Задачи онлайн-этапа Самарской математической олимпиады 2018 | http://sammat.ru/

1.1. Вычислить площадь треугольника, ограниченного касательными, проведенными к графику функции

$$y = \frac{2x}{x^2 - 3}$$

в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ и прямой, соединяющей точки касания.

Решение.

Цель: определить уравнения обеих касательных, а также прямой, соединяющей точки касания; изобразить эти прямые; найти точку пересечения касательных. Затем искать площадь.

$$y' = \left(\frac{2x}{x^2 - 3}\right)' = \frac{(2x)'(x^2 - 3) - (2x)(x^2 - 3)'}{(x^2 - 3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6 - 4x^2}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 6}{(x^2 - 3)^2}.$$

Уравнение первой касательной:

$$y_{k1} = y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1) =$$

$$= \frac{2}{-2} + \frac{-2 - 6}{4}(x - 1) = -1 - 2x + 2 = -2x + 1.$$

Уравнение второй касательной:

$$y_{k2} = \frac{4}{1} + \frac{-8 - 6}{1}(x - 2) = 4 - 14x + 28 = -14x + 32.$$

Ординаты точек касания:

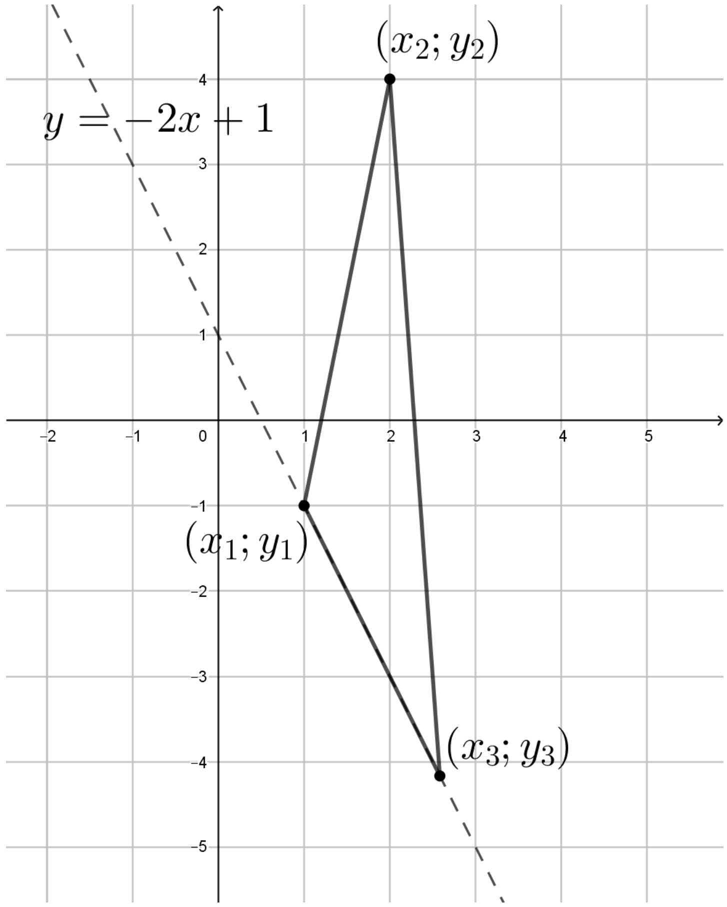
$$y_1 = y(x_1) = -1, \qquad y_2 = y(x_2) = 4.$$

Третья вершина треугольника:

$$-2x + 1 = -14x + 32, \qquad x_3 = \frac{31}{12},$$

$$y_3 = -\frac{31}{6} + 1 = -\frac{25}{6}.$$

Изобразим наш треугольник.



Считать площадь можно разными способами. Можно вычислить длины каждого из отрезков и применить формулу Герона. Можно вычислить длины каждого из отрезков, найти косинус какого-то из углов, затем синус, а затем и площадь. Можно задать какие-то два вектора, получить косинус угла между ними, потом синус, а затем и площадь.

А можно заметить, что наш треугольник разбивается на два линией $x = 2$. Образующиеся треугольники имеют общую вертикальную сторону (отрезок $(x_2; y_2)$ – $(2; -3)$), высоты к которой считаются без особого труда.

$$S = \frac{1}{2}(2 - x_1) \cdot \big(y_2 - (-3)\big) + \frac{1}{2}(x_3 - 2) \cdot \big(y_2 - (-3)\big) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} \cdot 7 = \frac{7}{2} + \frac{49}{24} = \frac{133}{24}.$$

Ответ: 133/24.

1.2. Вычислить площадь треугольника, ограниченного касательными, проведенными к графику функции

$$y = \frac{4x}{x^2 - 12}$$

в точках с абсциссами $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$ и прямой, соединяющей точки касания.

Решение.

Цель: определить уравнения обеих касательных, а также прямой, соединяющей точки касания; изобразить эти прямые; найти точку пересечения касательных. Затем искать площадь.

$$y' = \left(\frac{4x}{x^2 - 12}\right)' = \frac{(4x)'(x^2 - 12) - 4x(x^2 - 12)'}{(x^2 - 12)^2} = -\frac{4x^2 + 48}{(x^2 - 12)^2}.$$

Уравнение первой касательной:

$$y_{k1} = y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1) =$$

$$= \frac{8}{4 - 12} + (-1)(x - 2) = -x + 1.$$

Уравнение второй касательной:

$$y_{k2} = 1 - \frac{1}{3}(x - 6) = -\frac{1}{3}x + 3.$$

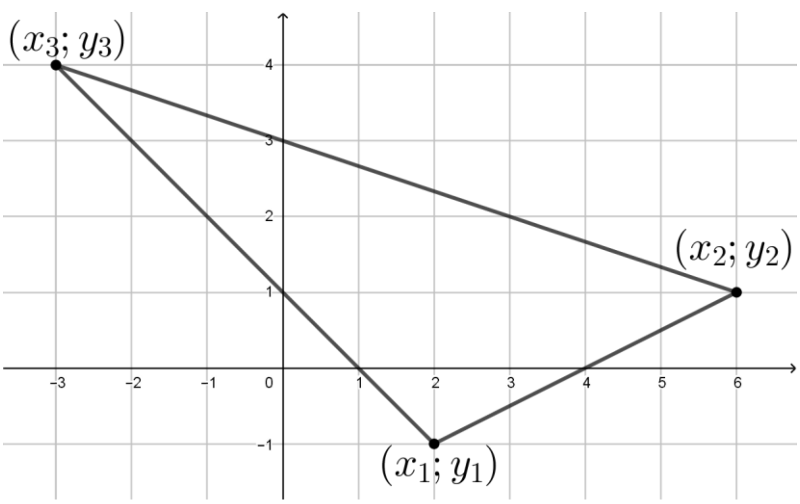
Ординаты точек касания:

$$y_1 = y(x_1) = -1, \qquad y_2 = y(x_2) = 1.$$

Третья вершина треугольника:

$$-x + 1 = -\frac{1}{3}x + 3, \qquad \frac{2}{3}x = -2, \qquad x_3 = -3, \qquad y_3 = 4.$$

Теперь можно изобразить треугольник.



Видно, что площадь такого треугольника найти достаточно несложно, если разбить его на два по линии $y = 1$.

Ответ: 15.

2.1. Определим операцию Δ с переменными a и b следующим образом:

$$a\Delta b = \sqrt{a+b}.$$

Решить уравнение $(x\Delta 22) - (x\Delta 10) = 2$.

Решение.

Запишем уравнение непосредственно:

$$\sqrt{x+22} - \sqrt{x+10} = 2.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+22 \geq 0, \\ x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -22, \\ x \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -10.$$

$$\sqrt{x+22} = \sqrt{x+10} + 2.$$

$$x + 22 = x + 10 + 4\sqrt{x+10} + 4.$$

$$\sqrt{x+10} = 2, \qquad x = -6.$$

Ответ: –6.

2.2. Определим операцию Δ с переменными a и b следующим образом:

$$a\Delta b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Найти сумму корней уравнения $(x\Delta 20) - (x\Delta 17) = 2016$. В ответ указать сумму цифр полученного числа.

Решение.

Запишем уравнение непосредственно:

$$\frac{x}{20} + \frac{20}{x} - \frac{x}{17} - \frac{17}{x} = 2016, \qquad \frac{x}{20} - \frac{x}{17} + \frac{3}{x} - 2016 = 0.$$

Умножим обе части на $17 \cdot 20 \cdot x$ и приведем подобные

$$17x^2 - 20x^2 + 3 \cdot 17 \cdot 20 - 2016 \cdot 17 \cdot 20 \cdot x = 0,$$

$$3x^2 + 2016 \cdot 17 \cdot 20 \cdot x - 3 \cdot 17 \cdot 20 = 0,$$

$$x^2 + 672 \cdot 17 \cdot 20x - 17 \cdot 20 = 0.$$

Замечаем, что коэффициенты a и c данного уравнения имеют разные знаки, поэтому дискриминант заведомо больше нуля. А значит можно воспользоваться теоремой Виета:

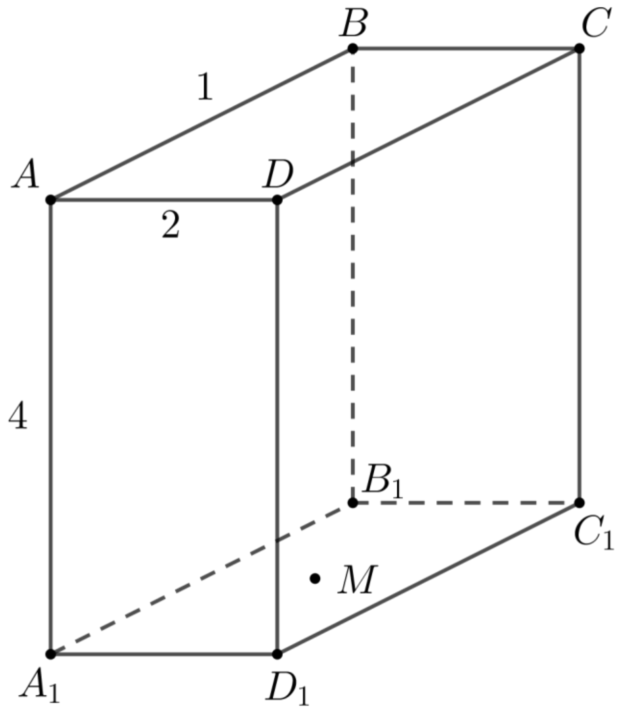
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -672 \cdot 17 \cdot 20 = -228480.$$

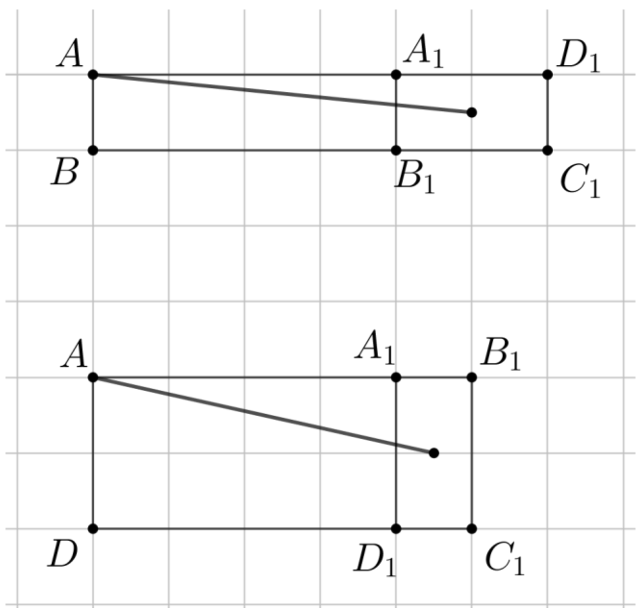
Сумма цифр данного числа равна 24.

Ответ: 24.

3.1. В вершине A прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сидит паук, а в центре противоположной грани $A_1B_1C_1D_1$ – муха. Какое минимальное расстояние (по поверхности параллелепипеда) от паука до мухи, если стороны параллелепипеда равны: $AA_1 = 4$; $AB = 1$; $AD = 2$. В ответе укажите квадрат этого расстояния в виде десятичной дроби.

Решение.





Интуитивно понятно, что надо исследовать именно эти две развертки (рис. справа).

В первом случае

$$AM = \sqrt{5^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{101}}{2}.$$

Во втором случае

$$AM = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{85}}{2}.$$

Квадрат искомого расстояния:

$$\frac{85}{4} = 21{,}25.$$

Ответ: 21,25.

3.2. В пирамиде *SABC* известно, что $SA = 3$, $SB = 2$, $SC = 4$, $\angle BSC = 30°$. Известно также, что $SA \perp SB, SA \perp SC$. Найти объем пирамиды.

Решение.

Замечаем, что исходя из условия, ребро *SA* перпендикулярно плоскости *BSC*, поскольку это ребро перпендикулярно двум прямым из этой плоскости. Тогда удобно считать точку *A* вершиной пирамиды, *SA* – высотой, а *BSC* – её основанием.

$$V_{ABSC} = \frac{1}{3} \cdot AS \cdot \frac{1}{2} \cdot BS \cdot CS \cdot \sin \angle BSC = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

4.1. Известно, что $F(x-1)=2x-3$; $F\big(G(x)\big)=3x-4$. Найти решение уравнения $F(x)=G(x)$.

Решение.

Заметим, что

$$F(x-1)=2(x-1)-1,$$

значит

$$F(x)=2x-1.$$

Теперь подставляем в выражение $F(x)$ вместо x функцию $G(x)$ и определим её вид

$$F\big(G(x)\big)=2G(x)-1=3x-4, \qquad G(x)=\frac{3}{2}(x-1).$$

Уравнение $F(x)=G(x)$ примет вид:

$$2x-1=\frac{3}{2}(x-1), \qquad x=-1.$$

Ответ: –1.

4.2. Известно, что $F(x+1)=2x-3$, $F\big(G(x)\big)=x^3$. Решите уравнение $2G(x)=F(x+7)$.

Решение.

Заметим, что

$$F(x+1)=2(x+1)-5,$$

значит

$$F(x)=2x-5.$$

Теперь подставляем в выражение $F(x)$ вместо x функцию $G(x)$ и определим её вид

$$F\big(G(x)\big)=2G(x)-5=x^3, \qquad G(x)=\frac{x^3+5}{2}.$$

Уравнение примет вид:

$$x^3+5=2x+9, \qquad x^3=2x+4.$$

Корень $x=2$ угадывается, а строительство графиков функций показывает, что этот корень единственный.

Ответ: 2.

4.3. Известно, что при всех значениях x функции $F(x)$ и $G(x)$ удовлетворяют равенствам:

$$F(x) = x^2 + 2x, \qquad F\big(G(x)\big) = x^4 + 2x^2.$$

Найти сумму всех решений уравнения $G\big(F(x)\big) = -6$.

Решение.

Подставим $G(x)$ в выражение для функции F:

$$F\big(G(x)\big) = \big(G(x)\big)^2 + 2G(x).$$

Теперь нужно выразить G из уравнения

$$\big(G(x)\big)^2 + 2G(x) = x^4 + 2x^2.$$

Обозначим $t = G(x)$.

$$t^2 + 2t - (x^4 + 2x^2) = 0, \qquad \frac{D}{4} = 1 + x^4 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2.$$

$$t_1 = -1 + (x^2 + 1) = x^2, \qquad t_2 = -1 - (x^2 - 1) = -x^2 - 2.$$

Итак, либо $G(x) = x^2$, либо $G(x) = -x^2 - 2$. В первом случае при подстановке и записи уравнения $G\big(F(x)\big) = -6$ получим:

$$(x^2 + 2x)^2 = -6,$$

решений нет. Во втором случае имеем:

$$-(x^2 + 2x)^2 - 2 = -6, \qquad (x^2 + 2x)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = 2, \\ x^2 + 2x = -2. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет, а первое имеет; сумма корней равна –2. Следует отметить, что решению задачи удовлетворяет именно $G(x) = -x^2 - 2$.

Ответ: –2.

5.1. Имеются 3 слитка: 1-й слиток – сплав меди и никеля, 2-й слиток – сплав никеля с цинком, 3-й слиток – сплав цинка с медью. Если сплавить 1-й слиток со 2-м, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в 1-м слитке. Если сплавить 2-й слиток с 3-м, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во 2-м слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплаве трех слитков, если во 2-м слитке цинка 10%, а в 3-м – 7%?

Решение.

Составим таблицу.

Сплав	Содержание металла		
	Медь	Никель	Цинк
1	a	b	–
2	–	c	d
3	e	–	f

Сплавим первый слиток со вторым, масса сплава составит $a + b + c + d$. Условие задачи примет вид:

$$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a+b}, \qquad 2a + 2b = a + b + c + d, \qquad a + b = c + d.$$

Сплавим второй слиток с третьим, масса сплава составит $c + d + e + f$. Условие задачи примет вид:

$$\frac{c}{c+d+e+f} = \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{c+d}, \qquad 3c + 3d = c + d + e + f, \qquad e + f = 2(c + d).$$

Содержание цинка во втором слитке:

$$\frac{d}{c+d} = \frac{1}{10}, \qquad c + d = 10d.$$

Содержание цинка в третьем слитке:

$$\frac{f}{e+f} = \frac{7}{100}, \qquad e + f = \frac{100f}{7}; \;\; 20d = \frac{100f}{7}, \qquad f = \frac{7}{5}d.$$

При сплаве всех трех слитков содержание цинка запишется так:

$$\frac{d+f}{a+b+c+d+e+f} = \frac{d + \frac{7}{5}d}{10d + 10d + 20d} = \frac{12}{200} = 0{,}06 = 6\%.$$

Ответ: 6.

5.2. Имеются 3 слитка: 1-й слиток – сплав меди и никеля, 2-й слиток – сплав никеля с цинком, 3-й слиток – сплав цинка с медью. Если сплавить 1-й слиток со 2-м, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в 1-м слитке. Если сплавить 2-й слиток с 3-м, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во 2-м слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплаве трех слитков, если во 2-м слитке цинка 12%, а в 3-м – 5%?

Решение.

Составим таблицу.

Сплав	Содержание металла		
	Медь	Никель	Цинк
1	a	b	–
2	–	c	d
3	e	–	f

Сплавим первый слиток со вторым, масса сплава составит $a+b+c+d$. Условие задачи примет вид:

$$\frac{a}{a+b+c+d}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b}, \qquad 2a+2b=a+b+c+d, \qquad a+b=c+d.$$

Сплавим второй слиток с третьим, масса сплава составит $c+d+e+f$. Условие задачи примет вид:

$$\frac{c}{c+d+e+f}=\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{c+d}, \qquad 3c+3d=c+d+e+f, \qquad e+f=2(c+d).$$

Содержание цинка во втором слитке:

$$\frac{d}{c+d}=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}, \qquad c+d=\frac{25d}{3}.$$

Содержание цинка в третьем слитке:

$$\frac{f}{e+f}=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}, \qquad e+f=20f;\; 20f=\frac{50d}{3}, \qquad f=\frac{5}{6}d.$$

При сплаве всех трех слитков содержание цинка запишется так:

$$\frac{d+f}{a+b+c+d+e+f}=\frac{d+\frac{5}{6}d}{\frac{25d}{3}+\frac{25d}{3}+\frac{50d}{3}}=\frac{5{,}5}{100}=5{,}5\%.$$

Ответ: 5,5.

5.3. Имеются два раствора серной кислоты в воде: первый – 40%-ный, второй – 60%-ный. Эти два раствора смешали, а потом добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-ный раствор. Если бы вместо чистой воды добавили 5 кг 80%-ного раствора, то получили бы 70%-ный раствор. Сколько было 60%-ного раствора?

Решение.

Пусть x – масса 60%-ного раствора, y – масса 40%-ного раствора. Тогда содержание серной кислоты в обоих растворах равно $0{,}6x + 0{,}4y$. Первое условие задачи запишется так:

$$\frac{0{,}6x + 0{,}4y}{x + y + 5} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, \qquad 3x + 2y = x + y + 5, \qquad y = 5 - 2x.$$

Второе условие задачи:

$$\frac{0{,}6x + 0{,}4y + 0{,}8 \cdot 5}{x + y + 5} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}, \qquad 6x + 4y + 40 = 7x + 7y + 35,$$

$$y = \frac{1}{3}(5 - x).$$

Приравнивая полученные выражения, имеем:

$$15 - 6x = 5 - x, \qquad x = 2.$$

Ответ: 2.

6.1. На угольной шахте сначала работали два участка, а через некоторое время вступил в строй третий участок, в результате чего производительность шахты увеличилась в полтора раза. Сколько процентов составляет производительность второго участка от производительности первого, если известно, что за 4 месяца первый и третий участки выдают угля столько же, сколько второй за год?

Решение.

Пусть a, b, c – производительность первого, второго и третьего участков соответственно. Тогда первая часть условия запишется так:

$$a + b + c = 1{,}5(a + b), \qquad c = \frac{a + b}{2}.$$

Вторая часть условия примет вид:

$$4(a + c) = 12b, \qquad c = 3b - a.$$

Приравняем полученные выражения:

$$\frac{a + b}{2} = 3b - a, \qquad b = \frac{3}{5}a.$$

Окончательно:

$$\frac{b}{a} \cdot 100\% = \frac{\frac{3}{5}a}{a} \cdot 100\% = 60\%.$$

Ответ: 60.

6.2. Монгольский школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка в 2 раза дешевле, а книга в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 тугриков. Если бы портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка в 4 раза дешевле, а книга в 3 раза дешевле, то за покупку школьник уплатил бы 12 тугриков. Сколько стоит вся покупка?

Решение.

Пусть x, y, z – изначальные цены портфеля, авторучки и книги. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 8, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 12. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 10, а второе на 12.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 80, \\ 6x + 3y + 4z = 144. \end{cases}$$

Можно заметить, что при сложении обоих уравнений системы коэффициенты при каждой из переменных будут одинаковыми:

$$8x + 8y + 8z = 224, \qquad x + y + z = 28.$$

Ответ: 28.

7.1. Первый член арифметической прогрессии равен b, а ее разность равна 5. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений параметра b, для которых сумма n членов этой прогрессии достигает своего минимального значения при $n = 30$.

Решение.

$$S_n = \frac{2b + (n-1)5}{2} \cdot n = \frac{5}{2}n^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)n.$$

$$(S_n)' = 5n + b - \frac{5}{2}, \qquad n = \frac{1}{2} - \frac{b}{5}.$$

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{5} = 30, \qquad b = -147{,}5.$$

Поскольку значение параметра b только одно, его и записываем в ответ.

Ответ: –147,5.

7.2. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна S. После того, как из нее удалили все члены с чётными номерами, начиная с четвертого (то есть 4-й, 6-й, 8-й и т.д.), её сумма изменилась и стала равной $\frac{19}{18}S$. Найдите второй член геометрической прогрессии, если $S = 2016$.

Решение.

Заметим, что

$$b_4 + b_6 + b_8 + \cdots = S - \frac{19}{18}S = -\frac{1}{18}S.$$

В этой прогрессии первым членом является $b_4 = b_1 q^3$, а знаменатель равняется q^2, поэтому

$$-\frac{1}{18}S = \frac{b_1 q^3}{1 - q^2}.$$

Снова пользуясь формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, запишем второе уравнение системы для исходной прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Итак,

$$\begin{cases} S = \dfrac{b_1}{1 - q}, \\ -\dfrac{1}{18}S = \dfrac{b_1 q^3}{1 - q^2}. \end{cases}$$

Приравнивая выражения для S, после преобразований получим

$$18q^3 = -q - 1.$$

Построение графиков показывает, что у этого уравнения только один корень, который достаточно трудно, но угадывается: $q = -1/3$.

$$b_1 = S(1 - q) = 2016 \cdot \frac{4}{3} = 2688, \qquad b_2 = b_1 q = -896.$$

Ответ: –896.

8. Сколько целых решений имеет неравенство

$$\frac{\sqrt{5+7x}-2x+3}{7-3x^2+20x} \le 0.$$

Решение.

Умножим обе части неравенства на –1.

$$\frac{\sqrt{5+7x}-2x+3}{3x^2-20x-7} \ge 0.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 5+7x \ge 0, \\ 3x^2-20x-7 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{5}{7}, \\ x \ne \left\{-\dfrac{1}{3}; 7\right\}. \end{cases}$$

$$\sqrt{5+7x}-2x+3 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{5}{7}, \\ x \ge \dfrac{3}{2}, \\ 7x+5 \le 4x^2-12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2}, \\ x \le \dfrac{19-\sqrt{297}}{8}, \qquad x \ge \dfrac{19+\sqrt{297}}{8}. \end{cases}$$

Заметим, что $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, поэтому $17 < \sqrt{297} < 18$. Отсюда следует, что

$$\frac{19-18}{8} = \frac{1}{8} < \frac{19-\sqrt{297}}{8} < \frac{19-17}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{19+17}{8} = 4 < \frac{19+\sqrt{297}}{8} < \frac{19+18}{8} = \frac{37}{8}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2}, \\ x \le \dfrac{19-\sqrt{297}}{8}, \qquad x \ge \dfrac{19+\sqrt{297}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{19+\sqrt{297}}{8}.$$

$$\sqrt{5+7x}-2x+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -\dfrac{5}{7}, \\ x < \dfrac{3}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-19x+4<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{5}{7} \leq x < \frac{19+\sqrt{297}}{8}.$$

Осталось найти множества, на которых числитель и знаменатель имеют один знак.

1)

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{19+\sqrt{297}}{8}, \\ -\dfrac{1}{3} < x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19+\sqrt{297}}{8} \leq x < 7;$$

2)

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{7} \leq x < \dfrac{19+\sqrt{297}}{8}, \\ x < -\dfrac{1}{3}, \qquad x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{7} \leq x < -\frac{1}{3}.$$

Итак, окончательно

$$\frac{\sqrt{5+7x}-2x+3}{7-3x^2+20x} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{7} \leq x < -\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{19+\sqrt{297}}{8} \leq x < 7. \end{array}\right.$$

Первый промежуток, очевидно, не содержит целых решений, а второй содержит числа 5 и 6, итого два целых решения.

Ответ: 2.

9.1. Сколько знаков содержится в десятичной записи числа $4^{17}5^{35}$?

Решение.

Преобразуем:

$$4^{17}5^{35} = 2^{34}5^{35} = 5 \cdot 10^{34} = 5\underbrace{0 \dots 0}_{34}.$$

Итого 35 знаков.

Ответ: 35.

9.2. Сколько различных цифр содержит десятичная запись числа $20^{18}25^{10}$?

Решение.

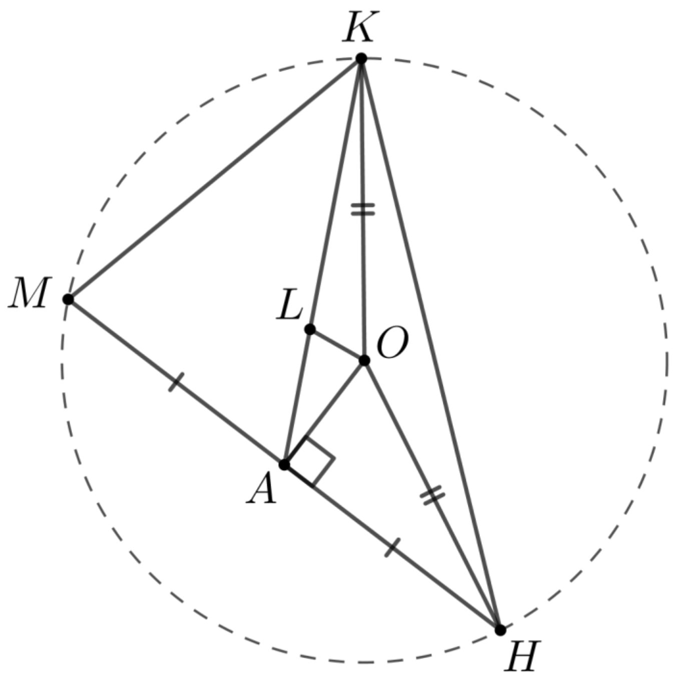
Преобразуем:

$$20^{18}25^{10} = 5^{18} \cdot 4^{18} \cdot 5^{20} = 5^2 \cdot 4^{18} \cdot 25^{18} = 5^2 \cdot 100^{18} = 25 \cdot 10^{36} = 25\underbrace{0 \dots 0}_{36}.$$

Полученное число содержит в своей десятичной записи только три цифры: 2, 5 и 0.

Ответ: 3.

10.1. Вокруг треугольника *MKH* описана окружность радиуса r с центров точке *O*. Длина стороны *HM* равна a. Для сторон треугольника выполняется соотношение $HK^2 - HM^2 = HM^2 - MK^2$. Найти площадь треугольника *OKL*, где L – точка пересечения медиан треугольника *MKH*. Ответ записать в виде десятичной дроби, если $a = 4\sqrt{3}, r = 4,(3)$.



Решение.

Заметим, что $4,(3) = 13/3$ и

$$2MH^2 = HK^2 + MK^2.$$

Тогда медиана *KA* найдется по формуле

$$KA = \frac{1}{2}\sqrt{2(HK^2 + MK^2) - MH^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} MH = 6.$$

По свойству точки пересечения медиан, имеем

$$KL = \frac{2}{3} KA = 4.$$

Из прямоугольного треугольника *OAH* находим *OA*:

$$OA = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{OH^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{61}}{3}.$$

Теперь нам известны длины всех сторон треугольника *KAO*, остается найти синус угла *AKO*, а затем искомую площадь треугольника *OKL*. По теореме косинусов для треугольника *KAO*:

$$\cos\angle AKO = \frac{OK^2 + AK^2 - AO^2}{2 \cdot OK \cdot AK} = \frac{\frac{169}{9} + 36 - \frac{61}{9}}{2 \cdot \frac{13}{3} \cdot 6} = \frac{12}{13},$$

$$\sin\angle AKO = \sqrt{1 - \cos^2\angle AKO} = \frac{5}{13}.$$

Окончательно

$$S_{OKL} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot KO \cdot \sin\angle AKO = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{3} \cdot 4 \cdot \frac{5}{13} = \frac{10}{3} = 3,(3).$$

Ответ: 3,(3).

10.2. В равнобочной трапеции $PQRS$ $(QR \parallel PS)$ известны длины сторон $QR = 1$, $PS = 4$. Точки P', Q', R', S' лежат по одну сторону от плоскости трапеции, причем прямые PP', QQ', RR', SS' перпендикулярны этой плоскости, $PP' = 1$, $QQ' = 7$, $RR' = 2$, $SS' = 1$. Точки K' и L' лежат на прямых $P'R'$ и $Q'S'$ соответственно. Найти длину отрезка $K'L'$, если $P'K' : K'R' = 3 : 2$, $Q'L' : L'S' = 2 : 3$. В ответ укажите площадь квадрата со стороной $K'L'$.

Решение.

Эта задача со вступительного экзамена на экономический факультет МГУ 1998 года (№4 в варианте). Решить эту задачу я не в силах, но ответ записать могу.

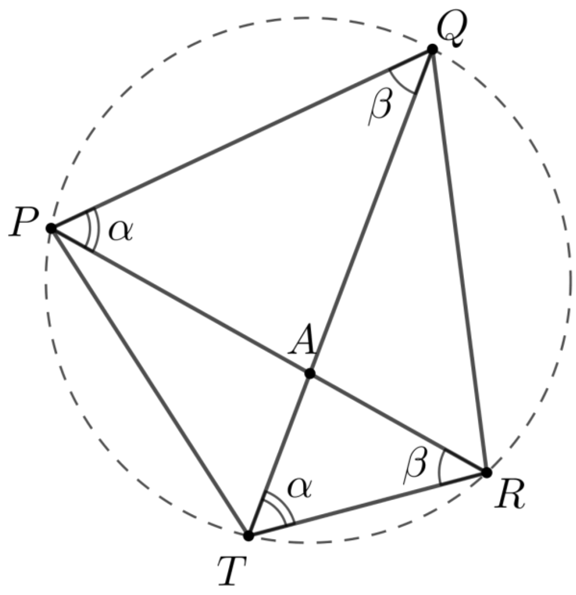
Пусть $K'L' = l$. В зависимости от положения точек K' и L' возможны случаи.

1) $l = \sqrt{10}$, если $K' \in [P'R']$, $L' \in [Q'S']$;
2) $l = \sqrt{346}$, если $K' \notin [P'R']$, $L' \notin [Q'S']$;
3) $l \in \left(\frac{\sqrt{634}}{5}; +\infty\right)$, если $K' \notin [P'R']$, $L' \in [Q'S']$;
4) $l \in \left(\frac{\sqrt{8194}}{5}; +\infty\right)$, если $K' \in [P'R']$, $L' \notin [Q'S']$.

Будем считать, что организаторы олимпиады имели ввиду именно первый случай, поэтому в ответ нужно написать число 10.

Ответ: 10.

10.3. Четырехугольник $PQRT$ вписан в окружность, причем длины противоположных сторон PQ и RT равны 9 и 6, а диагонали PR и QT равны 8 и 10 соответственно. Найти отношение площадей треугольника PQR и четырехугольника $PQRT$.



Решение.

Пусть A – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Тогда треугольники TAR и PAQ подобны по двум вписанным углам, опирающимся на одну и ту же дугу (см. рис.). Обозначим $S_{TAR} = x$, тогда

$$S_{PAQ} = \left(\frac{PQ}{RT}\right)^2 x = \frac{9}{4}x.$$

Последовательно запишем площади треугольников.

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \sin\alpha = 36\sin\alpha,$$

$$S_{TQR} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin\alpha = 30\sin\alpha.$$

В то же время

$$S_{PQR} - S_{TQR} = S_{PAQ} + S_{ARQ} - S_{TAR} - S_{ARQ} = \frac{9}{4}x - x = \frac{5}{4}x, \qquad \sin\alpha = \frac{5}{24}x.$$

$$S_{PQT} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \sin\beta = 45\sin\beta,$$

$$S_{PRT} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin\beta = 24\sin\beta.$$

Аналогично

$$S_{PQT} - S_{PRT} = S_{PAQ} + S_{PAT} - S_{TAR} - S_{PAT} = \frac{9}{4}x - x = \frac{5}{4}x, \qquad \sin\beta = \frac{5}{84}x.$$

$$S_{PQR} = 36\sin\alpha = \frac{15}{2}x, \qquad S_{PRT} = 24\sin\beta = \frac{10}{7}x,$$

$$\frac{S_{PQR}}{S_{PQRT}} = \frac{\frac{15}{2}x}{\frac{15}{2}x + \frac{10}{7}x} = 0{,}84.$$

Ответ: 0,84.