Внимание: в уравнении — параметр!

А. Я. Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

Вместо предисловия

Вспоминается такой случай. Ученику было предложено решить довольно безобидное на первый взгляд уравнение

$$(a^2-5a+6)x = a^2-4. \qquad (1)$$

Недолго думая, ученик проделал следующие выкладки:

$$x = \frac{a^2-4}{a^2-5a+6} = \frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-3)};$$

$$x = \frac{a+2}{a-3}. \qquad (2)$$

Он явно не учел, что в заданном уравнении содержится параметр a и что уравнение с параметром — это, по существу, множество уравнений. Вот и наше уравнение при $a = 0$ принимает вид $6x = -4$, при $a = 1$ принимает вид $2x = -3$ и т. д. Иными словами, дав параметру конкретное числовое значение, мы из множества уравнений выделяем одно — соответствующее выбранному значению параметра. Но тогда и решения зависят от параметра.

Мы уже говорили, что при $a = 0$ уравнение (1) принимает вид $6x = -4$. Корнем этого уравнения является значение $x = -\frac{2}{3}$. Но и по формуле (2) при $a = 0$ получается $x = -\frac{2}{3}$. При $a = 1$ уравнение (1) принимает вид $2x = -3$, откуда $x = -\frac{3}{2}$. Но и по формуле (2) при $a = 1$ получается $x = -\frac{3}{2}$.

Если бы такое положение имело место *для любого* действительного значения a, то можно было бы утверждать, что формулой (2) определяется решение уравнения (1). Но это не так.

Положим $a = 2$. Уравнение (1) принимает вид $0\cdot x = 0$. Корнем этого уравнения служит любое действительное число, тогда как формула (2) дает в этом случае $x = -4$.

При $a = 3$ уравнение (1) принимает вид $0\cdot x = 5$. Это уравнение не имеет решений. Впрочем, и выражение $\frac{a+2}{a-3}$ не имеет смысла при $a = 3$.

Таким образом, *утверждать, что* $x = \frac{a+2}{a-3}$ *при любом значении параметра, нельзя.*

На самом деле рассуждать надо было следующим образом. Прежде чем делить обе части уравнения (1) на коэффициент при неизвестном, посмотрим, не может ли случиться так, что при некоторых значениях параметра этот коэффициент обратится в нуль. Замечаем, что трехчлен a^2-5a+6 обращается в нуль при $a=2$, $a=3$. Значит, нужно отдельно рассмотреть эти случаи, что мы уже сделали. Если же $a\neq 2$, $a\neq 3$, то можно обе части уравнения разделить на коэффициент при x, получим $x = \frac{a+2}{a-3}$. Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a = 2$, то x — любое действительное число;

если $a = 3$, то решений нет;

если $a\neq 2$, $a\neq 3$, то $x = \frac{a+2}{a-3}$.

Этот простой пример показывает, что при решении уравнений с па-

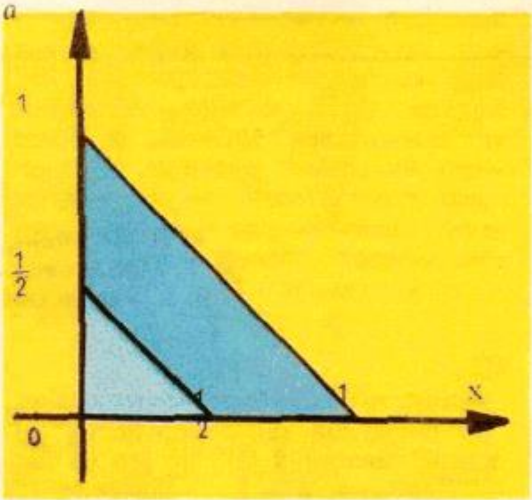

Рис. 1.

раметрами особое значение имеет рассмотрение всех возможных случаев. При этом заранее трудно предсказать, какие случаи выявятся в процессе решения. Это, с одной стороны, затрудняет решение, но, с другой стороны, делает работу более интересной, придавая ей исследовательский характер.

Немного теории

Общий вид уравнения с одним параметром таков:

$$F(x,a) = 0. \qquad (3)$$

При различных a уравнение (3) может иметь различные множества корней, и наша задача состоит в том, чтобы изучить все случаи, выяснить, что будет при любом значении параметра. При решении уравнений с параметром обычно приходится рассматривать много различных вариантов. Своевременное обнаружение хотя бы части невозможных вариантов имеет большое значение, так как освобождает нас от лишней работы. Поэтому при решении уравнения (3) целесообразно под ОДЗ понимать область допустимых значений неизвестного и параметра, то есть множество всех пар чисел (x, a), при которых определена (имеет смысл) функция двух переменных $F(x, a)$. Отсюда естественная геометрическая иллюстрация ОДЗ в виде некоторой области плоскости xOa.

Например, ОДЗ уравнения

$$\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)} \qquad (4)$$

определяется системой неравенств

$$x\geqslant 0,\ a\geqslant 0,\ x+a\leqslant 1.$$

Этой системе удовлетворяют координаты всех точек треугольника (включая и его границу), окрашенного на рисунке 1 в голубой и синий цвета *). Из этих рассуждений, кстати, сразу следует, что при $a<0$ уравнение (4) не имеет решений.

Решим уравнение (4). После возведения обеих его частей в квадрат (что является в данном случае равносильным преобразованием в силу неотрицательности обеих частей уравнения (4)) получим уравнение

$$2\sqrt{ax}=1-2(x+a). \qquad (5)$$

Выше мы уже говорили о том, что отбрасывание хотя бы части невозможных вариантов освобождает нас от лишней работы. Замечаем, что левая часть уравнения (5) неотрицательна при всех допустимых a, x, значит, там, где правая часть этого уравнения отрицательна, искать решения бесполезно. Ясно, что искать решения следует в той части ОДЗ, где они могут быть, произведя для этого соответствующее сужение ОДЗ:

$$1-2(x+a)\geqslant 0,\ \text{откуда}\quad x+a\leqslant\frac{1}{2}.$$

На рисунке 1 закрашена синим цветом та часть ОДЗ, где решений быть не может.

Возведя в квадрат обе части уравнения (5) **) и приведя подобные члены, получим уравнение

$$x^2+(a-1)x+a^2-a+\frac{1}{4}=0,$$

---

*) Подробнее о геометрическом решении систем неравенств с двумя неизвестными см. «Квант» № 4 за 1970 год.

**) В новой ОДЗ обе части уравнения (5) неотрицательны. Возведение в квадрат в таком случае не приведет к появлению посторонних корней.

откуда

$$x_{1,2}=\frac{1-a\pm\sqrt{2a-3a^2}}{2},$$

Оба найденных корня при всех допустимых значениях параметра a, (то есть при всех a, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$, — см. рисунок 1) являются действительными числами. В самом деле, дискриминант $D=2a-3a^2\geqslant0$ при $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$; значит, тем более $D\geqslant0$ при $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. Теперь нам нужно выяснить, удовлетворяют ли найденные значения условиям $x\geqslant0$, $x+a\leqslant\frac{1}{2}$.

Проверим сначала выполнение условия $x+a\leqslant\frac{1}{2}$. Имеем

$$x_1+a=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a=$$
$$=\frac{1+a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Решив неравенство

$$\frac{1+a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}\leqslant\frac{1}{2},$$

получим $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. Значит, $x_1+a\leqslant\frac{1}{2}$ при всех допустимых значениях параметра a.

Далее,

$$x_2+a=\frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a=$$
$$=\frac{1+a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Неравенство

$$\frac{1+a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}\leqslant\frac{1}{2}$$

выполняется только при $a=0$. Но при $a=0$ имеем $D=0$ и $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

Доказательство неотрицательности обоих найденных корней предоставляем провести читателю.

Ответ: если $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,

то $x=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$;

если $a<0$ или $a>\frac{1}{2}$, то решений нет.

Заметим, что при решении рассмотренного уравнения сужение ОДЗ оказалось весьма полезным. Естественно возникает вопрос: когда надо проводить такие уточнения?

Если мы выполняем преобразование, в результате которого получается уравнение, равносильное предыдущему, то в сужении ОДЗ надобности, конечно, нет. В противном случае оно полезно. Такая ситуация возникает, например, при возведении в квадрат (или в любую четную степень) обеих частей того или иного уравнения,с чем мы и встретились в рассмотренном примере.

Несколько примеров

Пример 1*). Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}.$$

Решение. ОДЗ определяется условиями $x>0$, $a+x\geqslant0$, $a\neq0$ (отсюда, кстати, сразу следует, что при $a=0$ уравнение не имеет решений). Преобразуем уравнение к виду

$$(a+x)^{3/2}=ax^{3/2}.$$

Сужаем ОДЗ: из неотрицательности левой части последнего уравнения и условий $x>0$, $a\neq0$ следует, что $a>0$.

Далее получаем: $a+x=a^{2/3}x$, откуда $x\,(a^{2/3}-1)=a$.
При $a=1$ решений, очевидно, нет. Если $a\neq1$, то

$$x=\frac{a}{a^{2/3}-1}.$$

Выясним, при всех ли рассматрива-

*) № 206 из «Сборника задач по элементарной математике». Авторы — Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин. В указанном задачнике пример решен неверно.

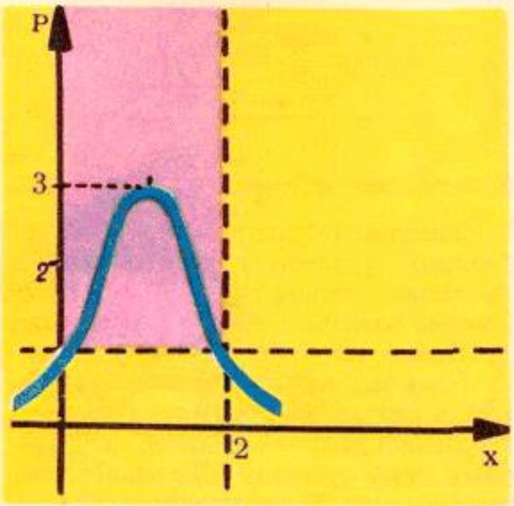

Рис. 2.

емых значениях параметра a ($a>0$, $a\neq 1$) выполняется условие $x>0$ (из которого с очевидностью следует и выполнение второго условия $a+x\geqslant 0$). Неравенство $\frac{a}{a^{2/3}-1}>0$ выполняется только при $a>1$ (с учетом того, что $a>0$). Таким образом, не при всех допустимых значениях a найденный корень оказался пригодным.

Ответ: если $a>1$, то $x=\frac{a}{a^{2/3}-1}$; если $a\leqslant 1$, то решений нет.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_9 x+\log_9\frac{2-x}{2}=\log_9\log_9 p.$$

Решение. ОДЗ определяется неравенствами $0<x<2$, $p>1$ (на рисунке 2 эта область окрашена в малиновый цвет). Решая уравнение, последовательно получим

$$\frac{x(2-x)}{2}=\log_9 p, \qquad (6)$$

$$x^2-2x+2\log_9 p=0,$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 p}.$$

Условие $1-2\log_9 p\geqslant 0$ выполняется при $p\leqslant 3$, что с учетом ОДЗ дает $1<p\leqslant 3$. При таких p корни будут действительными числами. При $p>1$ выполняется неравенство $\log_9 p>0$, а потому $1-2\log_9 p<1$. Отсюда следует, что при $1<p\leqslant 3$ имеют место неравенства $0<x_{1,2}<2$.

Ответ: если $1<p\leqslant 3$, то $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 p}$; при остальных p решений нет.

Замечание. Из уравнения (6) получаем $p=9^{\frac{x(2-x)}{2}}$. График этой функции, построенный на рисунке 2, наглядно показывает, что условие $0<x<2$ выполняется при $1<p\leqslant 3$.

Пример. 3. Решить уравнение

$$\frac{a+\sin x}{a\cos x+1}=\frac{a+\cos x}{a\sin x+1}.$$

Решение. Рассмотрим сначала случай $a=0$. Заданное уравнение принимает вид $\sin x=\cos x$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(n=0,\pm 1,\ldots)$.

Пусть теперь $a\neq 0$. Тогда ОДЗ определяется условиями

$$\cos x\neq-\frac{1}{a};\quad \sin x\neq-\frac{1}{a}.$$

Преобразуем заданное уравнение к виду

$(\sin x-\cos x)[a^2+a(\sin x+\cos x)+1]=0.$

Последнее уравнение сводится к следующей совокупности уравнений:

$$a^2+a(\sin x+\cos x)+1=0, \qquad (7)$$
$$\sin x-\cos x=0.$$

Решая первое уравнение совокупности (7), получаем:

$$a\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-a^2-1$$

и далее

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{a^2+1}{a\sqrt{2}}.$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как $\left|-\frac{a^2+1}{a\sqrt{2}}\right|>1$ при любом $a\neq 0$. В самом деле, предположим, что $\frac{a^2+1}{|a|\sqrt{2}}\leqslant 1$; преобразуя это неравенство, получаем

$$a^2+1\leqslant|a|\sqrt{2},\ (a^2+1)^2\leqslant 2a^2,$$
$$a^4+1\leqslant 0.$$

Последнее неравенство неверно.

Решениями второго уравнения совокупности (7) являются значения $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Остается проверить, при всех ли значениях $a\neq 0$ найденные значения x являются допустимыми.

Если $k=2n$, то $\sin x=\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и должно выполняться условие $\frac{\sqrt{2}}{2}\neq-\frac{1}{a}$, то есть $a\neq-\sqrt{2}$.

Если $k=2n+1$, то $\sin x=\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из условия $-\frac{\sqrt{2}}{2}\neq-\frac{1}{a}$

получаем: $a\neq\sqrt{2}$.

Объединяя все результаты, запишем

Ответ: если $a\neq\pm\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$;

если $a=\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$;

если $a=-\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi(2n+1)$ $(k,n=0,\pm 1,\pm 2;\ \ldots)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log^2_{\sqrt{2}}\cos x-2a\log_{\sqrt{2}}\cos x=a^2-8. \quad (8)$$

Решение. Положив $y=\log_{\sqrt{2}}\cos x$, преобразуем заданное уравнение в квадратное уравнение

$y^2-2ay-(a^2-8)=0$,

откуда $y_{1,2}=a\pm\sqrt{2(a^2-4)}$.

Теперь нужно решить совокупность логарифмических уравнений

$$\log_{\sqrt{2}}\cos x=a+\sqrt{2(a^2-4)}. \quad (9)$$

$$\log_{\sqrt{2}}\cos x=a-\sqrt{2(a^2-4)}. \quad (10)$$

Замечаем, что при $a^2-4<0$ правые части уравнений (9) и (10) не имеют смысла. Это значит, что, при $-2<a<2$, оба уравнения не имеют решений. Рассмотрим случай $a^2-4\geqslant 0$, что возможно при $a\geqslant 2$ или при $a\leqslant-2$.

Пусть для начала $a\geqslant 2$. Так как $\cos x\leqslant 1$, а $\sqrt{2}>1$, то $\log_{\sqrt{2}}\cos x\leqslant 0$. Значит, уравнения (9) и (10) будут иметь решения только при таких значениях параметра a, при которых правые части уравнений неположительны. Нетрудно видеть, что при $a\geqslant 2$ правая часть уравнения (9) положительна, следовательно, уравнение (9) не имеет решений.

Выясним, при каких значениях параметра a будет неположительной правая часть уравнения (10). Решив неравенство $a-\sqrt{2(a^2-4)}\leqslant 0$ (с учетом условия $a\geqslant 2$), получаем $a\geqslant\sqrt{8}$. Таким образом, если $2\leqslant a<\sqrt{8}$, то уравнение (10) не имеет решений (а поскольку не имеет решений и уравнение (9), то заключаем отсюда, что и уравнение (8) в указанном случае не имеет решений). Если $a\geqslant\sqrt{8}$, то из уравнения (10) получаем

$$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a-\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь случай $a\leqslant-2$. При этих значениях параметра правая часть уравнения (10) отрицательна, то есть это уравнение имеет решения (выше они уже записаны формулой (11)). Выясним, при каких значениях параметра a будет неположительной правая часть уравнения (9). Решив неравенство $a+\sqrt{2(a^2-4)}\leqslant 0$ (с учетом условия $a\leqslant-2$), получаем $a\geqslant-\sqrt{8}$. Таким образом, если $a<-\sqrt{8}$, то уравнение (9) не имеет решений, если же $-\sqrt{8}\leqslant a\leqslant-2$, то уравнение (9) имеет решения, а именно:

$$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a+\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n.$$

Объединяя все полученные результаты, запишем

Ответ: если $-2<a<\sqrt{8}$, то решений нет;

если $a\geqslant\sqrt{8}$ или $a<-\sqrt{8}$, то

$$x=\pm\arccos(\sqrt{2})^{a-\sqrt{2a^2-8}}+2\pi n;$$

если $-\sqrt{8}\leqslant a\leqslant-2$, то

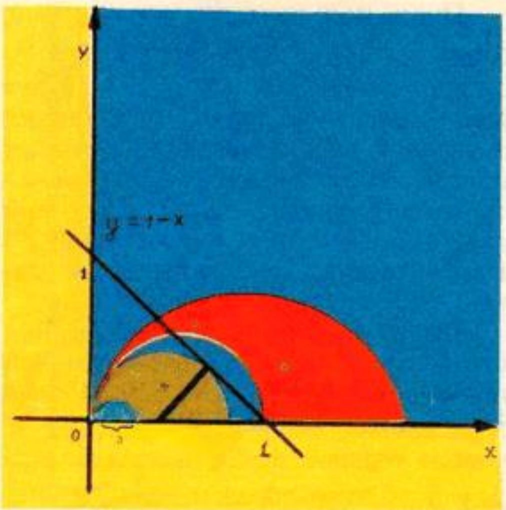

Рис. 3.

$$x = \pm \arccos (\sqrt{2})^{a \pm \sqrt{2a^2 - 8}} + 2\pi n.$$

Геометрия помогает алгебре

При решении уравнений с параметром могут оказаться весьма полезными различные геометрические соображения. Рассмотрим для примера уравнение

$$\sqrt{x(2a-x)} = 1-x \quad \text{при } a>0.$$

Каждое решение уравнения можно интерпретировать как абсциссу точки пересечения прямой $y=1-x$ с полуокружностью

$$y=\sqrt{x(2a-x)}, \text{ или}$$

$$(x-a)^2+y^2=a^2; \ y\geqslant 0$$

радиуса a, с центром в точке $(a, 0)$ (рис. 3). Положение полуокружности и ее радиус меняются при изменении параметра a. На рисунке 3 наглядно видно, что при одних значениях a полуокружность не пересекает прямую $y=1-x$ (полуокружности, лежащие под прямой), при других значениях a полуокружность пересекает прямую в двух точках (полуокружности, лежащие в средней голубой зоне), при третьих значениях a полуокружность пересекает прямую в одной точке (полуокружности, лежащие в красной зоне или выше), а при некотором значении a полуокружность касается прямой (полуокружность, разделяющая голубую и коричневую зоны).

Рассмотрим случай, когда полуокружность касается прямой $y=1-x$. Из геометрических соображений заключаем, что расстояние центра этой полуокружности от точки пересечения прямой $y=1-x$ с осью абсцисс равно $a\sqrt{2}$. Отсюда $a+a\sqrt{2}=1$, то есть случай касания имеет место при $a=\sqrt{2}-1$. Значит, при $a<\sqrt{2}-1$ уравнение не имеет решений (голубая зона), а при $a=\sqrt{2}-1$ имеет единственное решение, которое тоже находится из геометрических соображений: $x=a+\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 3),

откуда получаем $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Полуокружность, проходящая на рисунке 3 через точку $(1, 0)$, соответствует значению параметра $a=\frac{1}{2}$. Значит, при $\sqrt{2}-1<a\leqslant\frac{1}{2}$ уравнение имеет два решения:

$$x_1=\frac{a+1-\sqrt{a^2+2a-1}}{2},$$

$$x_2=\frac{a+1+\sqrt{a^2+2a-1}}{2}$$

(корни найдены с помощью обычного алгебраического решения заданного уравнения). Наконец, если $a\geqslant\frac{1}{2}$, то уравнение имеет единственное решение $x=x_1$ (поскольку $x_1<x_2$).

Ответ: если $a < \sqrt{2} - 1$, то решений нет;

если $a = \sqrt{2} - 1$, то $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $\sqrt{2} - 1 < a \leqslant \frac{1}{2}$,

то $x_{1,2} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}$.

если

$a > \frac{1}{2}$, то $x = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 1}}{2}$.

Попробуйте сами решить предложенное уравнение алгебраически с соответствующими исследованиями, и вы убедитесь, что геометрические рассуждения в данном случае и нагляднее, и красивее.

ЗАДАЧИ

Мы рассмотрели ряд примеров решения уравнений с одним параметром. Одним из вас они понравились больше, другим — меньше, но несомненно одно: если вы тщательно разобрали эти примеры с карандашом в руках (как советовала редакционная коллегия нашего журнала в № 1), то вы уже получили определенную пользу. Хотите в этом убедиться? Решите сами следующие уравнения с параметром a:

1. $a^2 - \frac{a^2 - 1}{2x - x^2} = \frac{x + 2}{x - 2}$.

2. $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$.

3. $\sqrt{x - 2a} - \sqrt{x - a} = 2$.

4. $x + \sqrt{x^2 - x} = a$.

5. $\sin(a + x) + \sin x = \cos\frac{a}{2}$.

6. $\sin^2 x + 4\sin x + a = 0$.

7. $\sin x + 2\cos ax = 3$.

8. $\log_{\sqrt{x}} a \log_{a^2} \frac{a^2 - 4}{2a - x} = 1$.

9. $\frac{\log_x (2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a \sqrt{x}}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{a^2 - 1} 2}$.

10. $\log^2_{\frac{1}{2}} (2\sin x) + a \log_{\frac{1}{2}} \sin x + 3 = 0$. $\frac{6}{2}$ с.а с 30 x 12

Начало на стр. 9

Прошу Вас сообщить мне, какие действия с роялем и лампой должен я совершить, чтобы установить и поддержать тишину в доме.

Искренне Ваш.........

Письмо 2 (ответное).

Дорогой друг!

Я был крайне встревожен Вашим письмом, но быстро успокоился, поняв, что Ваше тяжелое положение можно исправить. Если в ту минуту, когда Вы будете читать это письмо, Вы не будете играть на рояле, а лампа будет гореть, в то время как овчарка и такса будут лаять, то поступите следую-

Задание. Восстановите содержание второго листка письма, если известно, что там для любой ситуации, возможной в минуту чтения письма, давались инструкции по установлению и поддержанию тишины в доме.

ПОПРАВКИ:

в № 6 на стр. 39 перевернут рисунок 1;

на стр. 59 (ответ к примеру 4) деление не доведено до конца. Ответ должен выглядеть так: 1022634; при делении в первом столбце этого же примера необходимо сдвинуть все остатки вправо.

В № 5 стр. 62 в варианте 4 задача 2 должна быть еще одна серия

$x = \pi n \pm \arcsin\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$

$$=a_1b_1\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}+b_1d\sum_{k=1}^{n}(k-1)\times$$

$$\times q^{k-1}=a_1b_1\frac{q^n-1}{q-1}+$$

$$+b_1d\,\frac{(n-1)q^{n-1}-nq^n+q}{(q-1)^2}.$$

(заметим, что $\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}q^k$).

3. а) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

б) $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

в) $\dfrac{\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\dfrac{(n+1)\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$;

$x\neq 2\pi k$;

г) $\dfrac{(n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$,

$x\neq 2\pi k$;

К статье «Шарик вместо линзы»

Если R_1 и R_2 — расстояния от экрана с отверстием до источника света и до точки наблюдения, r — радиус отверстия, а m — число темных колец на дифракционной картине, считая и темное пятно в центре, то длина волны λ может быть вычислена по формуле

$$\lambda=\frac{r^2}{m}\,\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}.$$

При выводе формулы пренебрегают квадратами малых величин $m\lambda$ и $r^2/2R_1$.

К статье «Внимание: в уравнении — параметр!»

В ответах указаны только те значения параметра, при которых уравнения имеют решения. Подразумевается, что при остальных значениях параметра уравнения не имеют решений. Во всех ответах, где встречаются n, k, подразумевается, что $n, k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

1. Если $a=\pm3$, то $x=\frac{1}{2}$; если $a\neq\pm1$, $a\neq\pm3$, то $x_1=\frac{a+1}{a-1}$; $x_2=\frac{a-1}{a+1}$.

2. Если $a=0$, то $x=0$; если $a\geqslant1$, то $x=\frac{(a-1)^2}{4}$.

3. Если $a\leqslant-4$, то $x=\frac{1}{16}(a^2+24a+16)$.

4. Если

$0\leqslant a<\frac{1}{2}$ или $a\geqslant1$, то $x=\frac{a^2}{2a-1}$.

5. Если $a\neq(2k+1)\pi$, то $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n-\frac{a}{2}$;
если $a=(2k+1)\pi$, то x — любое действительное число.

6. Если $-5\leqslant a\leqslant3$,

то $x=(-1)^k\arcsin(\sqrt{4-a}-2)+\pi k$.

7. Если

$a=\frac{4n}{4k+1}$, то $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

8. Если $0<a<1$, $1<a<2$, $a=3$, то $x=a+2$; если $a>3$ или $2<a<3$, то $x_{1,2}=a\pm2$.

9. Если $1<a<\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<a<2$, $a>2$, то $x=a\pm1$; если $a=2$, то $x=3$.

10. Если $a<1-\sqrt{13}$, то

$$x=(-1)^k\times$$

$$\times\arcsin\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-a\pm\sqrt{a^2-2a-12}}{2}}\right]+\pi k;$$

если $a>8$, то

$$x=(-1)^k\times$$

$$\times\arcsin\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-a+\sqrt{a^2-2a-12}}{2}}\right]+\pi k.$$