Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
1 комплект

1. Решите неравенство

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 \geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x+3}\left(\frac{4x+97}{x-5} + \frac{4x-29}{x-1}\right) \geq 0.$$

4. Определите при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения. Решите систему при $a = 3$.

5. У правильной треугольной пирамиды сторона основания равна a, а площадь боковой поверхности в 2 раза больше площади основания. Найдите сечение пирамиды, которое проходит через сторону основания и имеет минимальную площадь.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
2 комплект

1. Решите уравнение

$$|x-1| = 3 - |x-2|.$$

2. Решите уравнение

$$3\,\mathrm{tg}^2\,x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{0,3}(x^2 + x + 31) < \log_{0,3}(10x + 11).$$

4. Определите при каких значениях параметра a неравенство

$$a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$$

выполняется при всех значениях x. Решите уравнение $\sin^2 x + \cos x = -\frac{3}{4}$.

5. В квадрат со стороной a вписан круг, в этом круг вписан квадрат, в который вписан круг и так далее. Найдите сумму площадей всех кругов.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
3 комплект

1. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл - 4% примесей. Сколько металла получится из 24 тонн руды?

2. Решите уравнение

$$8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{0,3}(x^2 + x + 31) < \log_{0,3}(10x + 11).$$

4. Определите при каких значениях параметра a неравенство

$$a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$$

выполняется при всех значениях x. Решите уравнение $\sin^2 x + \cos x = -\frac{3}{4}$.

5. У правильной треугольной пирамиды сторона основания равна a, а площадь боковой поверхности в 2 раза больше площади основания. Найдите сечение пирамиды, которое проходит через сторону основания и имеет минимальную площадь.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
4 комплект

1. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2\pi x - \cos 5\pi x}{|3x^2 - 2x - 1| - |3x + 1|} = 0.$$

2. Решите уравнение

$$|\sqrt{5 - 2x} - \sqrt{x + 2}| = \sqrt{x + 2} - \sqrt{5 - 2x}.$$

3. Решите неравенство

$$\arccos\left(1 - \sqrt{x^2 - 6x + 13}\right) \geq 0.$$

4. Определите при каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} 3 \geq \log_{\frac{2x-1}{x+2}} a$$

выполняется при всех значениях $x \in [1; 2]$.

5. Около сферы радиуса R описана правильная треугольная усеченная пирамида, сторона нижнего основания которой в 1,5 раза больше стороны верхнего основания. Найдите:

а) площадь верхнего основания пирамиды;

б) минимально возможную площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и не пересекающей верхнего основания пирамиды.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
5 комплект

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-2x}}{\sqrt{x+2}} \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$6\cos x - 1 = \sqrt{7 - 6\cos x}.$$

3. Найдите все положительные решения неравенства

$$x^{4x^2-12x+5} > 1.$$

4. Найдите все положительные значения параметра a, при которых неравенство

$$2 + \frac{a}{x-2} - \frac{5}{x+1} < 0$$

имеет ровно два целочисленных решения $x = 0$ и $x = 3$.

5. Около сферы радиуса R описана правильная треугольная усеченная пирамида, сторона нижнего основания которой в 1,5 раза больше стороны верхнего основания. Найдите:

а) площадь верхнего основания пирамиды;

б) минимально возможную площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и не пересекающей верхнего основания пирамиды.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
6 комплект

1. Решите уравнения

$$\text{а)}\ \frac{2x-2}{x+1}-\frac{3x+1}{4x-2}=0,$$

$$\text{б)}\ \sqrt{1-x}\left(\frac{2x-2}{x+1}-\frac{3x+1}{4x-2}\right)=0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{3}{\sin x}+1\le 0.$$

3. Решите неравенство

$$\log^2_{(x+2)^2}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^4-8\log_{x+2}(4-x^2)\le -20.$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$2+\frac{a}{x-2}-\frac{5}{x+1}<0$$

имеет ровно два целочисленных решения $x=0$ и $x=3$.

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной $a=4$. Через точку, равноудаленную от всех вершин параллелепипеда проведено сечение, параллельное диагонали основания параллелепипеда и пересекающее его верхнее основание. Найдите максимально возможную площадь сечения, если боковое ребро параллелепипеда равно $b=2\sqrt{3}$.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
7 комплект

1. Решите неравенство

$$\log^2_{\frac{3}{2}} x + \log_{\frac{3}{2}} x - 6 \geq 0.$$

2. Решите

а) уравнение $|x+3| + |2x-5| = 8$;

б) неравенство $\sqrt{x-1}(|x+3| + |2x-5| - 8) \leq 0$.

3. Решите уравнение

$$\cos 2x = 4(\sin^3 2x - \sin 2x).$$

4. Определите при каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} 3 \geq \log_{\frac{2x-1}{x+2}} a$$

выполняется при всех значениях $x \in [1;2]$.

5. Около сферы радиуса R описана правильная треугольная усеченная пирамида, сторона нижнего основания которой в 1,5 раза больше стороны верхнего основания. Найдите:

а) площадь верхнего основания пирамиды;

б) минимально возможную площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и не пересекающей верхнего основания пирамиды.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
8 комплект

1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 \geq 25 \\ |x+1| \leq 3,5. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$(x^2-25)(2\log_4^2(3-x) - 3\log_4 2(3-x) - 0,5) = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\sin 3x - \cos 2x} = 1.$$

4. Известно, что уравнение $x^4 + 2(a+2)x^2 + (a+4)(a-12) = 0$ имеет ровно два различных действительных корня. Найдите наименьшее значение произведения этих корней, или докажите, что минимума нет.

5. В основании пирамиды $ABCDS$ лежит четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = BC$ и $CD = DA$. Вершина пирамиды точка S проектируется в точку пересечения диагоналей основания точку O, причем $OA = OB = 2$ и $OD = OS = 6$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды. На расстоянии 3 друг от друга проведены две секущие плоскости, параллельные плоскости ASC. Найдите максимальный объем части пирамиды, заключенной между этими плоскостями.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
9 комплект

1. Решите неравенство

$$\frac{(x+2)^2}{x+3} \le -(x+2).$$

2. Решите уравнение

$$\log_{5-3x}(10x^2 - 31x + 23) = 2.$$

3. а) Решите уравнение $\sin(\pi/3 - 3x) + 3\cos^2 x = 2 - \sin^2 x$ и найдите сумму корней этого уравнения, лежащих на отрезке $[\pi/4; \pi]$.

б) Решите уравнение $\sin x + 3\cos^2 x = 2 - \sin^2 x$.

4. а) Определите при каких значениях параметра k неравенство

$$\frac{\log_2(x^2 + kx + 2k + 1) - 2}{(x-1)(x+2)} \ge 0$$

выполняется для всех целых x, кроме 1, 2 и -2.

б) Решите неравенство при $k = -1$.

5. В основании пирамиды $ABCDS$ лежит четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = BC$ и $CD = DA$. Вершина пирамиды точка S проектируется в точку пересечения диагоналей основания точку O, причем $OA = OB = 2$ и $OD = OS = 6$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды. Сумма площадей сечений пирамиды двумя плоскостями, параллельными клоскости ASC, равна 20. Найдите минимальное возможное расстояние между секущими плоскостями, при условии, что высота пирамиды лежит между сечениями.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2011 год
10 комплект

1. Решите уравнение

$$2\cos 2x + 13\cos x + 5 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{5-x}{x+1}\left(\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x+2}\right) \le 0.$$

3. Решите уравнение

$$(\sqrt{3}\sin \pi x - \cos \pi x)\sqrt{12 - x - x^2} = 0.$$

4. а) Постройте график функции $y = ||2x| - 4|$.

б) При каждом значении параметра a определите количество решений уравнения $||2x| - 4| + x^2 = a$.

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ (четырехугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые ребра SA, SB и SC попарно перпендикулярны и имеют длину 6. Объем пирамиды $SABCD$ равен 144. Найдите

а) площадь треугольника ACD;

б) наименьшее возможное при этих условиях значение длины ребра SD.