимых значений параметров и не пропустить ни одного случая: каждой точке плоскости параметров соответствует уравнение вида (1) и должен соответствовать определенный ответ.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2a+b}{a+x} - \frac{2a-b}{a-x} = \frac{2a}{b}\ ^{*)}. \qquad (2)$$

Решение. Заметим сразу, что при $b = 0$ уравнение (2) не имеет смысла, то есть для любой пары чисел вида $(a;\ 0)$, где a — любое действительное число, решений нет (красная линия на рисунке 1).

Пусть $b \neq 0$. Найдем ОДЗ: $x \neq \pm a$, освободимся от знаменателей и приведем подобные члены. Получим

$$a\,(x^2 - 2bx + b^2 - a^2) = 0. \qquad (3)$$

Если $a = 0$, то уравнение (3) имеет своими решениями любые значения x. Из них для уравнения (2) запрещены значения $x = \pm a$, то есть $x = 0$.

Таким образом, для любой пары чисел вида $(0;\ b)$, где $b \neq 0$, уравнение (2) имеет своими решениями любые числа, кроме 0 (зеленая линия). Пусть теперь $a \neq 0$. Решив уравнение $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$, получаем $x_1 = b + a$, $x_2 = b - a$.

---

*) В виде (1) это уравнение таково: $\dfrac{2a+b}{a+x} - \dfrac{2a-b}{a-x} - \dfrac{2a}{b} = 0$.

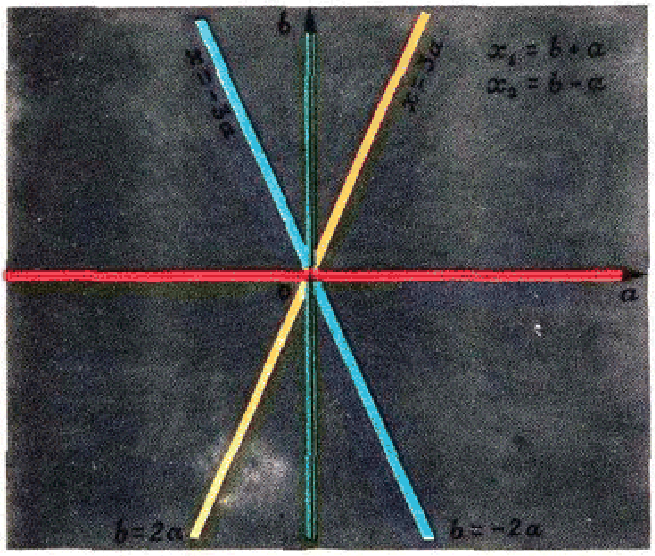

Рис. 1.

Можно ли считать, что при любых a, b, отличных от нуля, найденные значения x_1 и x_2 являются корнями уравнения (2)? Нет, ибо может оказаться так, что при некоторых значениях параметров x_1 или x_2 совпадет с запрещенными значениями $\pm a$.

Итак, осталось выяснить, когда $x_1 = \pm a$ или $x_2 = \pm a$. Если $x_1 = a$ или $x_2 = -a$, то $b = 0$, но мы рассматриваем случай $b \neq 0$. *Значит*, $x_1 \neq a$, $x_2 \neq -a$.

Пусть $x_1 = -a$, то есть $b + a = -a$, откуда $b = -2a$. Но тогда $x_2 = -3a$. Таким образом, если параметры a и b таковы, что $b = -2a$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x = -3a$ (голубая линия на рисунке 1). Пусть $x_2 = a$, то есть $b - a = a$. Это возможно при $b = 2a$.
Но тогда $x_1 = 3a$. Таким образом, если параметры a и b таковы, что $b = 2a$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x = 3a$ (желтая линия).

Подводя итоги, получим следующий ответ:
если $b = 0$, a — любое действительное число, то решений нет;
если $b \neq 0$, $a = 0$, то x — любое действительное число, отличное от нуля;
если $b = -2a$, $b \neq 0$, то $x = -3a$;
если $b = 2a$, $b \neq 0$, то $x = 3a$;
если a, $b \neq 0$, $b \neq \pm 2a$, то $x_1 = b + a$, $x_2 = b - a$.

Пример 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} = a + b. \tag{4}$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$x \leqslant a^2, \quad x \leqslant b^2, \quad \text{или } x \leqslant \min\{a^2;\ b^2\}.$$

Левая часть уравнения (4) неотрицательна, а потому при $a + b < 0$ данное уравнение не может иметь решений. На рисунке 2 это отмечено тем, что полуплоскость под прямой $b = -a$ окрашена в розовый цвет.

Рассмотрим теперь случай $a + b \geqslant 0$. После очевидных преобразований получим $\sqrt{(a^2 - x)(b^2 - x)} = ab + x$. Уточним ОДЗ: $x \geqslant -ab$. Продолжая преобразования, получим

$$x(a + b)^2 = 0 \tag{5}$$

Рассмотрим два случая:

I случай: $a + b > 0$. Тогда $x = 0$. При этом условия $x \leqslant a^2$ и $x \leqslant b^2$ выполняются автоматически, чего нельзя сказать про условие $x \geqslant -ab$. Если $ab > 0$, то это условие, очевидно, выполнено. Если же $ab < 0$, то $-ab > 0$ и $x = 0 < -ab$. Поэтому на рисунке 2 в зонах *II* и *III* (где $a + b > 0$, но $ab < 0$) решений нет. Таким образом, $x = 0$ является корнем

*) Этот пример взят из книги Н. П. Антонова и др. «Сборник задач по элементарной математике» (М., «Наука», 1969), где он решен неверно.

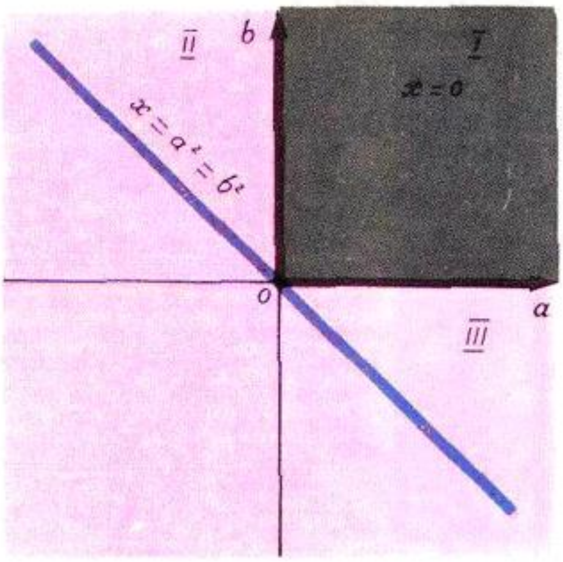

Рис. 2.

уравнения (4), только если $a+b>0$ и $ab\geqslant 0$, то есть для точек первой четверти плоскости параметров, включая и точки ее границы (зона I на рисунке 2).

II случай: $a+b=0$. В этом случае уравнение (5) обращается в тождество $x\cdot 0=0$, но это вовсе не означает, что любое действительное число является корнем исходного уравнения (4) (объясните сами, почему так). При $a+b=0$ последовательно находим $b=-a$, $b^2=a^2$, и уравнение (4) принимает вид $2\sqrt{a^2-x}=0$, откуда $x=a^2=b^2$, и все условия при этом, очевидно, выполнены. На рисунке 2 этот ответ указан около синей прямой $b=-a$.

Объединяя все полученные результаты, получаем ответ:
если $a+b>0$ и $ab\geqslant 0$, то $x=0$;
если $a+b=0$, то $x=a^2$;
если $a+b<0$ или $a+b>0$ и $ab<0$, то решений нет.

Пример 3. Решить систему уравнений
$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a,\quad x+y=b. \tag{6}$$

Решение. Отметим ОДЗ: $x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ (здесь и далее $k, l, m, n=0;\ \pm 1;\ldots$). Преобразуем первое уравнение системы к виду $\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=a$ и далее с учетом того, что $x+y=b$, получим
$$a\cos x\cos y=\sin b. \tag{7}$$

I случай: $a=0$. Он, естественно, распадается на два варианта: I, а) $a=0$, $\sin b=0$; I, б) $a=0$, $\sin b\neq 0$.

Если $\sin b=0$, то есть $b=m\pi$, то уравнению (7) удовлетворяют любые пары $(x;\, y)$, а системе (6) — любые пары $(x;\, y)$, удовлетворяющие следующим условиям:
$$x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi;\quad y\neq\frac{\pi}{2}+n\pi;\quad x+y=b.$$

Если $\sin b\neq 0$, то есть $b\neq m\pi$, то уравнение (7), а вместе с ним и система (6) не имеют решений.

II случай: $a\neq 0$. Тогда уравнение (7) преобразуется к виду

$\cos x\cos y=\frac{\sin b}{a}$ и, далее,
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\frac{2\sin b}{a}. \tag{8}$$

Если снова учесть, что $x+y=b$, то уравнение (8) можно переписать так:
$$\cos(x-y)=\frac{2\sin b}{a}-\cos b. \tag{9}$$

Дальнейшие рассуждения зависят от оценки правой части уравнения (9): если $\left|\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right|>1$, то уравнение (9), а с ним и система (6) не имеют решений; если же $\left|\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right|\leqslant 1$, то

$$x-y=\pm\arccos\left(\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right)+2k\pi.$$

Решив последнее уравнение в системе с уравнением $x+y=b$, получаем

$$\begin{cases} x=\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right)+k\pi, \\ y=\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right)-k\pi. \end{cases}$$

Нам остается лишь выяснить, не может ли случиться так, что при некоторых значениях параметров найденные значения x, y совпадут с запрещенными значениями $\frac{\pi}{2}+n\pi$. Нетрудно видеть, что это произойдет в том случае, когда $b\pm\arccos\left(\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right)=\pi+2l\pi$. Последнее равенство перепишем так: $\pm\arccos\left(\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right)=\pi-b+2l\pi$, и возьмем от обеих частей косинус. Получим

$$\frac{2\sin b}{a}-\cos b=-\cos b,\quad \sin b=0,\quad b=m\pi.$$

Итак, если $b=m\pi$ и $a\neq 0$, то система (6) не будет иметь решений. Объединяя все полученные результаты, запишем ответ:

если $a=0$, $b=m\pi$, то решением системы (6) служит любая пара (x, y) такая, что $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$, $y\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$, $x+y=b$;

если $a=0$, $b\neq m\pi$, или $a\neq 0$, $b=m\pi$, то решений нет;

если $a\neq 0$, $b\neq m\pi$ и $\left|\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right|\leqslant 1$, то

$$\begin{cases} x=\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right)+k\pi, \\ y=\frac{b}{2}\mp\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right)-k\pi; \end{cases}$$

если $a\neq 0$, $b\neq m\pi$, но $\left|\frac{2\sin b}{a}-\cos b\right|>1$, то решений нет.

Мы ограничились рассмотрением примеров только с двумя параметрами. Дальнейшее увеличение числа параметров, не давая ничего принципиально нового, приводит лишь к увеличению технических трудностей.

Упражнения

1. Решить следующие уравнения:

а) $a^2-\frac{a^2-b^2}{2x-x^2}=\frac{b^2(x+2)}{x-2}$;

б) $\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=\frac{a-b}{a+b-2x}$;

в) $\frac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx}=0$.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a^{\lg x}=b^{\lg y}, \\ (bx)^{\lg b}=(ay)^{\lg a}. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задаче «Помогите художнику!»

Ответ. 40 способов. С использованием черного цвета 16 способов.

Действительно, мы можем нарисовать линию белого цвета на черном фоне, или линию черного цвета на белом фоне и в каждом из этих способов подкрасить весь рисунок (и линию, и фон) любой из 8 комбинаций оставшихся цветов (3 основных цвета, каждый либо входит, либо нет, $2^3=8$).

В остальных способах линия и фон должны отличаться ровно на один основной цвет (чтобы не было двух линий).

Получаем 24 способа. Это можно доказать, например, так. Выберем тот основной цвет X, на который отличаются линия и фон; нарисуем белую линию на фоне X или линию цвета X на белом фоне (поскольку основных цветов, кроме черного, три, такой рисунок можно сделать 6 способами). Существует четыре цвета, не содержащих цвета X, а именно: белый, два других основных цвета и один смешанный. Любым из них можно покрыть весь рисунок. Это дает еще $3\cdot2\cdot4=24$ способа. А всего 40 способов.

Проверьте, что на обложке переходы цветов от центра концентрических кругов к краю происходят ровно на одном основном цвете.

К статье «Еще раз об уравнениях с параметрами»

1. а) Если $a=b=0$, то x — любое действительное число, отличное от 0 и 2;

если $a=\pm b\neq0$, то решений нет;

если $a=\pm3b$, то $x=\dfrac{1}{2}$;

если $a\neq\pm b$, $\pm3b$, то $x_1=\dfrac{a+b}{a-b}$, $x_2=\dfrac{a-b}{a+b}$.

б) Если $a\leqslant b$, то решений нет;

если $a>b$, то $x_1=a$, $x_2=b$.

в) Если $b=0$, то при любых a решений нет;

если $a=0$, $b\neq0$, то x — любое число, кроме $\dfrac{n\pi}{b}$ $(n=0;\ \pm1;\ \ldots)$;

если $a\neq0$, $b\neq0$, то $x=\dfrac{k\pi}{a}$, где k — любое целое число, кроме целых чисел, имеющих вид $n\dfrac{a}{b}$ $(n=0;\ \pm1;\ \ldots)$.

2. Если $a=b=1$, то решением служит любая пара (x, y), где $x>0$, $y>0$;

если $0<a=b\neq1$, то решением служит любая пара (x, y), где $x=y>0$;

если $ab=1$, $a\neq1$, $a>0$, то решением служит любая пара (x, y), где $x>0$, $y=\dfrac{1}{x}$;

если $a\leqslant0$, b — любое число или $b\leqslant0$, a — любое, то решений нет,

при остальных значениях (a, b) имеем

$$x=\frac{1}{b},\qquad y=\frac{1}{a}.$$

К статье «Как проверить ответ»

1. Прежде всего проверим размерность предложенных ответов. Видно, что первый ответ имеет неправильную размерность. Для того чтобы выбрать между вторым и третьим ответами, разберем предельный случай $m=0$. Если $m=0$, то очевидно, что лодка должна оставаться на месте. Это не следует из третьего ответа, поэтому правилен второй ответ.

2. Из приведенных формул видно, что все они имеют правильную размерность. Ясно также, что в задаче отсутствует симметрия. Поэтому рассмотрим случай $h=0$ и $h=R$. Если $h=0$, то минимальная сила равна 0. Подставив это значение в исследуемые формулы, для третьего случая получаем $F\geqslant2mg\neq0$. Если $h=R$, то никакая сколь угодно большая сила, приложенная к центру, не поднимет шар (рис. 1). Этому условию удовлет-

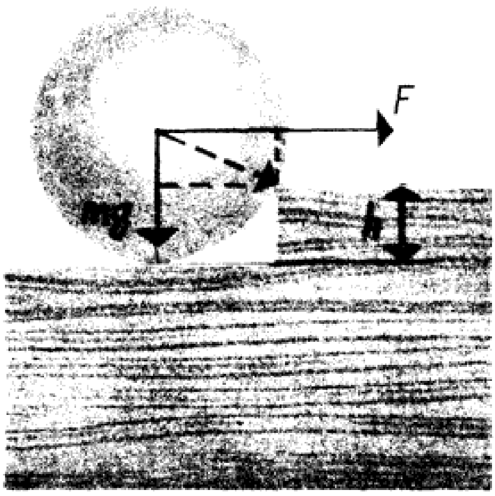

Рис. 1.