Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

11 класс, 2011 год
1 вариант

1. Для нумерации всех парковочных мест на стоянке (подряд от первого до последнего) рядом с каждым местом был установлен его номер, составленный из табличек, на каждой из которых написано по одной цифре. В общей сложности было использовано 2148 табличек. Сколько мест на парковке? Каких цифр было использовано больше всего, а каких — меньше всего?

2. Решите уравнение

$$\sin(\sin x) = \sin(\cos x + 1).$$

3. Через одну вершину трапеции проведены две прямые. Одна из них проходит также через противоположную вершину трапеции и делит отрезок, соединяющий середины ее оснований, в отношении $3:1$. В каком отношении делит этот отрезок другая прямая, делящая площадь трапеции пополам?

4. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{9-4^{y+1}-3^x\cdot 2^{y+2}-9^x}{4^{y+1}+3^x\cdot 2^{y+1}-3^{x+1}-9} = \frac{3^x+2^{y+1}-3}{3^x-1} \\ 3^{x-1}\cdot 2^{y+1} = 1. \end{cases}$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 - ax^2 - (a^3 - 6a^2 + 5a + 8)x - (a-3)^3 = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию (укажите эти корни).

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

11 класс, 2011 год
2 вариант

1. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма её членов, взятых через один, начиная со второго, равна 2, а сумма её членов, взятых через один, начиная с третьего, равна 1.

2. Найдите наименьшее натуральное решение уравнения

$$\sin(2011x)^\circ = \sin x^\circ.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$||x| - 6| + ||y| - 7| \leq 10.$$

4. Для детского сада закупили наборы конфет трёх разных типов, потратив 2200 рублей. Первый набор стоит 50 рублей и содержит 25 конфет. Второй набор стоит 180 рублей и содержит 95 конфет, третий набор стоит 150 рублей и содержит 80 конфет. Сколько каких наборов купили, если общее количество конфет в них максимально?

5. Продолжение биссектрисы CD треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите BC, если $AC = b$, $AF = a$.

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

11 класс, 2011 год
3 вариант

1. Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого её членов меньше 4. Найдите первый член этой прогрессии.

2. Решите уравнение

$$(3\log_{|5x-3|} 2 \cdot \log_2 |5x-3| - x)\sqrt{5x^2-9x+4} = 0.$$

3. В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объём которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

4. Окружность с центром в точке O касается стороны BC треугольника ABC в точке C и касается медианы AD треугольника ABC в точке A. OB — биссектриса угла AOD. Найдите углы треугольника ABC.

5. Решите уравнение

$$7x^2 + 20x - 14 = 5\sqrt{x^4 - 20x^2 + 4}.$$

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

11 класс, 2011 год
4 вариант

1. Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

2. Вася и Петя одновременно выбежали с места старта круговой беговой дорожки и побежали в противоположных направлениях с постоянными скоростями. В некоторый момент они встретились. Вася пробежал полный круг и, продолжая бег в том же направлении, добежал до места их первой встречи в тот момент, когда Петя пробежал полный круг. Найдите отношение скоростей Васи и Пети.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{x - x^2 + 2} + x^2 > 4 - 5|x - 2|.$$

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Сумма площадей треугольников AOB и COD равна сумме площадей треугольников BOC и AOD, а площадь треугольника BOC вдвое больше, чем площадь треугольника AOB. Медианы BK и BL треугольников ABD и DBC пересекают отрезок AC в точках M и N соответственно. Найти KL, если $NC = 4$.

5. Рассматриваются плоские сечения правильной пирамиды $SABCD$, параллельные боковому ребру SB и диагонали основания AC, в которые можно вписать окружность. Какие значения может принимать радиус этих окружностей, если $AC = 1$, $\cos\angle SBD = \frac{2}{3}$?