Олимпиада "ФизТех"по математике

11 класс, 2011 год
Вариант Ш (Долгопрудный)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2y} = 3y - x \\ \frac{81}{4}y^2 + x^3 = 2x + 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{ctg} x - 2) + \log_{(\operatorname{ctg} x)} \sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{10 - 2|x|}{|x^2 + 9x + 11| - 3} \leq 1.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $1/4$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF, и длину отрезка CD. Найдите площадь параллелограмма, если $AB = BE$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2 + (\sin\alpha + 3\cos\alpha)x + b = 0$$

имеет действительное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром O на прямой SA касается рёбер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей BSC и ABC, а также радиус сферы.

Олимпиада "ФизТех"по математике

11 класс, 2011 год
Вариант И (Выезд)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{2x}{y}} = x - y \\ x^2 + \frac{2}{y^2} = y^2 + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{(x-1)}\left(\frac{5}{2} - x\right)} \leq 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8\operatorname{tg} x + 22\operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15}(\sin x cos x).$$

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3}$ с центром на отрезке BC проходит через точку B и касается отрезка AC в точке D такой, что угол ADB равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Найдите высоту BF треугольника ABC и длину отрезка CD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AB и CD равны.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |b - x^2| \\ y = a(x - b) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром O на плоскости CDS касается рёбер SA, SB и AB. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и ADS, а также радиус сферы.