Решения задач заочного этапа

Физтех – 2016

Задача 1

1) Если все мальчики, как и все девочки, получили одинаковое количество конфет, то справедливо будет считать, что любой мальчик получил x конфет, любая девочка получила y конфет, а всего у учительницы было z конфет.

2) Заметим, что справедливо тождество $13x + 16y = z$ (x, y, z – натуральные числа), тогда $y = \frac{z-13x}{16}$ т.е. верно сравнение $z - 13x = 0\ mod\ 16$, при этом $x \in \{1,2,3, \dots, \left[\frac{z}{13}\right]\}$, но заметим, что $3x = c\ mod\ 16$ (т.к. (3; 16)=1) имеет ровно одно решение вида $x = c'mod\ 16$, но ведь если $\left[\frac{z}{13}\right] > 16 * 2$, то сравнение $3x = c\ mod\ 16$ точно имеет решение $x = c'$ и $x = c' + 16$, поэтому $z \leq 2 * 13 * 16$.

3) Заметим, что при $z = 2 * 16 * 13 = 416$ наше исходное уравнение $13x + 16y = z$ имеет единственное решение $x = 16, y = 13$ (при $x = 32$ получается $y = 0$, что противоречит условию) т.е. максимальное значение найдено.

4) В общем случае для a конфет у мальчиков и b конфет у девочек в этой задаче ответ $2ab$.

Ответ: $2ab = 416$.

Задача 2

1) Положим, что наши исходные числа имеют вид $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$, тогда, по неравенству о средних (см. вики) имеем $\max(x_1, x_2, x_3, \dots x_{10}) > (x_1 + x_2 + \dots + x_{10})/10$ т.е. $\max(x_1, x_2, x_3, \dots x_{10}) > 15$.

2) Теперь заметим, что при $\max(x_1, x_2, x_3, \dots x_{10})=16$, $x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$ не может равняться 150, поскольку $16 + 15 + \dots + 7 = 115$. Ну а если сумма 10 максимальных элементов из всех возможных не дотягивает до 150, то и сумма никаких других 10 элементов не равна 150, ежели $\max(x_1, x_2, x_3, \dots x_{10})=16$. Из аналогичных соображений равенство не будет выполняться для $\max(x_1, x_2, x_3, \dots x_{10}) = 17,18,19$

3) Теперь попробуем сконструировать пример для $\max(x_1, x_2, x_3, \dots x_{10})=20$, и у нас это получится: 20+19+18+...+13+12+6=150.

4) Для k натуральных чисел и ср. арифметического m ответ имеет вид $\frac{2m+k}{2}$.

Ответ: $\frac{2m+k}{2} = 20$.

vk.com/postypashki

Задача 3

1) Заметим, что при всех p, при которых исходное уравнение имеет корень, сумма корней данного квадратного уравнения равна $-p$ по теореме Виета.

2) Исходное уравнение не имеет корней, когда $p^2 < 488$ т.е. для того, чтобы уравнение имело действительные корни, должно выполняться условие $|p| > 22$, а оно выполняется при $p = -35, -34, -33, \ldots, -23$.

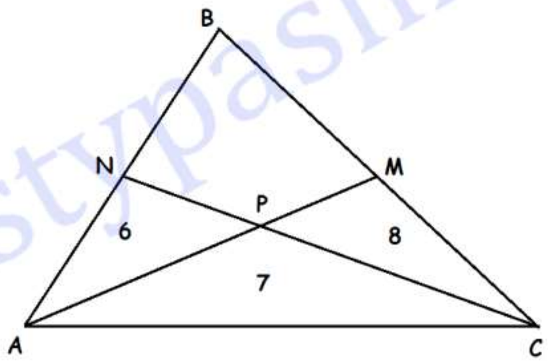
3) Просуммируем все подходящие значения p со знаком минус $35 + 34 + 33 - \cdots + 23 = 377$.

Ответ: 377.

Задача 4

1) Для начала вспомним, что $\sin x = \sin(\pi - x)$, поэтому

$\frac{S_{NPA}}{S_{APC}} = \frac{NP}{PC} = \frac{6}{7}$,



Аналогично $\frac{MP}{PA} = \frac{8}{7}$,

но ведь $\frac{S_{BPN}}{S_{BPM}+8} = \frac{NP}{PC} = \frac{6}{7}$ и $\frac{S_{BPM}}{S_{BPN}+6} = \frac{PM}{PA} = \frac{8}{7}$.

2) Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7 * S_{BPN} - 6 * S_{BPM} = 48 \\ 7 * S_{BPM} - 8 * S_{BPN} = 48 \end{cases}$$

Отсюда S_{BPN} =624; S_{BPM} =720 и $S_{ABC} = 720 + 624 + 6 + 8 + 7 = 1365$.

3) Для $S_{ANP} = a, S_{MPC} = b$ и $S_{APC} = c$ имеем

$S_{ABC} = (c + a) * ab + (c + b)ab + a + b + c$.

Ответ: $\boldsymbol{S_{ABC} = (c + a) * ab + (c + b) * ab + a + b + c = 1365}$.

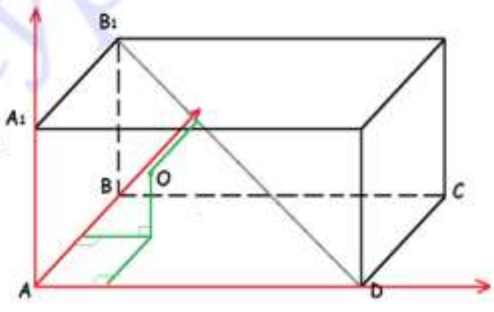
Задача 5

1) Введем систему координат, как показано на рисунке. Если искомый радиус обозначить за r, то точка O имеет координаты (r, r, r).

2) Аналогично $B_1(0, 7, 7)$, а $D(12, 0, 0)$.

3) Тогда $\overrightarrow{OB_1}\ (-r, 7-r, 7-r)$, а $\overrightarrow{OD}\ (12-r, -r, -r)$.

4) Воспользуемся векторным произведением и найдем S_{ODB_1}



$$S_{ODB_1} = \frac{1}{2} * \left|\begin{pmatrix} i & j & k \\ -r & 7-r & 7-r \\ 12-r & -r & -r \end{pmatrix}\right| = |0 * \vec{i} - (19r - 84)\vec{j} +$$

$$+(19r - 84)\vec{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{(84-19r)^2 + (84-19r)^2} = (84 - 19r)/\sqrt{2}.$$

5) С другой стороны,

$$S_{ODB_1} = \frac{1}{2} * r * B_1D = \frac{1}{2} * r * 11 * \sqrt{2}.$$

$$11r = -19r + 84, r = 2{,}8.$$

6) Для $AA_1 = a, AB = a, DA = b$ имеем $r = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}}}$.

Ответ: $\boldsymbol{r = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}}} = 2{,}8.}$

Задача 6

1) Вычтем из равенства 1 равенство 2. Получим:

$$sinx - sinz = 2cosz - 2cosx;$$

$$\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)\sin\left(\frac{x+z}{2}\right);$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{x-z}{2}\right) = 0; \\ ctg\left(\frac{x+z}{2}\right) = 2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} x - z = 2\pi k; \\ x + z = 2arcctg(2) + \pi k; \end{array}\right.$$

2) Аналогичным образом получим сообразные разности и суммы для пар (z, y) и (y, x).

3) Если всегда выполняется равенство второго типа, то $x + y + z = 3arcctg(2) + \pi k$, а подставив первый вариант в различных количествах в исходную систему, получим следующие варианты:

$$\left[\begin{array}{c} x + y + z = arcctg(3) + \pi k; \\ x + y + z = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \\ x + y + z = 2arcctg(2) + arcctg\left(\frac{1}{3}\right) + \pi k \end{array}\right.$$

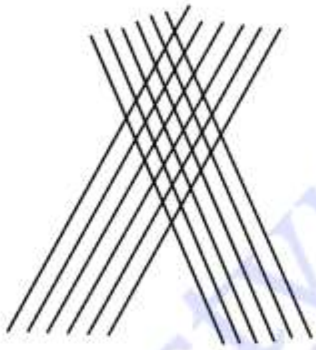
4) Просуммировав все варианты, получаем 23 точки (в общем случае аналогично).

Ответ: 23.

Задача 7

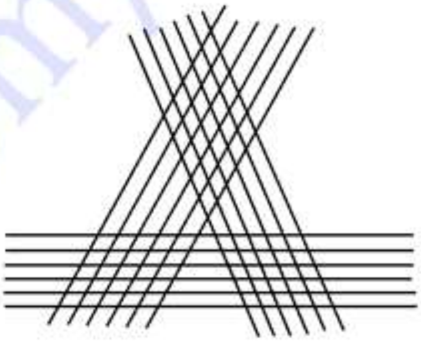
1) Для начала поймем, что n прямых разделят плоскость на $n+1$ часть.

2) Следующая группа из n прямых разделит плоскость на $(n+1)^2$ частей $(n-1)^2$ ограничены



3) Каждая прямая из последней группы пересечет предыдущую в n точках. Тогда мы получим еще два параллелограмма как на втором рисунке и еще 3 треугольника, разделенных на n частей, которые пересекаются в одном треугольнике, поэтому общее число частей, на которые делят плоскость треугольники $3n-2$.

4) Для n прямых в итоге получается $3(n-1)^2+3n-2$.



Ответ: $\mathbf{3(n-1)^2+3n-2}$**.**

Задача 8

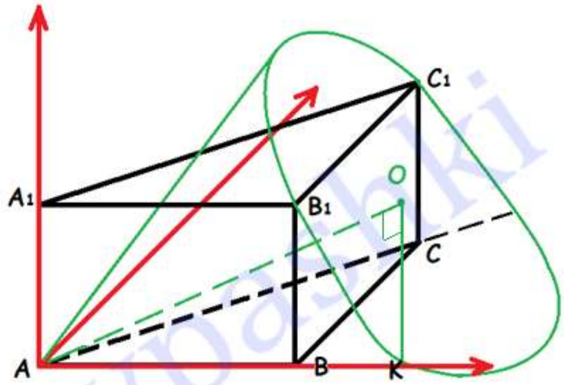
1) Рассмотрим исходное выражение как квадратный трехчлен относительно y. Получим: $-5y^2x^2+yx^3$. Максимум данного выражения достигается в точке $b_0=-\frac{x^3}{-10x^2}=\frac{x}{10}$.

2) Подставим полученное значение в исходное выражение. Получим: $-\frac{5x^4}{100}+\frac{x^4}{10}=\frac{5x^4}{100}=\frac{x^4}{20}$

3) Поскольку $x\in[0;3]$, максимум будет достигаться при $x=3$ (y в данном случае будет равен $\frac{3}{10}$ (что удовлетворяет исходному условию)), поэтому $\max(-5y^2x^2+yx^3)=4{,}05$.

Ответ: $\mathbf{4,05}$**.**

Задача 9



1) Введем систему координат, как показано на рисунке. $K-(.)$ пересечения окружности O и прямой AB.

2) Осознаем, что AB_1- длина образующей конуса (поскольку $B_1 \in O$), но тогда $AK = AB_1$, поскольку AK является образующей конуса.

3) $K(7,0,0)$; $B_1(5,0,\sqrt{24})$; $C(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, \sqrt{24})$

4) Мы получили три точки, принадлежащие плоскости, содержащей окружность O. Найдем ее уравнение:

$$\begin{bmatrix} x-7 & y & z \\ -2 & 0 & \sqrt{24} \\ -\frac{9}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{2} & \sqrt{24} \end{bmatrix} = x(-15\sqrt{2}) + y(-5\sqrt{6}) + z(-5\sqrt{3}) + 105\sqrt{2}$$

5) Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости и найдем AO:

$$AO = \frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

6) Тогда $cos \propto = \frac{AO}{AB_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $sin \propto = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а $tg^2 \propto = \frac{1}{2}$.

7) В общем случае при $AB_1 = a$, $AB = b$ получаем $\frac{4a-2b}{3a+3b}$.

Ответ: $\boldsymbol{\frac{4a-2b}{3a+3b} = \frac{1}{2}}$.

Задача 10

1) Для начала наглядно представим наше условие в виде таблицы (по вертикали занумерованы путешественники, а по горизонтали города, «-» означает, что человек не был в городе, « » обратное)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-										
3	-					-	-	-	-						
4		-				-				-	-	-			
5			-				-			-			-	-	
6				-				-			-		-		-
7					-				-			-		-	-

2) Теперь проанализируем наше условие: если любые 4 человека были во всех городах, то очевидно, что любой город должны были посетить 4 человека (в противном случае можно было бы выбрать 4-х человек, которые не были в каком-то городе, а это противоречит условию).

3) Если мы возьмем группу из путешественников 1,2,3, то должен существовать город, который не посетил никто из них (будем считать, что это город 1), и отметим полученные данные в нашей таблице. Теперь аналогичные действия проделаем с путешественниками вида $1, a, b$ где a и b $\in [1, 7]$, при этом $a < b$. После всех действий получим табличку.

4) Аналогичные действие проведем для троек вида (2,…,…), (3, …, …) и т.д.. Можно заметить, что в каждом из вариантов искомое количество элементов равно C_k^2. В итоге получаем $C_6^2 + C_5^2 + C_4^2 + \cdots C_2^2 = C_7^3$.

5) При этом заметим, что любые четыре человека действительно посетят все города, а любые три человека в совокупности не посетят только один город, поэтому данный вариант является минимальным.

6) В общем случае имеем: C_n^k, где n — количество путешественников, а k – количество путешественников НЕ посетивших все города.

Ответ: $\boldsymbol{C_n^k = 35}$.

Задача 11

1) Минимум за n действий можно освободить первую ветку от вагончиков.

2) Минимум за n действий можно вернуть все вагончики на первую платформу.

3) Для того, чтобы дать ответ необходимо лишь понять сколько действий придется потратить на обратное упорядочивание.

4) В итоге легко оценить все дело $3n - 2$ и подобрать соответствующую стратегию.

Ответ: $\boldsymbol{3n - 2 = 100}$.

vk.com/postypashki

Задача 12

1) Для начала заметим, что $f\left(k^2+k+\frac{1}{4}\right)=k+1$. Действительно, ведь $k^2+k+\frac{1}{4}=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$, а ближайшее натуральное число к $k+\frac{1}{2}$ это $k+1$. При этом, $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$, очевидно, является минимальным значением n, таким, что $f(n)=k+1$.

2) Теперь осознаем, что $f(k^2+3k+2.25)=k+2$. При этом, $\left(k+\frac{3}{2}\right)^2$ является минимальным значением n, таким, что $f(n)=k+2$.

3) Т.е. при $n\in[k^2+k+1; k^2+3k+2]$ $f(n)=k+1$, а $g(n)=\frac{1}{k+1}$ соответственно. Получилось, что в исходной сумме мы имеем $k^2+3k+2-k^2-k-1+1=2k+2$ слагаемых вида $\frac{1}{k+1}$, поэтому их сумма равна $\frac{2k+2}{k+1}=2$.

4) Отлично! Теперь мы осознали, что сумма

$g(k^2+k+1)+g(k^2+k+2)+\cdots+g(k^2+3k+2)$=2.

Осталось только понять, с какого k начинается наша сумма и каким заканчивается.

5) Заметим, что $343=18^2+18+1$, а $1681=41^2$, т.е. все подгруппы наших чисел, кроме последней, можно смело приравнивать к двойке. Группа чисел от $g(1600+40+1)$ до $g(1681)$ в сумме будет образовывать ровно половину первичного цикла, а поскольку все элементы в группе равны, то сумма чисел $g(1641)+g(1642)+\cdots+g(1681)=1$.

6) Дело за малым: для ответа необходимо лишь узнать количество двоек. Но можно заметить, что первое, k при котором начинаются наши циклы равно 18, а последнее k, при котором полные циклы заканчиваются, равно 40. Поэтому количество двоек равно $40-18-1=21$. В итоге получаем $2*21+1=43$.

7) В общем виде при первом числе a и последнем числе b получится $\left(\sqrt{b}-x_1-1\right)*2+1$, где x_1- положительный корень уравнения $x^2+x+1=a$.

Ответ: $\boldsymbol{\left(\sqrt{b}-x_1-1\right)*2+1=43}$**.**