Открытая олимпиада школьников по математике

13 марта 2014 г.

11 класс

1 вариант

Ответы, решения и критерии

1. (1 балл) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_z y = \frac{y}{2} \\ \log_y x = z \\ \log_x z = \frac{1}{y} \end{cases}$$

Ответ: $x = 4$, $y = 2$, $z = 2$ или $x = 16$, $y = 4$, $z = 2$.

Решение: Заметим, что произведение левых частей этих уравнений равно 1. Значит, и произведение правых частей также равно 1. Следовательно, $z = 2$. Подставляем это значение в первое уравнение, получаем $\log_2 y = \frac{y}{2}$, откуда $\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln 2}{2}$.

Производная функции $\frac{\ln y}{y}$ равна $\frac{1-\ln y}{y^2}$. Таким образом, при $y \leqslant e$ эта функция возрастает, а при $y \geqslant e$ убывает. Значит, одно и то же значение эта функция может принимать не более чем в двух точках. Эти точки легко подобрать: $y = 2$ и $y = 4$. Зная z и y, находим x.

Критерии проверки: Получено уравнение $\log_2 y = \frac{y}{2}$ или эквивалентное ему, не доведено до ответа или угадан только один ответ: 0,5 балла.

2. (2 балла) Костя взял функцию $f(x) = x^{2014}2^{\cos x} + x^3 + 2$ и обнаружил, что ее тринадцатая производная имеет ровно 2014 корней. Не ошибается ли он?

Ответ: Ошибается.

Решение: Тринадцатая производная данной функции совпадает с тринадцатой производной функции $f(x) = x^{2014}2^{\cos x}$. Эта функция чётная, значит, её производные чётного порядка — чётные функции, а производные нечётного порядка — нечётные функции. Таким образом, все корни любой её производной симметричны относительно оси ординат. При $x = 0$ эта тринадцатая производная равна нулю, так как если продифференцировать функцию по формуле производной произведения, в производной окажется два слагаемых, содержащих множитель x^{2013}, у второй производной в каждом слагаемом будет множитель x^{2012} и так далее, у тринадцатой производной будет множитель x^{2001}.

Значит, у тринадцатой производной данной функции нечётное или бесконечное число корней, но никак не чётное.

Критерии проверки: Утверждения о том, что тринадцатая производная чётной функции нечётна и о том, что тринадцатая производная имеет корень в точке 0, считать очевидными.

3. (3 балла) Найдите минимальное значение выражения

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + \ldots + x_{99}x_{100} + x_{100}^2 + 2x_{100}.$$

Ответ: $-\frac{200}{101}$.

Решение: Разобъём это выражение, кроме последнего и частично предпоследнего слагаемого в сумму полных квадратов вида $a_i^2x_i^2 + 2a_ib_ix_ix_{i+1} + b_i^2x_{i+1}^2$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 2b_ia_i = 1 \\ b_i^2 + a_{i+1}^2 = 1 \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_i = \frac{1}{2a_i} \\ a_{i+1}^2 = 1 - \frac{1}{4a_i^2} \end{cases}$$

Докажем, что $a_i^2 = \frac{i+1}{2i}$. При $i = 1$ утверждение выполняется. Пусть $a_{i-1}^2 = \frac{i}{2i-2}$. Тогда $a_i^2 = 1 - \frac{2i-2}{4i} = \frac{i+1}{2i}$. Соответственно, $b_i^2 = \frac{1}{4a_i^2} = \frac{2i}{4(i+1)} = \frac{i}{2(i+1)}$. Заметим, что числа b_i^2 и a_i^2 получились положительными, так что наше разложение в сумму полных квадратов корректно.

Таким образом, $b_{99}^2 = \frac{99}{200}$. Значит, исходное выражение представляет из себя сумму некоторого количества полных квадратов и $\frac{101}{200}x_{100}^2 + 2x_{100}$. При добавлении к этому выражению числа $\frac{200}{101}$ оно становится полным квадратом.

Следовательно, исходное выражение можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{99}(a_ix_i + b_ix_{i+1})^2 + \left(\sqrt{\frac{101}{200}}x_{100} + \sqrt{\frac{200}{101}}\right)^2 - \frac{200}{101} \geqslant -\frac{200}{101}.$$

При этом минимальное значение достигается при $x_{100} = -\frac{200}{101}$, каждый из оставшихся x_i можно выразить через следующий по номеру, приравняв к 0 соответствующий полный квадрат.

Критерии проверки:

Если формула для a_i или b_i угадана, но не доказана, всё остальное верно: 1 балл

Не объяснено, почему минимальное значение достигается: снять 1 балл.

4. (3 балла) Точки D и E находятся по разные стороны плоскости ABC. Сферы S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 описаны вокруг тетраэдров $DABC$ и $EABC$ соответственно, при этом точка O_1 лежит на сфере S_2 и наоборот, точка O_2 лежит на сфере S_1. В треугольнике ABC угол $\angle A = 45°$, угол $\angle B = 60°$, а площадь этого треугольника составляет $3 + \sqrt{3}$ квадратных сантиметров. Известно, что $DE \geqslant 2AC$. Найдите сумму объёмов тетраэдров $DABC$ и $EABC$.

Ответ: $4(\sqrt{3}+1)$ кубических сантиметров.

Решение: Если центр одной сферы находится на другой, значит расстояние между центрами сфер равно радиусу первой сферы. Значит, оба радиуса и расстояние между центрами сфер равны. Следовательно $\triangle O_1O_2A$, $\triangle O_1O_2B$ и $\triangle O_1O_2C$ — равные равносторонние треугольники, их высота — радиус описанной окружности $\triangle ABC$, а середина отрезка O_1O_2 — её центр. Обозначим радиус сфер за R, радиус описанной окружности $\triangle ABC$ за r.

Вычислим значение этого радиуса исходя из формулы, связывающей радиус описанной окружности и площадь треугольника:

$$r^2 = \frac{S}{2\sin 60° \sin 45° \sin 75°} = \frac{3+\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = 4$$

откуда $r = 2$. Следовательно, $R = r : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Кроме того, из теоремы синусов найдём $AC = 2r\sin 60° = 2\sqrt{3}$. То есть $3R = 2AC$.

Это значит, $DE \geqslant 3R$. Но $DE \leqslant DO_1 + O_1O_2 + O_2E = 3R$. Следовательно, $DE = 3R = 4\sqrt{3}$, а точки D, O_1, O_2, E лежат на одной прямой. Кроме того, эта прямая O_1O_2 перпендикулярна плоскости ABC, поэтому высота каждого из тетраэдров равна $\frac{DE}{2} = 2\sqrt{3}$. Значит, сумма объёмов тетрадров равна $\frac{2\cdot 2\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{3} = 4(\sqrt{3}+1)$.

Критерии проверки: За каждую арифметическую ошибку, несущественно повлиявшую на ход решения (но, возможно, повлиявшую на ответ) снимать 1 балл.

Если у участника в результате арифметической ошибки после вычисления радиусов сфер получилось, что неравенство $DE \geqslant 2AC$ никогда не выполняется, ставить не больше 1 балла.

5. (4 балла) Точка D взята на стороне AC треугольника ABC, длина отрезка BD составляет 16 см. Вписанные окружности треугольников ABD и CBD касаются стороны AC в точках K и M и имеют радиусы 4 см и 9 см соответственно. Кроме того, обе эти окружности касаются прямой BD в точке H. Проекции некоторой точки E на прямые AB и BD — точки X и Y соответственно. При этом точка X не лежит на отрезке AB, длина отрезка BX равна 10 см. Четырёхугольник $KHMY$ — параллелограмм. Найдите длину отрезка EX.

Ответ: 42,4 см.

Решение: Обозначим меньший из радиусов окружностей за r, больший — за R. Тогда $MK^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$, то есть $MK = 2\sqrt{Rr} = 12$ см. Значит, $KD = HD = MD = 6$ см. Следовательно, $BH = BD - DH = 10$ см.

Пусть F — точка пересечения O_1O_2 и EX. Найдём отдельно отрезки EF и FX.

Так как $BX = BH = 10$ см, прямоугольные треугольники $\triangle FBX$ и $\triangle FBH$ равны по гипотенузе и катету, значит, $FX = FH = BH \cdot \operatorname{ctg}\angle BFH$. Но $\angle BFH = \frac{\angle HFX}{2} = \frac{180° - \angle HBX}{2} = \frac{\angle ABH}{2}$, то есть $\operatorname{ctg}\angle BFH = \operatorname{ctg}\frac{\angle ABH}{2} = \frac{BH}{r} = 2,5$. Следовательно, $FX = \frac{BH^2}{r} = 25$ см.

Теперь найдём длину отрезка EF. Так как $KHMY$ — параллелограмм, отрезки KM и HY делятся точкой пересечения пополам. Но середина KM — это точка D, значит $KD = HD = MD = DY = 6$ см и эти четыре точки лежат на некоторой окружности, причём HY — её диаметр. Так как прямые O_1O_2 и EY перпендикулярны HY, они параллельны между собой. Опустим их точки F перпендикуляр FP на EY. Тогда $HFPY$ — прямоугольник, $FP = HY = 12$ см. Ну а $EF = \frac{FP}{\sin\angle PEF}$.

Угол $\angle PEF$ равен углу $\angle HFX$ как соответственный, а $\operatorname{tg}\frac{\angle HFX}{2} = \frac{5}{2}$. Значит, используя универсальную тригонометрическую подстановку, $\sin\angle PEF = \frac{2\cdot\frac{2}{5}}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{1,45}$. Получаем $EF = 12 \cdot 1,45 = 17,4$ см.

Таким образом, $EX = 42,4$ см.

Критерии проверки: За каждую арифметическую ошибку, несущественно повлиявшую на ход решения (но, возможно, повлиявшую на ответ) снимать 1 балл.

6. (5 баллов) В таблице 30×30 клеток поставлено 162 плюса и 144 минуса (в каждой клетке не более одного знака) так, что в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит не более 17 знаков. Для каждого плюса подсчитали, сколько минусов находится в той же строке. Для каждого минуса подсчитали, сколько плюсов находится в том же столбце. Какое наибольшее значение может иметь сумма найденных чисел?

Ответ: $2 \cdot 18 \cdot 72 = 2592$.

Решение:

В утверждении задачи фигурируют два типа чисел: “горизонтальные” (которые считаются для плюсов) и “вертикальные” (для минусов). Покажем, что максимальные значения сумм чисел каждого вида достигаются на одной и той же конфигурации.

Рассмотрим произвольную строку таблицы. Пусть она содержит p плюсов и k минусов, $k + p \leq 17$. Тогда сумма, которую мы посчитаем для плюсов в этой строке, равна kp. Распределим эту сумму поровну между всеми знаками в строке. Более строго, запишем число $kp/(k + p)$ в каждую непустую клетку этой строки. Теперь “горизонтальная” сумма в точности равна сумме всех 306 записанных чисел.

Найдём максимальное значение выражения $f(k, p) = kp/(k + p)$ при $k + p \leq 17$. Заметим, что $f(k, p)$ возрастающая функция от k. Значит, при $k + p < 17$ при увеличении k и сохранении p значение $f(k, p)$ также будет увеличиваться, то есть максимум достигается при $k + p = 17$. В этом случае $f(k, p) = k(17 - k)/17$ и имеет максимум равный $\frac{72}{17}$ при $k = 8$ или $k = 9$.

Таким образом, каждое из 306 суммируемых чисел будет максимально, если мы найдём конфигурацию в которой любая непустая строка содержит ровно 9 плюсов и 8 минусов (исходя из общего количества плюсов и минусов потребуется 18 таких строк.

Аналогично доказывается, что максимум “вертикальных” сумм достигается на конфигурации, в которой в каждом столбце ровно 8 минусов и 9 плюсов.

На рисунке изображён квадрат 18×18, соответствующий этой конфигурации. Остальные клетки таблицы остаются пустыми.

```
+   - - - - - - - - + + + + + + + +
+ +   - - - - - - - - + + + + + + +
+ + +   - - - - - - - - + + + + + +
+ + + +   - - - - - - - - + + + + +
+ + + + +   - - - - - - - - + + + +
+ + + + + +   - - - - - - - - + + +
+ + + + + + +   - - - - - - - - + +
+ + + + + + + +   - - - - - - - - +
+ + + + + + + + +   - - - - - - - -
- + + + + + + + + +   - - - - - - -
- - + + + + + + + + +   - - - - - -
- - - + + + + + + + + +   - - - - -
- - - - + + + + + + + + +   - - - -
- - - - - + + + + + + + + +   - - -
- - - - - - + + + + + + + + +   - -
- - - - - - - + + + + + + + + +   -
- - - - - - - - + + + + + + + + +
  - - - - - - - - + + + + + + + + +
```

Критерии проверки:

Оценка без примера: 4 балла. Оценки нет или она неверна, но замечено, в какой ситуации достигается максимальная сумма по строке/столбцу: 1 балл Пример без оценки: 1 балл.

7. (5 баллов) Положительные числа удовлетворяют соотношению $xy + yz + xz = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x^3}{x^2 + yz} + \frac{y^3}{y^2 + zx} + \frac{z^3}{z^2 + xy} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение:

Представив каждое слагаемое в виде $\frac{a^3}{a^2+bc} = a - \frac{abc}{a^2+bc}$, запишем неравенство в виде

$$x + y + z \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + xyz\left(\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy}\right).$$

По неравенству о средних $x^2 + yz \geqslant 2x\sqrt{yz}$ и т.п., таким образом, достаточно проверить, что

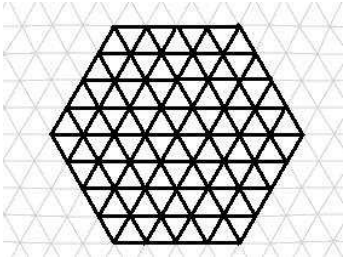
$$x + y + z \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}).$$

Поскольку $\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-z)^2}{2} + \frac{(z-y)^2}{2} \geqslant 0$,значит, $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz = 1$. Получаем $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \geqslant 3$, откуда $x + y + z \geqslant \sqrt{3}$.

Взяв полусумму этого неравенства и неравенства $x+y+z \geqslant \sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}$ получаем требуемое неравенство.

Критерии проверки: Неравенства о средних для любого количества чисел считать известными.

8. (5 баллов) Костя купил тетрадку «в треугольничек», все клетки которой являются равносторонними треугольниками со стороной 1, и рисует в этой тетрадке равносторонние треугольники по линиям сетки. Какое наименьшее количество треугольников ему необходимо нарисовать, чтобы в итоге у него получится правильный шестиугольник со стороной $n = 21$, разбитый на треугольники со стороной 1? Пример требуемой фигуры для $n = 4$ изображен на рисунке (правильным называется шестиугольник, все стороны которого равны и все углы также равны).



Ответ: 66

Решение:

Сначала построим пример:

Весь шестиугольник покрывается 129 прямыми (43 прямые каждого из трёх направлений). Отрезки, по которым эти прямые пересекаются с шестиугольником, назовём “короткими”, если они имеют длину не больше 31 (их 66 штук), и “длинными”, если они имеют длину хотя бы 32 (63 штуки).

Заметим, что в любом узле треугольной решётки, лежащем на границе, но не в вершине шестиугольника, сходятся два отрезка “короткий” и “длинный” (сумма их длин равна 63). В вершине же сходятся два “коротких” и один “длинный”. Значит, на любом “коротком” отрезке, как на одной из сторон, можно построить равносторонний треугольник (лежащий внутри нашего шестиугольника), оставшиеся две стороны которого будут лежать на двух “длинных” отрезках.

Рассмотрим все такие треугольники, их 66 штук. Докажем, что они покрывают все требуемые отрезки. Действительно, любой отрезок треугольной сетки, лежащий внутри шестиугольника, является частью либо “короткого”, либо “длинного” отрезка. Наши 66 треугольников покрывают все “короткие” отрезки по определению этих треугольников. Что касается “длинных” отрезков, то оба конца каждого из них являются в то же время концами каких-то “коротких” отрезков, то есть вершинами наших треугольников. Значит, на этом “длинном” отрезке лежат две стороны наших треугольников. Поскольку один “длинный” отрезок не длиннее, чем два “коротких”, эти стороны покрывают его целиком.

Таким образом, и “короткие”, и “длинные” отрезки оказываются покрыты этими 66 треугольниками.

Теперь докажем, что число 66 — наименьшее.

Каждому отрезку длины 1, выходящему из точки на стороне (но не в вершине) внутрь шестиугольника, сопоставим “стоимость” 1. Таких отрезков вдвое больше, чем точек на сторонах (не считая вершин), то есть 240. Каждому отрезку длины 1, выходящему из вершины шестиугольника и лежащему на его стороне, сопоставим “стоимость” 2. Таких отрезков 12, их суммарная “стоимость” 24.

Так как только две вершины равностороннего треугольника могут лежать на границе шестиугольника, максимальная суммарная “стоимость” рёбер, входящих в один равносторонний треугольник, равна 4. Значит, нам требуется хотя бы $264 : 4 = 66$ треугольников.

Критерии проверки:

Оценка без примера: 3 балла. Пример без оценки (с доказательством того, что это пример удовлетворяет условию задачи): 2 балла. Пример без (без доказательства того, что это пример удовлетворяет условию задачи): 1 балл

Открытая олимпиада школьников по математике

13 марта 2014 г.

11 класс

2 вариант

Ответы, решения и критерии

1. (1 балл) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_y x = \frac{2}{y} \\ \log_x z = y \\ \log_z y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 4$ или $x = 2$, $y = 4$, $z = 16$.

Решение: Заметим, что произведение левых частей этих уравнений равно 1. Значит, и произведение правых частей также равно 1. Следовательно, $x = 2$. Подставляем это значение в первое уравнение, получаем $\log_y 2 = \frac{2}{y}$, откуда $\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln 2}{2}$.

Производная функции $\frac{\ln y}{y}$ равна $\frac{1-\ln y}{y^2}$. Таким образом, при $y \leqslant e$ эта функция возрастает, а при $y \geqslant e$ убывает. Значит, одно и то же значение эта функция может принимать не более чем в двух точках. Эти точки легко подобрать: $y = 2$ и $y = 4$. Зная x и y, находим z.

Критерии проверки: Получено уравнение $\log_2 y = \frac{y}{2}$ или эквивалентное ему, не доведено до ответа или угадан только один ответ: 0,5 балла.

2. (2 балла) Костя взял функцию $f(x) = x^{2013}3^{\sin^2 x} + x^5 + 1$ и обнаружил, что ее четырнадцатая производная имеет ровно 2014 корней. Не ошибается ли он?

Ответ: Ошибается.

Решение: Четырнадцатая производная данной функции совпадает с четырнадцатой производной функции $f(x) = x^{2013}2^{\sin^2 x}$. Эта функция нечётная, значит, её производные чётного порядка — нечётные функции, а произодные нечётного порядка — чётные функции. Таким образом, все корни любой её производной симметричны относительно оси ординат. При $x = 0$ эта тринадцатая производная равна нулю, так как если продифференцировать функцию по формуле производной произведения, в производной окажется два слагаемых, содержащих множитель x^{2012}, у второй производной в каждом слагаемом будет множитель x^{2011} и так далее, у тринадцатой производной будет множитель x^{1999}.

Значит, у четырнадцатой производной данной функции нечётное или бесконечное число корней, но никак не чётное.

Критерии проверки: Утверждения о том, что четырнадцатая производная чётной функции нечётна и о том, что четырнадцатая производная имеет корень в точке 0, считать очевидными.

3. (3 балла) Найдите максимальное значение выражения

$$-y_1^2 + y_1y_2 - y_2^2 + y_2y_3 - y_3^2 + \ldots + y_{100}y_{101} - y_{101}^2 + y_{101}.$$

Ответ: $\frac{101}{204}$.

Решение: Домножим выражение на -1, получим

$$y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 - y_2y_3 + y_3^2 - \ldots - y_{100}y_{101} + y_{101}^2 - y_{101}.$$

Обозначим $y_{102} = 1$. Докажем, что можно добавить к исследуемому выражению такое число $b_{101}^2 = b_{101}^2y_{102}^2$, что оно разобьётся в сумму полных квадратов вида $a_i^2y_i^2 - 2a_ib_iy_iy_{i+1} + b_i^2y_{i+1}^2$ для всех i от 1 до 101 включительно.

Для этого необходимо и достаточно выполнение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 2b_ia_i = 1 \\ b_i^2 + a_{i+1}^2 = 1 \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_i = \frac{1}{2a_i} \\ a_{i+1}^2 = 1 - \frac{1}{4a_i^2} \end{cases}$$

Докажем, что $a_i^2 = \frac{i+1}{2i}$. При $i = 1$ утверждение выполняется. Пусть $a_{i-1}^2 = \frac{i}{2i-2}$. Тогда $a_i^2 = 1 - \frac{2i-2}{4i} = \frac{i+1}{2i}$. Соответственно, $b_i^2 = \frac{1}{4a_i^2} = \frac{2i}{4(i+1)} = \frac{i}{2(i+1)}$. Заметим, что найденные числа b_i^2 и a_i^2 получились положительными, так что наше разложение в сумму полных квадратов корректно.

Таким образом, $b_{101}^2 = 1 - a_{101}^2 = \frac{101}{204}$. Следовательно, исходное выражение можно представить в виде

$$-\sum_{i=1}^{101}(a_iy_i + b_iy_{i+1})^2 + b_{101}^2y_{102^2} = -\sum_{i=1}^{101}(a_iy_i + b_iy_{i+1})^2 + \frac{101}{204} \leqslant \frac{101}{204}.$$

При этом минимальное значение достигается при каком-то наборе значений y_i. Действительно, приравняв к 0 последний полный квадрат, найдём y_{101}, далее каждый из оставшихся y_i можно выразить через следующий по номеру, приравняв к 0 соответствующий полный квадрат.

Критерии проверки:

Если формула для a_i или b_i угадана, но не доказана, всё остальное верно: 1 балл

Не объяснено, почему минимальное значение достигается: снять 1 балл.

4. (3 балла) Точки P и Q находятся по разные стороны плоскости ABC. Сферы S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 описаны вокруг тетраэдров $PABC$ и $QABC$ соответственно, при этом точка O_1 лежит на сфере S_2 и наоборот, точка O_2 лежит на сфере S_1. В треугольнике ABC угол $\angle A = 30°$, угол $\angle B = 75°$, а площадь этого треугольника составляет 8 квадратных сантиметров. Известно, что $PQ \geqslant 2\sqrt{3}BC$. Найдите сумму объёмов тетраэдров $PABC$ и $QABC$.

Ответ: $64\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ сантиметров кубических.

Решение: Если центр одной сферы находится на другой, значит расстояние между центрами сфер равно радиусу первой сферы. Значит, оба радиуса и расстояние между центрами сфер равны. Следовательно $\triangle O_1O_2A$, $\triangle O_1O_2B$ и $\triangle O_1O_2C$ — равные равносторонние треугольники, их высота — радиус описанной окружности $\triangle ABC$, а середина отрезка O_1O_2 — её центр. Обозначим радиус сфер за R, радиус описанной окружности $\triangle ABC$ за r.

Вычислим значение этого радиуса исходя из формулы, связывающей радиус описанной окружности и площадь треугольника:

$$r^2 = \frac{S}{2\sin 30°\sin 75°\sin 75°} = \frac{8}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{64}{(\sqrt{3}+1)^2} = 16(\sqrt{3}-1)^2$$

откуда $r = 4(\sqrt{3}-1)$. Следовательно, $R = r : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Кроме того, из теоремы синусов найдём $BC = 2r\sin 30° = r = 4(\sqrt{3}-1)$. То есть $3R = 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}BC$.

Это значит, $PQ \geqslant 3R$. Но $PQ \leqslant PO_1+O_1O_2+O_2Q = 3R$. Следовательно, $PQ = 3R = 8(3-\sqrt{3})$, а точки P, O_1, O_2, Q лежат на одной прямой. Кроме того, эта прямая O_1O_2 перпендикулярна плоскости ABC, поэтому высота каждого из тетраэдров равна $\frac{PQ}{2} = 4(3-\sqrt{3})$. Значит, сумма объёмов тетрадров равна $\frac{2\cdot 4(3-\sqrt{3})\cdot 8}{3} = 64\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Критерии проверки: За каждую арифметическую ошибку, несущественно повлиявшую на ход решения (но, возможно, повлиявшую на ответ) снимать 1 балл.

Если у участника в результате арифметической ошибки после вычисления радиусов сфер получилось, что неравенство $PQ \geqslant 2\sqrt{3}BC$ никогда не выполняется, ставить не больше 1 балла.

5. (4 балла) Точка D взята на стороне AB треугольника ABC, длина отрезка CD составляет 30 см. Вписанные окружности треугольников BCD и ACD касаются стороны AB в точках M и K и имеют радиусы 9 см и 16 см соответственно. Кроме того, обе эти окружности касаются прямой CD в точке H. Проекции некоторой точки F на прямые BC и CD — точки X и Y соответственно. При этом точка X не лежит на отрезке BC, длина отрезка CX равна 18 см. Четырёхугольник $KHMY$ — параллелограмм. Найдите длину отрезка FX.

Ответ: 66 см.

Решение: Обозначим меньший из радиусов окружностей за r, больший — за R. Тогда $MK^2 = (R+r)^2-(R-r)^2 = 4Rr$, то есть $MK = 2\sqrt{Rr} = 24$ см. Значит, $KD = HD = MD = 12$ см. Следовательно, $CH = CD - DH = 18$ см.

Пусть E — точка пересечения O_1O_2 и FX. Найдём отдельно отрезки EF и EX.

Так как $CX = CH = 18$ см, прямоугольные треугольники $\triangle ECX$ и $\triangle ECH$ равны по гипотенузе и катету, значит, $EX = EH = CH\cdot\operatorname{ctg}\angle CEH$. Но $\angle CEH = \frac{\angle HEX}{2} = \frac{180°-\angle HCX}{2} = \frac{\angle BCH}{2}$, то есть $\operatorname{ctg}\angle CEH = \operatorname{ctg}\frac{\angle BCH}{2} = \frac{CH}{r} = 2$. Следовательно, $EX = \frac{CH^2}{r} = 36$ см.

Теперь найдём длину отрезка EF. Так как $KHMY$ — параллелограмм, отрезки KM и HY делятся точкой пересечния пополам. Но середина KM — это точка D, значит $KD = HD = MD = DY = 12$ см и эти четыре точки лежат на некоторой окружности, причём HY — её диаметр. Так как прямые O_1O_2 и FY перпендикулярны HY, они параллельны между собой. Опустим их точки E перпендикуляр EP на FY. Тогда $HEPY$ — прямоугольник, $EP = HY = 24$ см. Ну а $EF = \frac{EP}{\sin\angle PFE}$.

Угол $\angle PFE$ равен углу $\angle HEX$ как соответственный, а $\operatorname{tg}\frac{\angle HEX}{2} = 0,5$. Значит, используя универсальную тригонометрическую подстановку, $\sin\angle PFE = \frac{2\cdot 0,5}{1+0,5^2} = \frac{1}{1,25}$.

Получаем $EF = 24\cdot 1,25 = 30$ см.

Таким образом, $EX = 66$ см.

Критерии проверки: За каждую арифметическую ошибку, несущественно повлиявшую на ход решения (но, возможно, повлиявшую на ответ) снимать 1 балл.

6. (5 баллов) В таблице 32×32 клеток поставлено 180 плюсов и 200 минусов (в каждой клетке не более одного знака) так, что в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит не более 19 знаков. Для каждого плюса подсчитали, сколько минусов находится в том же столбце. Для каждого минуса подсчитали, сколько плюсов находится в той же строке. Какое наибольшее значение может иметь сумма найденных чисел?

Ответ: $2 \cdot 90 \cdot 20 = 3600$.

Решение:

В утверждении задачи фигурируют два типа чисел: “горизонтальные” (которые считаются для минусов) и “вертикальные” (для плюсов). Покажем, что максимальные значения сумм чисел каждого вида достигаются на одной и той же конфигурации.

Рассмотрим произвольную строку таблицы. Пусть она содержит p плюсов и k минусов, $k + p \leq 19$. Тогда сумма, которую мы посчитаем для минусов в этой строке, равна kp. Распределим эту сумму поровну между всеми знаками в строке. Более строго, запишем число $kp/(k+p)$ в каждую непустую клетку этой строки. Теперь “горизонтальная” сумма в точности равна сумме всех 380 записанных чисел.

Найдём максимальное значение выражения $f(k,p) = kp/(k+p)$ при $k + p \leq 19$. Заметим, что $f(k,p)$ возрастающая функция от k. Значит, при $k + p < 19$ при увеличении k и сохранении p значение $f(k,p)$ также будет увеличиваться, то есть максимум достигается при $k + p = 19$. В этом случае $f(k,p) = k(19-k)/19$ и имеет максимум равный $\frac{190}{19}$ при $k = 9$ или $k = 10$.

Таким образом, каждое из 380 суммируемых чисел будет максимально, если мы найдём конфигурацию в которой любая непустая строка содержит ровно 9 плюсов и 10 минусов (исходя из общего количества плюсов и минусов потребуется 20 таких строк.

Аналогично доказывается, что максимум “вертикальных” сумм достигается на конфигурации, в которой в каждом столбце ровно 10 минусов и 9 плюсов.

На рисунке изображён квадрат 20×20, соответствующий этой конфигурации. Остальные клетки таблицы остаются пустыми.

```
+ - - - - - - - - - -   + + + + + + + +
+ + - - - - - - - - - - - + + + + + + +
+ + + - - - - - - - - - - -   + + + + + +
+ + + + - - - - - - - - - - -   + + + + +
+ + + + + - - - - - - - - - - -   + + + +
+ + + + + + - - - - - - - - - - -   + + +
+ + + + + + + - - - - - - - - - - -   + +
+ + + + + + + + - - - - - - - - - - -   +
+ + + + + + + + + - - - - - - - - - - -
  + + + + + + + + + - - - - - - - - - - -
-   + + + + + + + + + - - - - - - - - - -
- -   + + + + + + + + + + - - - - - - - -
- - -   + + + + + + + + + + - - - - - - -
- - -   + + + + + + + + + + - - - - - -
- - - -   + + + + + + + + + + - - - - -
- - - - -   + + + + + + + + + + - - - -
- - - - - -   + + + + + + + + + + - - -
- - - - - - -   + + + + + + + + + + - -
- - - - - - - -   + + + + + + + + + - -
- - - - - - - - -   + + + + + + + + - -
- - - - - - - - - -   + + + + + + + - -
```

Критерии проверки:

Оценка без примера: 4 балла. Оценки нет или она неверна, но замечено, в какой ситуации достигается максимальная сумма по строке/столбцу: 1 балл Пример без оценки: 1 балл.

7. (5 баллов) Положительные числа удовлетворяют соотношению $xy + yz + xz = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{x^3}{x^2+2yz} + \frac{y^3}{y^2+2zx} + \frac{z^3}{z^2+2xy} \geqslant 1.$$

Решение: Представив каждое слагаемое в виде $\frac{a^3}{a^2+2bc} = a - \frac{2abc}{a^2+2bc}$, запишем неравенство в виде

$$x + y + z \geqslant 1 + 2xyz\left(\frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy}\right).$$

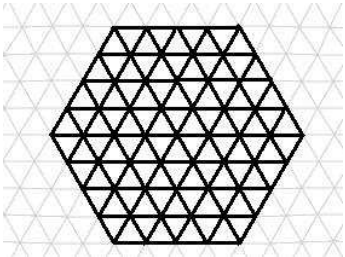
По неравенству о средних $x^2 + 2yz \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ и т.п., таким образом, достаточно проверить, что

$$x + y + z \geqslant 1 + 2\sqrt[3]{xyz}.$$

Поскольку $\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-z)^2}{2} + \frac{(z-y)^2}{2} \geqslant 0$,значит, $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz = 3$. Получаем $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \geqslant 9$, откуда $x + y + z \geqslant 3$.

Взяв сумму этого неравенства с коэффициентом $\frac{1}{3}$ и неравенства о средних $x+y+z \geqslant 3\sqrt{xyz}$ с коэффициентом $\frac{2}{3}$ получаем требуемое неравенство.

Критерии проверки: Неравенства о средних для любого количества чисел считать известными.



8. (5 баллов) Костя купил тетрадку «в треугольничек», все клетки которой являются равносторонними треугольниками со стороной 1, и рисует в этой тетрадке равносторонние треугольники по линиям сетки. Какое наименьшее количество треугольников ему необходимо нарисовать, чтобы в итоге у него получится правильный шестиугольник со стороной $n = 19$, разбитый на треугольники со стороной 1? Пример требуемой фигуры для $n = 4$ изображен на рисунке (правильным называется шестиугольник, все стороны которого равны и все углы также равны).

Ответ: 60

Решение:

Сначала построим пример:

Весь шестиугольник покрывается 117 прямыми (39 прямых каждого из трёх направлений). Отрезки, по которым эти прямые пересекаются с шестиугольником, назовём "короткими", если они имеют длину не больше 28 (их 60 штук), и "длинными", если они имеют длину хотя бы 29 (57 штук).

Заметим, что в любом узле треугольной решётки, лежащем на границе, но не в вершине шестиугольника, сходятся два отрезка "короткий" и "длинный" (сумма их длин равна 57). В вершине же сходятся два "коротких" и один "длинный". Значит, на любом "коротком" отрезке, как на одной из сторон, можно построить равносторонний треугольник (лежащий внутри нашего шестиугольника), оставшиеся две стороны которого будут лежать на двух "длинных" отрезках.

Рассмотрим все такие треугольники, их 60 штук. Докажем, что они покрывают все требуемые отрезки. Действительно, любой отрезок треугольной сетки, лежащий внутри шестиугольника, является частью либо "короткого", либо "длинного" отрезка. Наши 60 треугольников покрывают все "короткие" отрезки по определению этих треугольников. Что касается "длинных" отрезков, то оба конца каждого из них являются в то же время концами каких-то "коротких" отрезков, то есть вершинами наших треугольников. Значит, на этом "длинном" отрезке лежат две стороны наших треугольников. Поскольку один "длинный" отрезок не длиннее, чем два "коротких", эти стороны покрывают его целиком.

Таким образом, и "короткие", и "длинные" отрезки оказываются покрыты этими 66 треугольниками.

Теперь докажем, что число 60 — наименьшее.

Каждому отрезку длины 1, выходящему из точки на стороне (но не в вершине) внутрь шестиугольника, сопоставим "стоимость" 1. Таких отрезков вдвое больше, чем точек на сторонах (не считая вершин), то есть 216. Каждому отрезку длины 1, выходящему из вершины шестиугольника и лежащему на его стороне, сопоставим "стоимость" 2. Таких отрезков 12, их суммарная "стоимость" 24.

Так как только две вершины равностороннего треугольника могут лежать на границе шестиугольника, максимальная суммарная "стоимость" рёбер, входящих в один равносторонний треугольник, равна 4. Значит, нам требуется хотя бы $240 : 4 = 60$ треугольников.

Критерии проверки:

Оценка без примера: 3 балла. Пример без оценки (с доказательством того, что это пример удовлетворяет условию задачи): 2 балла. Пример без (без доказательства того, что это пример удовлетворяет условию задачи): 1 балл

Открытая олимпиада школьников по математике

13 марта 2014 г.

11 класс

3 вариант

Ответы, решения и критерии

1. (1 балл) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_y x = \frac{x}{2} \\ \log_x z = y \\ \log_z y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Ответ: $x = 4$, $y = 2$, $z = 16$ или $x = 2$, $y = 2$, $z = 4$.

Решение: Заметим, что произведение левых частей этих уравнений равно 1. Значит, и произведение правых частей также равно 1. Следовательно, $y = 2$. Подставляем это значение в первое уравнение, получаем $\log_2 x = \frac{x}{2}$, откуда $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$.

Производная функции $\frac{\ln x}{x}$ равна $\frac{1-\ln x}{x^2}$. Таким образом, при $x \leqslant e$ эта функция возрастает, а при $x \geqslant e$ убывает. Значит, одно и то же значение эта функция может принимать не более чем в двух точках. Эти точки легко подобрать: $x = 2$ и $x = 4$. Зная x и y, находим z.

Критерии проверки: Получено уравнение $\log_2 x = \frac{x}{2}$ или эквивалентное ему, не доведено до ответа или угадан только один ответ: 0,5 балла.

2. (2 балла) Костя взял функцию $f(x) = x^{2014}2^{\cos^2 x} - 2x^7 + 7$ и обнаружил, что ее тринадцатая производная имеет ровно 2014 корней. Не ошибается ли он?

Ответ: Ошибается.

Решение: Тринадцатая производная данной функции совпадает с тринадцатой производной функции $f(x) = x^{2014}2^{\cos^2 x}$. Эта функция чётная, значит, её производные чётного порядка — чётные функции, а производные нечётного порядка — нечётные функции. Таким образом, все корни любой её производной симметричны относительно оси ординат. При $x = 0$ эта тринадцатая производная равна нулю, так как если продифференцировать функцию по формуле производной произведения, в производной окажется два слагаемых, содержащих множитель x^{2013}, у второй производной в каждом слагаемом будет множитель x^{2012} и так далее, у тринадцатой производной будет множитель x^{2001}.

Значит, у тринадцатой производной данной функции нечётное или бесконечное число корней, но никак не чётное.

Критерии проверки: Утверждения о том, что тринадцатая производная чётной функции нечётна и о том, что тринадцатая производная имеет корень в точке 0, считать очевидными.

3. (3 балла) Найдите минимальное значение выражения

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + \ldots + x_{100}x_{101} + x_{101}^2 + 2x_{101}.$$

Ответ: $-\frac{202}{102} = -\frac{101}{51}$.

Решение: Разобъём это выражение, кроме последнего и частично предпоследнего слагаемого в сумму полных квадратов вида $a_i^2x_i^2 + 2a_ib_ix_ix_{i+1} + b_i^2x_{i+1}^2$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 2b_ia_i = 1 \\ b_i^2 + a_{i+1}^2 = 1 \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_i = \frac{1}{2a_i} \\ a_{i+1}^2 = 1 - \frac{1}{4a_i^2} \end{cases}$$

Докажем, что $a_i^2 = \frac{i+1}{2i}$. При $i = 1$ утверждение выполняется. Пусть $a_{i-1}^2 = \frac{i}{2i-2}$. Тогда $a_i^2 = 1 - \frac{2i-2}{4i} = \frac{i+1}{2i}$. Соответственно, $b_i^2 = \frac{1}{4a_i^2} = \frac{2i}{4(i+1)} = \frac{i}{2(i+1)}$. Заметим, что числа b_i^2 и a_i^2 получились положительными, так что наше разложение в сумму полных квадратов корректно.

Таким образом, $b_{100}^2 = \frac{100}{202} = \frac{50}{101}$. Значит, исходное выражение представляет из себя сумму некоторого количества полных квадратов и $\frac{51}{101}x_{101}^2 + 2x_{101}$. При добавлении к этому выражению числа $\frac{101}{51}$ оно становится полным квадратом.

Следовательно, исходное выражение можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{100}(a_ix_i + b_ix_{i+1})^2 + \left(\sqrt{\frac{51}{101}}x_{101} + \sqrt{\frac{101}{51}}\right)^2 - \frac{101}{51} \geqslant -\frac{101}{51}.$$

При этом минимальное значение достигается при $x_{101} = -\frac{101}{51}$, каждый из оставшихся x_i можно выразить через следующий по номеру, приравняв к 0 соответствующий полный квадрат.

Критерии проверки:

Не объяснено, почему минимальное значение достигается: снять 1 балл.

4. (3 балла) Точки D и E находятся по разные стороны плоскости ABC. Сферы S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 описаны вокруг тетраэдров $DABC$ и $EABC$ соответственно, при этом точка O_1 лежит на сфере S_2 и наоборот, точка O_2 лежит на сфере S_1. В треугольнике ABC угол $\angle A = 45°$, угол $\angle B = 30°$, а площадь этого треугольника составляет $3 + 3\sqrt{3}$ квадратных сантиметров. Известно, что $DE \geqslant \sqrt{6}BC$. Найдите сумму объёмов тетраэдров $DABC$ и $EABC$.

Ответ: $12(\sqrt{3}+1)$ кубических сантиметров.

Решение: Если центр одной сферы находится на другой, значит расстояние между центрами сфер равно радиусу первой сферы. Значит, оба радиуса и расстояние между центрами сфер равны. Следовательно $\triangle O_1O_2A$, $\triangle O_1O_2B$ и $\triangle O_1O_2C$ — равные равносторонние треугольники, их высота — радиус описанной окружности $\triangle ABC$, а середина отрезка O_1O_2 — её центр. Обозначим радиус сфер за R, радиус описанной окружности $\triangle ABC$ за r.

Вычислим значение этого радиуса исходя из формулы, связывающей радиус описанной окружности и площадь треугольника:

$$r^2 = \frac{S}{2\sin 30° \sin 45° \sin 105°} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = 12$$

откуда $r = 2\sqrt{3}$. Следовательно, $R = r : \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$. Кроме того, из теоремы синусов найдём $BC = 2r\sin 45° = 2\sqrt{6}$. То есть $3R = \sqrt{6}BC$.

Это значит, $DE \geqslant 3R$. Но $DE \leqslant DO_1 + O_1O_2 + O_2E = 3R$. Следовательно, $DE = 3R = 12$, а точки D, O_1, O_2, E лежат на одной прямой. Кроме того, эта прямая O_1O_2 перпендикулярна плоскости ABC, поэтому высота каждого из тетраэдров равна $\frac{DE}{2} = 6$. Значит, сумма объёмов тетрадров равна $\frac{2\cdot 6(3+3\sqrt{3})}{3} = 12(\sqrt{3}+1)$.

Критерии проверки: За каждую арифметическую ошибку, несущественно повлиявшую на ход решения (но, возможно, повлиявшую на ответ) снимать 1 балл.

Если у участника в результате арифметической ошибки после вычисления радиусов сфер получилось, что неравенство $DE \geqslant \sqrt{6}BC$ никогда не выполняется, ставить не больше 1 балла.

5. (4 балла) Точка D взята на стороне AC треугольника ABC, длина отрезка BD составляет 60 см. Вписанные окружности треугольников ABD и CBD касаются стороны AC в точках K и M и имеют радиусы 16 см и 25 см соответственно. Кроме того, обе эти окружности касаются прямой BD в точке H. Проекции некоторой точки E на прямые AB и BD — точки X и Y соответственно. При этом точка X не лежит на отрезке AB, длина отрезка BX равна 40 см. Четырёхугольник $KHMY$ — параллелограмм. Найдите длину отрезка EX.

Ответ: 158 см.

Решение: Обозначим меньший из радиусов окружностей за r, больший — за R. Тогда $MK^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$, то есть $MK = 2\sqrt{Rr} = 40$ см. Значит, $KD = HD = MD = 20$ см. Следовательно, $BH = BD - DH = 40$ см.

Пусть F — точка пересечения O_1O_2 и EX. Найдём отдельно отрезки EF и FX.

Так как $BX = BH = 40$ см, прямоугольные треугольники $\triangle FBX$ и $\triangle FBH$ равны по гипотенузе и катету, значит, $FX = FH = BH \cdot \operatorname{ctg}\angle BFH$. Но $\angle BFH = \frac{\angle HFX}{2} = \frac{180° - \angle HBX}{2} = \frac{\angle ABH}{2}$, то есть $\operatorname{ctg}\angle BFH = \operatorname{ctg}\frac{\angle ABH}{2} = \frac{BH}{r} = \frac{BH}{r} = 2,5$. Следовательно, $FX = \frac{BH^2}{r} = 100$ см.

Теперь найдём длину отрезка EF. Так как $KHMY$ — параллелограмм, отрезки KM и HY делятся точкой пересечния пополам. Но середина KM — это точка D, значит $KD = HD = MD = DY = 6$ см и эти четыре точки лежат на некоторой окружности, причём HY — её диаметр. Так как прямые O_1O_2 и EY перпендикулярны HY, они параллельны между собой. Опустим их точки F перпендикуляр FP на EY. Тогда $HFPY$ — прямоугольник, $FP = HY = 40$ см. Ну а $EF = \frac{FP}{\sin\angle PEF}$.

Угол $\angle PEF$ равен углу $\angle HFX$ как соответственный, а $\operatorname{tg}\frac{\angle HFX}{2} = 0,4$. Значит, используя универсальную тригонометрическую подстановку, $\sin\angle PEF = \frac{2\cdot 0,4}{1+0,4^2}\frac{1}{1,45}$. Получаем $EF = 40 \cdot 1,45 = 58$ см.

Таким образом, $EX = 158$ см.

Критерии проверки: За каждую арифметическую ошибку, несущественно повлиявшую на ход решения (но, возможно, повлиявшую на ответ) снимать 1 балл.

6. (5 баллов) В таблице 30×30 клеток поставлено 162 минуса и 144 плюса (в каждой клетке не более одного знака) так, что в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит не более 17 знаков. Для каждого минуса подсчитали, сколько плюсов находится в той же строке. Для каждого плюса подсчитали, сколько минусов находится в том же столбце. Какое наибольшее значение может иметь сумма найденных чисел?

Ответ: $2 \cdot 18 \cdot 72 = 2592$.

Решение:

В утверждении задачи фигурируют два типа чисел: “горизонтальные” (которые считаются для минусов) и “вертикальные” (для плюсов). Покажем, что максимальные значения сумм чисел каждого вида достигаются на одной и той же конфигурации.

Рассмотрим произвольную строку таблицы. Пусть она содержит p плюсов и k минусов, $k+p \leq 17$. Тогда сумма, которую мы посчитаем для минусов в этой строке, равна kp. Распределим эту сумму поровну между всеми знаками в строке. Более строго, запишем число $kp/(k+p)$ в каждую непустую клетку этой строки. Теперь "горизонтальная" сумма в точности равна сумме всех 306 записанных чисел.

Найдём максимальное значение выражения $f(k,p) = kp/(k+p)$ при $k+p \leq 17$. Заметим, что $f(k,p)$ возрастающая функция от k. Значит, при $k+p < 17$ при увеличении k и сохранении p значение $f(k,p)$ также будет увеличиваться, то есть максимум достигается при $k+p = 17$. В этом случае $f(k,p) = k(17-k)/17$ и имеет максимум равный $\frac{72}{17}$ при $k = 8$ или $k = 9$.

Таким образом, каждое из 306 суммируемых чисел будет максимально, если мы найдём конфигурацию в которой любая непустая строка содержит ровно 8 плюсов и 9 минусов (исходя из общего количества плюсов и минусов потребуется 18 таких строк.

Аналогично доказывается, что максимум "вертикальных" сумм достигается на конфигурации, в которой в каждом столбце ровно 9 минусов и 8 плюсов.

Пример строится аналогично 1 варианту с заменой плюсов на минусы

Критерии проверки:

Оценка без примера: 4 балла. Оценки нет или она неверна, но замечено, в какой ситуации достигается максимальная сумма по строке/столбцу: 1 балл Пример без оценки: 1 балл.

7. (5 баллов) Положительные числа удовлетворяют соотношению $xy + yz + xz = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x^3}{x^2+yz} + \frac{y^3}{y^2+zx} + \frac{z^3}{z^2+xy} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение:

Представив каждое слагаемое в виде $\frac{a^3}{a^2+bc} = a - \frac{abc}{a^2+bc}$, запишем неравенство в виде

$$x+y+z \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + xyz\left(\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy}\right).$$

По неравенству о средних $x^2 + yz \geqslant 2x\sqrt{yz}$ и т.п., таким образом, достаточно проверить, что

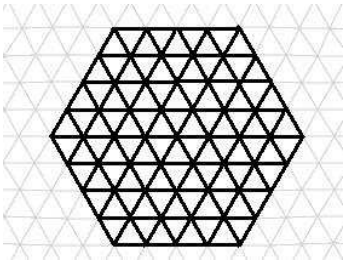
$$x+y+z \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}).$$

Поскольку $\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-z)^2}{2} + \frac{(z-y)^2}{2} \geqslant 0$,значит, $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz = 1$. Получаем $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \geqslant 3$, откуда $x + y + z \geqslant \sqrt{3}$.

Взяв полусумму этого неравенства и неравенства $x+y+z \geqslant \sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}$ получаем требуемое неравенство.

Критерии проверки: Неравенства о средних для любого количества чисел считать известными.

8. (5 баллов) Костя купил тетрадку «в треугольничек», все клетки которой являются равносторонними треугольниками со стороной 1, и рисует в этой тетрадке равносторонние треугольники по линиям сетки. Какое наименьшее количество треугольников ему необходимо нарисовать, чтобы в итоге у него получится правильный шестиугольник со стороной $n = 23$, разбитый на треугольники со стороной 1? Пример требуемой фигуры для $n = 4$ изображен на рисунке (правильным называется шестиугольник, все стороны которого равны и все углы также равны).



Ответ: 72

Решение: Сначала построим пример:

Весь шестиугольник покрывается 141 прямой (47 прямых каждого из трёх направлений). Отрезки, по которым эти прямые пересекаются с шестиугольником, назовём "короткими", если они имеют длину не больше 34 (их 72 штуки), и "длинными", если они имеют длину хотя бы 35 (69 штук).

Заметим, что в любом узле треугольной решётки, лежащем на границе, но не в вершине шестиугольника, сходятся два отрезка "короткий" и "длинный" (сумма их длин равна 69). В вершине же сходятся два "коротких" и один "длинный". Значит, на любом "коротком" отрезке, как на одной из сторон, можно построить равносторонний треугольник (лежащий внутри нашего шестиугольника), оставшиеся две стороны которого будут лежать на двух "длинных" отрезках.

Рассмотрим все такие треугольники, их 72 штуки. Докажем, что они покрывают все требуемые отрезки. Действительно, любой отрезок треугольной сетки, лежащий внутри шестиугольника, является частью либо "короткого", либо "длинного" отрезка. Наши 72 треугольника покрывают все "короткие" отрезки по определению этих треугольников. Что касается "длинных" отрезков, то оба конца каждого из них являются в то же время концами каких-то "коротких" отрезков, то есть вершинами наших треугольников. Значит, на этом "длинном" отрезке лежат две стороны наших треугольников. Поскольку один "длинный" отрезок не длиннее, чем два "коротких", эти стороны покрывают его целиком.

Таким образом, и "короткие", и "длинные" отрезки оказываются покрыты этими 72 треугольниками.

Теперь докажем, что число 72 — наименьшее.

Каждому отрезку длины 1, выходящему из точки на стороне (но не в вершине) внутрь шестиугольника, сопоставим “стоимость” 1. Таких отрезков вдвое больше, чем точек на сторонах (не считая вершин), то есть 264. Каждому отрезку длины 1, выходящему из вершины шестиугольника и лежащему на его стороне, сопоставим “стоимость” 2. Таких отрезков 12, их суммарная “стоимость” 24.

Так как только две вершины равностороннего треугольника могут лежать на границе шестиугольника, максимальная суммарная “стоимость” рёбер, входящих в один равносторонний треугольник, равна 4. Значит, нам требуется хотя бы $288 : 4 = 72$ треугольника.

Критерии проверки:

Оценка без примера: 3 балла. Пример без оценки (с доказательством того, что это пример удовлетворяет условию задачи): 2 балла. Пример без (без доказательства того, что это пример удовлетворяет условию задачи): 1 балл

Открытая олимпиада школьников по математике

13 марта 2014 г.

11 класс

4 вариант

Ответы, решения и критерии

1. (1 балл) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_y z = \frac{1}{x} \\ \log_x y = z \\ \log_z x = \frac{2}{z} \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$, $y = 4$, $z = 2$ или $x = 2$, $y = 16$, $z = 4$.

Решение: Заметим, что произведение левых частей этих уравнений равно 1. Значит, и произведение правых частей также равно 1. Следовательно, $x = 2$. Подставляем это значение в Третье уравнение, получаем $\log_z 2 = \frac{2}{z}$, откуда $\frac{\ln z}{z} = \frac{\ln 2}{2}$.

Производная функции $\frac{\ln z}{z}$ равна $\frac{1-\ln z}{z^2}$. Таким образом, при $z \leqslant e$ эта функция возрастает, а при $z \geqslant e$ убывает. Значит, одно и то же значение эта функция может принимать не более чем в двух точках. Эти точки легко подобрать: $z = 2$ и $z = 4$. Зная x и z, находим y.

Критерии проверки: Получено уравнение $\log_2 x = \frac{x}{2}$ или эквивалентное ему, не доведено до ответа или угадан только один ответ: 0,5 балла.

2. (2 балла) Костя взял функцию $f(x) = x^{2013}3^{\cos 2x} + x^4 + 22$ и обнаружил, что ее четырнадцатая производная имеет ровно 2014 корней. Не ошибается ли он?

Ответ: Ошибается.

Решение: Четырнадцатая производная данной функции совпадает с четырнадцатой производной функции $f(x) = x^{2013}2^{\cos 2x}$. Эта функция нечётная, значит, её производные чётного порядка — нечётные функции, а производные нечётного порядка — чётные функции. Таким образом, все корни любой её производной симметричны относительно оси ординат. При $x = 0$ эта тринадцатая производная равна нулю, так как если продифференцировать функцию по формуле производной произведения, в производной окажется два слагаемых, содержащих множитель x^{2012}, у второй производной в каждом слагаемом будет множитель x^{2011} и так далее, у тринадцатой производной будет множитель x^{1999}.

Значит, у четырнадцатой производной данной функции нечётное или бесконечное число корней, но никак не чётное.

Критерии проверки: Утверждения о том, что четырнадцатая производная чётной функции нечётна и о том, что четырнадцатая производная имеет корень в точке 0, считать очевидными.

3. (3 балла) Найдите максимальное значение выражения

$$-y_1^2 + y_1y_2 - y_2^2 + y_2y_3 - y_3^2 + \ldots + y_{199}y_{200} - y_{200}^2 + y_{200}.$$

Ответ: $\frac{100}{201}$.

Решение: Домножим выражение на -1, получим

$$y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 - y_2y_3 + y_3^2 - \ldots - y_{199}y_{200} + y_{200}^2 - y_{200}.$$

Обозначим $y_{201} = 1$. Докажем, что можно добавить к исследуемому выражению такое число $b_{200}^2 = b_{200}^2y_{201}^2$, что оно разобьётся в сумму полных квадратов вида $a_i^2y_i^2 - 2a_ib_iy_iy_{i+1} + b_i^2y_{i+1}^2$ для всех i от 1 до 200 включительно.

Для этого необходимо и достаточно выполнение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 2b_ia_i = 1 \\ b_i^2 + a_{i+1}^2 = 1 \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_i = \frac{1}{2a_i} \\ a_{i+1}^2 = 1 - \frac{1}{4a_i^2} \end{cases}$$

Докажем, что $a_i^2 = \frac{i+1}{2i}$. При $i = 1$ утверждение выполняется. Пусть $a_{i-1}^2 = \frac{i}{2i-2}$. Тогда $a_i^2 = 1 - \frac{2i-2}{4i} = \frac{i+1}{2i}$. Соответственно, $b_i^2 = \frac{1}{4a_i^2} = \frac{2i}{4(i+1)} = \frac{i}{2(i+1)}$. Заметим, что найденные числа b_i^2 и a_i^2 получились положительными, так что наше разложение в сумму полных квадратов корректно.

Таким образом, $b_{200}^2 = 1 - a_{200}^2 = \frac{200}{402} = \frac{100}{201}$. Следовательно, исходное выражение можно представить в виде

$$-\sum_{i=1}^{200}(a_iy_i + b_iy_{i+1})^2 + b_{200}^2y_{201^2} = -\sum_{i=1}^{200}(a_iy_i + b_iy_{i+1})^2 + \frac{100}{201} \leqslant \frac{100}{201}.$$

При этом минимальное значение достигается при каком-то наборе значений y_i. Действительно, приравняв к 0 последний полный квадрат, найдём y_{200}, далее каждый из оставшихся y_i можно выразить через следующий по номеру, приравняв к 0 соответствующий полный квадрат.

Критерии проверки:

Если формула для a_i или b_i угадана, но не доказана, всё остальное верно: 1 балл

Не объяснено, почему минимальное значение достигается: снять 1 балл.

4. (3 балла) Точки P и Q находятся по разные стороны плоскости ABC. Сферы S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 описаны вокруг тетраэдров $PABC$ и $QABC$ соответственно, при этом точка O_1 лежит на сфере S_2 и наоборот, точка O_2 лежит на сфере S_1. В треугольнике ABC угол $\angle A = 60°$, угол $\angle B = 15°$, а площадь этого треугольника составляет $4\sqrt{3}$ квадратных сантиметров. Известно, что $PQ \geqslant 2BC$. Найдите сумму объёмов тетраэдров $PABC$ и $QABC$.

Ответ: 32 кубических сантиметра.

Решение: Если центр одной сферы находится на другой, значит расстояние между центрами сфер равно радиусу первой сферы. Значит, оба радиуса и расстояние между центрами сфер равны. Следовательно $\triangle O_1O_2A$, $\triangle O_1O_2B$ и $\triangle O_1O_2C$ — равные равносторонние треугольники, их высота — радиус описанной окружности $\triangle ABC$, а середина отрезка O_1O_2 — её центр. Обозначим радиус сфер за R, радиус описанной окружности $\triangle ABC$ за r.

Вычислим значение этого радиуса исходя из формулы, связывающей радиус описанной окружности и площадь треугольника:

$$r^2 = \frac{S}{2\sin 60° \sin 15° \sin 105°} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = 16$$

откуда $r = 4$. Следовательно, $R = r : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\frac{\sqrt{3}}{3}$. Кроме того, из теоремы синусов найдём $BC = 2r\sin 60° = r = 4\sqrt{3}$. То есть $3R = 2BC$.

Это значит, $PQ \geqslant 3R$. Но $PQ \leqslant PO_1 + O_1O_2 + O_2Q = 3R$. Следовательно, $PQ = 3R = 8\sqrt{3}$, а точки P, O_1, O_2, Q лежат на одной прямой. Кроме того, эта прямая O_1O_2 перпендикулярна плоскости ABC, поэтому высота каждого из тетраэдров равна $\frac{PQ}{2} = 4\sqrt{3}$. Значит, сумма объёмов тетрадров равна $\frac{2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}}{3} = 32$.

Критерии проверки: За каждую арифметическую ошибку, несущественно повлиявшую на ход решения (но, возможно, повлиявшую на ответ) снимать 1 балл.

Если у участника в результате арифметической ошибки после вычисления радиусов сфер получилось, что неравенство $PQ \geqslant 2BC$ никогда не выполняется, ставить не больше 1 балла.

5. (4 балла) Точка D взята на стороне AB треугольника ABC, длина отрезка CD составляет 54 см. Вписанные окружности треугольников BCD и ACD касаются стороны AB в точках M и K и имеют радиусы 12 см и 27 см соответственно. Кроме того, обе эти окружности касаются прямой CD в точке H. Проекции некоторой точки F на прямые BC и CD — точки X и Y соответственно. При этом точка X не лежит на отрезке BC, длина отрезка CX равна 36 см. Четырёхугольник $KHMY$ — параллелограмм. Найдите длину отрезка FX.

Ответ: 168 см.

Решение: Обозначим меньший из радиусов окружностей за r, больший — за R. Тогда $MK^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$, то есть $MK = 2\sqrt{Rr} = 36$ см. Значит, $KD = HD = MD = 18$ см. Следовательно, $CH = CD - DH = 36$ см.

Пусть E — точка пересечения O_1O_2 и FX. Найдём отдельно отрезки EF и EX.

Так как $CX = CH = 36$ см, прямоугольные треугольники $\triangle ECX$ и $\triangle ECH$ равны по гипотенузе и катету, значит, $EX = EH = CH \cdot \operatorname{ctg}\angle CEH$. Но Но $\angle CEH = \frac{\angle HEX}{2} = \frac{180° - \angle HCX}{2} = \frac{\angle BCH}{2}$, то есть $\operatorname{ctg}\angle CEH = \operatorname{ctg}\frac{\angle BCH}{2} = \frac{CH}{r} = 3$. Следовательно, $EX = \frac{CH^2}{r} = 108$ см.

Теперь найдём длину отрезка EF. Так как $KHMY$ — параллелограмм, отрезки KM и HY делятся точкой пересечния пополам. Но середина KM — это точка D, значит $KD = HD = MD = DY = 18$ см и эти четыре точки лежат на некоторой окружности, причём HY — её диаметр. Так как прямые O_1O_2 и FY перпендикулярны HY, они параллельны между собой. Опустим их точки E перпендикуляр EP на FY. Тогда $HEPY$ — прямоугольник, $EP = HY = 36$ см. Ну а $EF = \frac{EP}{\sin\angle PFE}$.

Угол $\angle PFE$ равен углу $\angle HEX$ как соответственный, а $\operatorname{tg}\frac{\angle HEX}{2} = \frac{1}{3}$. Значит, используя универсальную тригонометрическую подстановку, $\sin\angle PFE = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3^2}} = 0,6$.

Получаем $EF = 36 : 0,6 = 60$ см.

Таким образом, $EX = 168$ см.

Критерии проверки: За каждую арифметическую ошибку, несущественно повлиявшую на ход решения (но, возможно, повлиявшую на ответ) снимать 1 балл.

6. (5 баллов) В таблице 32×32 клеток поставлено 180 минусов и 200 плюсов (в каждой клетке не более одного знака) так, что в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит не более 19 знаков. Для каждого минуса подсчитали, сколько плюсов находится в том же столбце. Для каждого плюса подсчитали, сколько минусов находится в той же строке. Какое наибольшее значение может иметь сумма найденных чисел?

Ответ: $2 \cdot 90 \cdot 20 = 3600$.

Решение:

В утверждении задачи фигурируют два типа чисел: “горизонтальные” (которые считаются для плюсов) и “вертикальные” (для минусов). Покажем, что максимальные значения сумм чисел каждого вида достигаются на одной и той же конфигурации.

Рассмотрим произвольную строку таблицы. Пусть она содержит p плюсов и k минусов, $k+p \leq 19$. Тогда сумма, которую мы посчитаем для плюсов в этой строке, равна kp. Распределим эту сумму поровну между всеми знаками в строке. Более строго, запишем число $kp/(k+p)$ в каждую непустую клетку этой строки. Теперь “горизонтальная” сумма в точности равна сумме всех 380 записанных чисел.

Найдём максимальное значение выражения $f(k,p) = kp/(k+p)$ при $k+p \leq 19$. Заметим, что $f(k,p)$ возрастающая функция от k. Значит, при $k+p < 19$ при увеличении k и сохранении p значение $f(k,p)$ также будет увеличиваться, то есть максимум достигается при $k+p = 19$. В этом случае $f(k,p) = k(19-k)/19$ и имеет максимум равный $\frac{190}{19}$ при $k = 9$ или $k = 10$.

Таким образом, каждое из 380 суммируемых чисел будет максимально, если мы найдём конфигурацию в которой любая непустая строка содержит ровно 9 минусов и 10 плюсов (исходя из общего количества плюсов и минусов потребуется 20 таких строк.

Аналогично доказывается, что максимум “вертикальных” сумм достигается на конфигурации, в которой в каждом столбце ровно 9 минусов и 10 плюсов.

Пример строится аналогично варианту 2 с заменой плюсов на минусы и наобоот, см. рисунок.

Критерии проверки:

Оценка без примера: 4 балла. Оценки нет или она неверна, но замечено, в какой ситуации достигается максимальная сумма по строке/столбцу: 1 балл Пример без оценки: 1 балл.

7. (5 баллов) Положительные числа удовлетворяют соотношению $xy + yz + xz = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{x^3}{x^2+2yz} + \frac{y^3}{y^2+2zx} + \frac{z^3}{z^2+2xy} \geqslant 1.$$

Решение: Представив каждое слагаемое в виде $\frac{a^3}{a^2+2bc} = a - \frac{2abc}{a^2+2bc}$, запишем неравенство в виде

$$x+y+z \geqslant 1 + 2xyz\left(\frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy}\right).$$

По неравенству о средних $x^2+2yz \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ и т.п., таким образом, достаточно проверить, что

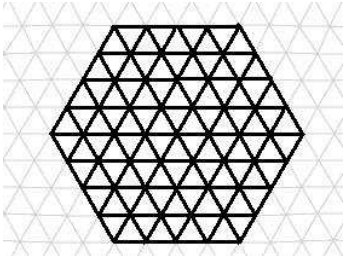
$$x+y+z \geqslant 1 + 2\sqrt[3]{xyz}.$$

Поскольку $\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-z)^2}{2} + \frac{(z-y)^2}{2} \geqslant 0$,значит, $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+xz = 3$. Получаем $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) \geqslant 9$, откуда $x+y+z \geqslant 3$.

Взяв сумму этого неравенства с коэффициентом $\frac{1}{3}$ и неравенства о средних $x+y+z \geqslant 3\sqrt{xyz}$ с коэффициентом $\frac{2}{3}$ получаем требуемое неравенство.

Критерии проверки: Неравенства о средних для любого количества чисел считать известными.

8. (5 баллов) Костя купил тетрадку «в треугольничек», все клетки которой являются равносторонними треугольниками со стороной 1, и рисует в этой тетрадке равносторонние треугольники по линиям сетки. Какое наименьшее количество треугольников ему необходимо нарисовать, чтобы в итоге у него получится правильный шестиугольник со стороной $n = 17$, разбитый на треугольники со стороной 1? Пример требуемой фигуры для $n = 4$ изображен на рисунке (правильным называется шестиугольник, все стороны которого равны и все углы также равны).



Ответ: 54

Решение:

Сначала построим пример:

Весь шестиугольник покрывается 105 прямыми (35 прямых каждого из трёх направлений). Отрезки, по которым эти прямые пересекаются с шестиугольником, назовём “короткими”, если они имеют длину не больше 25 (их 54 штуки), и “длинными”, если они имеют длину хотя бы 26 (51 штука).

Заметим, что в любом узле треугольной решётки, лежащем на границе, но не в вершине шестиугольника, сходятся два отрезка “короткий” и “длинный” (сумма их длин равна 51). В вершине же сходятся два “коротких” и один “длинный”. Значит, на любом “коротком” отрезке, как на одной из сторон, можно построить равносторонний треугольник (лежащий внутри нашего шестиугольника), оставшиеся две стороны которого будут лежать на двух “длинных” отрезках.

Рассмотрим все такие треугольники, их 54 штуки. Докажем, что они покрывают все требуемые отрезки. Действительно, любой отрезок треугольной сетки, лежащий внутри шестиугольника, является частью либо “короткого”, либо “длинного” отрезка. Наши 54 треугольника покрывают все “короткие” отрезки по определению этих треугольников. Что касается “длинных” отрезков, то оба конца каждого из них являются в то же время

концами каких-то “коротких” отрезков, то есть вершинами наших треугольников. Значит, на этом “длинном” отрезке лежат две стороны наших треугольников. Поскольку один “длинный” отрезок не длиннее, чем два “коротких”, эти стороны покрывают его целиком.

Таким образом, и “короткие”, и “длинные” отрезки оказываются покрыты этими 54 треугольниками.

Теперь докажем, что число 54 — наименьшее.

Каждому отрезку длины 1, выходящему из точки на стороне (но не в вершине) внутрь шестиугольника, сопоставим “стоимость” 1. Таких отрезков вдвое больше, чем точек на сторонах (не считая вершин), то есть 192. Каждому отрезку длины 1, выходящему из вершины шестиугольника и лежащему на его стороне, сопоставим “стоимость” 2. Таких отрезков 12, их суммарная “стоимость” 24.

Так как только две вершины равностороннего треугольника могут лежать на границе шестиугольника, максимальная суммарная “стоимость” рёбер, входящих в один равносторонний треугольник, равна 4. Значит, нам требуется хотя бы $216 : 4 = 54$ треугольников.

Критерии проверки:

Оценка без примера: 3 балла. Пример без оценки (с доказательством того, что это пример удовлетворяет условию задачи): 2 балла. Пример без (без доказательства того, что это пример удовлетворяет условию задачи): 1 балл