Решения задач заочного этапа

Физтех – 2017

1.

Найдите наименьшее натуральное a такое, что выражение

$a(a + 16)(a + 32)(a + 48)(a + 64)$ делится на 10^7.

---

1) Исходное условие равносильно тому, что выражение делится на 5^7 и на 2^7.

2) Заметим, что все скобки взаимно просты по модулю 5 (дают разные остатки при делении на 5). Действительно, $a + 16 = a + 1 \bmod 5, a + 32 = a + 2 \bmod 5$, $a + 48 = a + 3 \bmod 5, a + 64 = a + 4 \bmod 5$. Следовательно, чтобы произведение данных скобок делилось на 10^7 необходимо, чтобы одна из этих скобок делилась на 5^7.

3) Ясно, что для минимизации a, лучше сделать последнюю скобку кратной 5^7. Также ясно, что $a = 5^7 - 64$ не удовлетворяет условию, так как ни одна из скобок не будет кратна 2. Поэтому рассмотрим вариант $a = 4(5^7 - 64)$, которая удовлетворяет нашему условию (вариант $a = 2(5^7 - 64)$ нам не подходит, поскольку степень 2 в полученном выражении будет равна 6, а нам нужно не меньше 7) .

Ответ: $4(5^7 - 64)$.

2.

Известно, что для положительных чисел a, b, c каждое из трех уравнений

$ax^2 + 15bx + c = 0, bx^2 + 15cx + a = 0, cx^2 + 15ax + b = 0$

имеет хотя бы один действительный корень.

Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно 9? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня).

---

1) Если каждое из уравнений имеет не менее одного корня, то мы можем воспользоваться теоремой Виета: искомая величина равна $\frac{a}{b}$, а по условию $\frac{c}{a} = 9$.

2) Для того, чтобы уравнения имели не менее одного корня, необходимо, чтобы выполнялись условия на a, b, c: $225b^2 - 4ac \geq 0;\ 225c^2 - 4ab \geq 0;\ 225a^2 - 4bc \geq 0$.

3) Подставим в последнее неравенство $c = 9a$: $a(225a - 36b) \geq 0$. Поскольку $a > 0$, из этого следует, что $b \leq \frac{225a}{36}$. Соответственно, если $b = \frac{225a}{36}$, величина $\frac{a}{b}$ принимает наименьшее значение, равное $a * \frac{36}{225a} = \frac{36}{225} = \frac{4}{25} = 0{,}16$.

4) Можем проверить и убедиться, что такое значение будет удовлетворять всем остальным необходимым неравенствам из пункта (2).

5) В общем случае при произведении корней первого уравнения, равного a и константе при x, равной c, ответ $\frac{4a}{c^2}$.

Ответ: $\frac{4a}{c^2} = 0{,}16$.

3. Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых шести её членов равно 162^{603}. Найдите количество таких прогрессий.

---

1) Введем обозначение b – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии, и разложим 162 на простые множители: $2 * 3^4$. Тогда условие равносильно следующему равенству: $b * bq * bq^2 * \ldots * bq^5 = b^6 q^{15} = (2 * 3^4)^{603}$.

2) Упростим имеющееся равенство и получим $b^2 * q^5 = 2^{201} * 3^{804}$. Поскольку b и q – целые числа, то они должны состоять только из степеней 2 и 5. Поэтому $b = 2^x * 5^y, q = 2^z * 5^k$. Тогда распишем условие равенства в виде системы x, y, z, k – целые неотрицательные числа:

$$\begin{cases} 2x + 5z = 201 \\ 2y + 5k = 804 \end{cases}$$

Чтобы посчитать количество решений данной системы достаточно посчитать количество решений каждого уравнения и перемножить результаты.

3) Найдем количество решений первого уравнения. Для этого заметим, что $2x = 201 - 5z$. Тогда каждому нечетному значению z такому, что $201 - 5z > 0$ будет соответствовать ровно одно значение x. Чисел z, удовлетворяющих такому свойству, 20 (всего чисел 41, из них нечетных ровно половина). Стало быть, это уравнение имеет 20 решений. Аналогично второе уравнение в системе имеет 81 решение. И система имеет $81 * 20 = 1620$ решений. Поскольку каждый набор чисел x, y, z, k задает уникальный набор чисел b и q, то уравнение из пункта (1) имеет 1620 решений, а каждое из решений того уравнения.

Ответ: 1620.

4.

Пусть $\frac{67-36\cos^2 x+60\sin x}{36\sin^2 x-45+12\cos x\sqrt{11}}$=3. Какое наибольшее значение может принимать $15\sin x$?

---

1) Выделим полные квадраты в числителе и в знаменателе, чтобы оценить значение выражения, для этого перепишем числитель в виде:

$$67 - 36\cos^2 x + 60\sin x = 36\sin^2 x + 60 sinx + 31 = (6 sinx + 5)^2 + 6$$

и знаменатель в виде:

$$36\sin^2 x - 45 + 12\cos x\sqrt{11} = -36\cos^2 x + 12 cosx\sqrt{11} - 9 = 2 - \left(6 cosx - \sqrt{11}\right)^2$$

2) Из этого следует, что мы делим число большее шести (поскольку$(6 sinx + 5)^2 > 0$) на число, меньшее двух. Из этого следует, что результат деления будет меньше или равен 3, поэтому уравнение может иметь решение только тогда, когда $(6 sinx + 5)^2 = \left(6 cosx - \sqrt{11}\right)^2 = 0$. А это равенство действительно выполняется при $sinx = -\frac{5}{6}$, тогда искомая величина равна $-\frac{5}{6} * 15 = -12{,}5$.

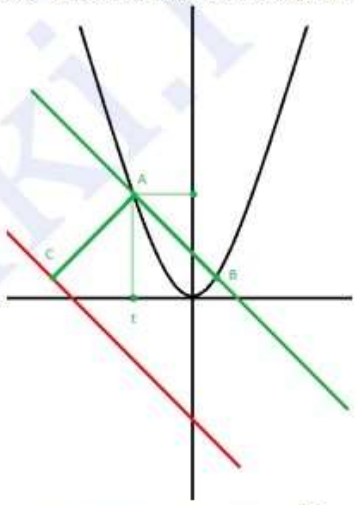
Ответ: -12,5.

5.

Даны парабола $y = 10x^2$ и прямая $y = x - 0,2$. Какую наибольшую площадь может иметь квадрат, две вершины которого лежат на параболе, а две другие – на этой прямой?

---

1) Предположим, что одна из вершин нашего квадрата имеет координату t по оси X и лежит на параболе. Тогда она имеет координату $10t^2$ по оси Y. Поскольку две вершины квадрата лежат на прямой $y = x - 0,2$, то вторая пара вершин должна лежать на прямой параллельной данной: то есть уравнение зеленой прямой имеет вид: $y = x + b$. Подставим в это уравнение координату точки A и получим $y = x + 10t^2 - t$.



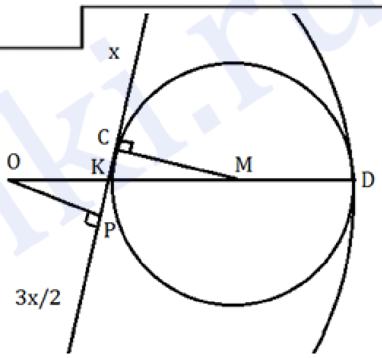
2) Для того, чтобы найти координаты второй точки пересечения параболы и прямой, решим следующее уравнение $10x^2 = x + 10t^2 - t \iff 10x^2 - x - 10t^2 + t = 0$. Такое уравнение по теореме Виета имеет 2 корня: $x = t$ и $x = \frac{-10t+1}{10}$. Чтобы узнать координаты точки B (второй вершины квадрата на параболе) по игреку, просто подставим данное значение икса в уравнение параболы и получим: $\frac{(10t-1)^2}{10}$.

3) Теперь воспользуемся чудесной формулой (незнающие могут загуглить) поиска расстояния от точки до прямой, и получим, что длина отрезка $AC = \frac{10t^2-t+0,2}{\sqrt{1^2+1^2}}$. С другой стороны, используя формулу расстояния между точками, мы можем найти длину отрезка $AB = \sqrt{\left(t - \frac{-10t+1}{10}\right)^2 + \left(10t^2 - \frac{(10t-1)^2}{10}\right)^2}$, но тогда из того, что A, B, C – вершины квадрата получим следующее уравнение: $\sqrt{\left(t - \frac{-10t+1}{10}\right)^2 + \left(10t^2 - \frac{(10t-1)^2}{10}\right)^2} = \frac{10t^2-t+0,2}{\sqrt{1^2+1^2}}$.

4) Решим это уравнение (под квадратным корнем после раскрытия получается полный квадрат, а далее раскрываем модуль) и получим $t = \{0;\ 0.1; 0,4;\ -0.3\}$. Теперь, когда мы знаем значения t, мы можем найти площадь квадрата, равную AC^2. Подставим все полученные значения t и осознаем, что самое большое численное значение получается при $t = 0.4$ (или -0.3) и равняется оно $\frac{1.96}{2} = 0.98$.

Ответ: 0.98.

6. Две окружности Ω и ω радиусов R=12.5 и r=4 касаются внутренним образом. Хорда AB окружности Ω касается окружности ω в точке C. Найдите длину хорды AB, если известно, что $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$.



1) Пусть $AB = 3x, AC = x, BC = 2x$. O – центр большей окружности, M – центр меньшей окружности.

2) Отрезок $CP = 3/2x$, так как треугольник OAB – равнобедренный.

3) $\Delta OKP \sim \Delta KMC$ по двум углам. $k = \frac{OP}{CM} = \frac{\sqrt{12{,}5^2 - \frac{9x^2}{4}}}{4}$

4)] $KM - a, KC - b$. $OM = R - r = 8{,}5$. Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} k = \frac{\sqrt{12{,}5^2 - \frac{9x^2}{4}}}{4} \\ a + ka = 8{,}5 \\ b + kb = \frac{1}{2}x \\ a^2 = b^2 + 16 \end{cases}.$$

Решив систему, мы получим $x = 8$, $AB = 24$.

Ответ: 24.

7. Найдите наименьшее значение параметра p, для которого при всех $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2$; $0 \le z \le 5$ выполняется неравенство $xyz + p \ge 13x + 5y + 2z$?

1) Перепишем исходное неравенство в виде: $p \ge 13x + 5y + 2z - xyz$. Тогда станет ясно, что p должно быть равно максимальному значению выражения $13x + 5y + 2z - xyz$.

2) Пускай y и z принимают такие значения, что значение выражения максимально. Тогда сгруппируем его следующим образом: $(13 - yz)x + 5y + 2z$. Поскольку $yz \le 10$, то при увеличении x значение всего выражения будет увеличиваться. Поэтому нам нужно брать $x = 1$.

3) Перепишем выражение с этим условием и сгруппируем: $13 - yz + 5y + 2z =$

$(y - 2)(5 - z) + 23$. Поскольку одна скобка больше и равна нуля, а вторая скобка меньше или равна нулю (произведение меньше или равно нулю), максимум (23) достигается при равенстве нулю, а это достигается при $y = 2, z = 5$.

Ответ: 23.

8. Какое наибольшее значение может принимать модуль синуса суммы углов, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\tan x = \frac{20}{9} * \cos y\,; \tan y = \frac{20}{9} * \cos z\,; \tan z = \frac{20}{9} * \cos x.$$

---

1) Вспомним про универсальную замену через тангенс: $\cos t = \frac{1-\tan^2\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}$. Аналогично $\tan t = \frac{2\tan\frac{t}{2}}{1-\tan^2\frac{t}{2}}$. Тогда, используя эти формулы, перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{20}{9} * \dfrac{1-\tan^2\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2}} \\ \dfrac{2\tan\frac{y}{2}}{1-\tan^2\frac{y}{2}} = \dfrac{20}{9} * \dfrac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}} \\ \dfrac{2\tan\frac{z}{2}}{1-\tan^2\frac{z}{2}} = \dfrac{20}{9} * \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \end{cases}$$

2) Введем замену: $\tan\frac{x}{2} = a, \tan\frac{y}{2} = b, \tan\frac{z}{2} = c$. Получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{1-a^2} = \dfrac{20}{9} * \dfrac{1-b^2}{1+b^2} \\ \dfrac{2b}{1-b^2} = \dfrac{20}{9} * \dfrac{1-c^2}{1+c^2} \\ \dfrac{2c}{1-c^2} = \dfrac{20}{9} * \dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{cases}$$

Мы получили обычную рациональную систему, которую можно решить вручную, а можно забить в Wolfram Alpha, что мы и сделали: $\left\{\left(-2, -\frac{1}{2}, 2\right); \left(-2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, 2, -2\right)\right\}$.

3) Далее ясно, что нам достаточно взять одно из этих решений (нам необходимо найти модуль величины, а в силу нечетности функции арктангенса, выбор решения не повлияет на ответ). Тогда получим $\frac{x}{2} = \arctan(-2) + \pi k$; $\frac{y}{2} = \arctan(-\frac{1}{2}) + \pi k$; $\frac{z}{2} = \arctan(2) + \pi k$. Тогда необходимо вычислить $|\sin\left(2\left(\arctan(-2) + \pi k_1 + \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k_2 + \arctan(2) + \pi k_3\right)\right)|$.

4) Можно раскрыть и вывести эту формулу самостоятельно, а можно забить в Wolfram Alpha, что мы снова и сделали, получаем 0,8.

Ответ: 0,8.

9. Треугольная пирамида SABC (S– вершина) обладает следующими свойствами:

– длины проекций боковых ребер на плоскости боковых граней, не содержащих эти ребра (то есть проекция ребра SA на плоскость грани SBC, и так далее) – равны между собой;

– длины проекций боковых ребер на плоскость основания пирамиды также равны между собой. Известно, что $\cos ASB = -\frac{21}{29}, AB = 1$. Найдите сумму периметров оснований всех пирамид, обладающих указанными свойствами.

---

1) Из того, что длины проекций боковых ребер на плоскость основания равны между собой следует, что вершина пирамиды проектируется в центр описанной окружности, и из этого следует, что боковые ребра пирамиды равны между собой.

2) Из того, что длины проекций боковых ребер на плоскость боковых граней равны, следует, что углы при вершине пирамиды равны. Из этих двух фактов предыдущих, следует, что пирамида правильная.

3) Тогда такая пирамида существует в единственном экземпляре, и периметр ее основания равен $AB * 3 = 3$.

Ответ: 3.

10. В некотором государстве 35 городов. Каждая пара городов соединена авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Оказалось, что из каждого города выходит ровно 12 авиарейсов первой авиакомпании. Назовем тройку городов A, B, C замкнутой, если все три авиарейса AB, BC, CA осуществляются одной авиакомпанией. Каково наибольшее возможное количество замкнутых троек городов может быть в этом государстве?

---

1) Будем обозначать города, связанные рейсами первой компании зеленым цветом, второй компании - синим цветом. Поскольку каждая пара городов соединена авиарейсами, то любая тройка этих городов образует треугольник. Треугольник может быть либо одноцветным, либо содержать две стороны одного цвета и одну сторону другого цвета.

2) Всего треугольников и разноцветных, и одноцветных $C_{35}^3 = 6545$. Чтобы вычислить количество одноцветных треугольников, вычислим количество разноцветных треугольников, а зачем вычтем их из общего числа. Чтобы треугольник был разноцветным, нам необходимо и достаточно, чтобы к стороне одного цвета прилегали стороны двух других цветов, а это равносильно тому, что из одной точки выходит отрезки разных цветов. Вершину мы можем выбрать 35 способами. Далее зеленый отрезок выбираем 12 способами и синий отрезок 22 способами. Но не забываем, что при таком выборе, каждый треугольник мы посчитаем по два раза, поэтому данный результат необходимо поделить на 2. Получим $(35 * 12 * 22)/2$=4620. Чтобы найти одноцветные, осталось вычесть из всех треугольников разноцветные треугольники. Это и будет ответом: $6545 - 4620 = 1925$.

3) В общем виде, что количество городов – n, а количество рейсов первой авиакомпании – k, ответ: $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-k-1)k}{2}$.

Ответ: 1925 $= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-k-1)k}{2}$.