РАЗБОР ЗАДАЧ

2012 – 2013

11 класс

Задача 1 (1 балл)

1. Натуральное число А имеет 61 разряд и состоит из двоек, троек и четверок. При этом двоек на 19 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа А на 9.

Решение. Пусть x - количество четверок, а y - количество троек. Тогда получаем $x+19+y+x=61$. Откуда $y=42-2x$. Сумма цифр $2(x+19)+3y+4x$ имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между x и y, получаем, что сумма цифр равна 164. Поэтому остаток при делении на 9 равен 2.

Ответ: 2.

2. Натуральное число А имеет 59 разрядов и состоит из троек, четверок и пятерок. При этом пятерок на 8 больше, чем троек. Найти остаток от деления числа А на 9.

Решение. Пусть x - количество троек, а y - количество четверок. Тогда получаем $x+y+x+8=59$. Откуда $y=51-2x$. Сумма цифр $3x+4y+5(x+8)$ имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между x и y, получаем, что сумма цифр равна 244. Поэтому остаток при делении на 9 равен 1.

Ответ: 1.

3. Натуральное число А имеет 67 разрядов и состоит из двоек, троек и четверок. При этом двоек на 22 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа А на 9.

Решение. Пусть x - количество четверок, а y - количество троек. Тогда получаем $x+22+y+x=67$. Откуда $y=45-2x$. Сумма цифр $2(x+22)+3y+4x$ имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между x и y, получаем, что сумма цифр равна 179. Поэтому остаток при делении на 9 равен 8.

Ответ: 8.

4. Натуральное число А имеет 57 разрядов и состоит из троек, четверок и пятерок. При этом троек на 14 больше, чем пятерок. Найти остаток от деления числа А на 9.

Решение. Пусть x - количество пятерок, а y - количество четверок. Тогда получаем $x+14+y+x=57$. Откуда $y=43-2x$. Сумма цифр $3(x+14)+4y+5x$ имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между x и y, получаем, что сумма цифр равна 214. Поэтому остаток при делении на 9 равен 7.

Ответ: 7.

Задача 2 (1 балл)

1. Известно, что график функции $y=ax^3+x^2+b$ касается оси абсцисс в точке $A(1;0)$. Найти значения коэффициентов a и b.

Решение. Условие касания кривой $y=ax^3+x^2+b$ и оси абсцисс в точке $A(1;0)$ означает, что $y(1)=0$ и $y'(1)=0$. В результате получаем систему уравнений для определения двух неизвестных a и b: $\begin{cases} a+1+b=0 \\ 3a+2=0 \end{cases}$. Решив ее, находим: $a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.

Ответ: $a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3}$.

2. Известно, что график функции $y=x^3+mx^2+n$ касается оси абсцисс в точке $\mathrm{B}(2;0)$. Найти значения коэффициентов m и n.

Решение. Условие касания кривой $y=x^3+mx^2+n$ и оси абсцисс в точке $\mathrm{B}(2;0)$ означает, что $y(2)=0$ и $y'(2)=0$. В результате получаем систему уравнений для определения двух неизвестных m и n: $\begin{cases}8+4m+n=0\\12+4m=0\end{cases}$. Решив ее, находим: $m=-3,\ n=4$.

Ответ: $m=-3,\ n=4$.

3. Известно, что график функции $y=ax^3+x^2+b$ касается оси абсцисс в точке $\mathrm{C}(-1;0)$. Найти значения коэффициентов a и b.

Решение. Условие касания кривой $y=ax^3+x^2+b$ и оси абсцисс в точке $\mathrm{C}(-1;0)$ означает, что $y(-1)=0$ и $y'(-1)=0$. В результате получаем систему уравнений для определения двух неизвестных a и b: $\begin{cases}-a+1+b=0\\3a-2=0\end{cases}$. Решив ее, находим: $a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3}$.

Ответ: $a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3}$.

4. Известно, что график функции $y=x^3+mx^2+n$ касается оси абсцисс в точке $\mathrm{D}(-2;0)$. Найти значения коэффициентов m и n.

Решение. Условие касания кривой $y=x^3+mx^2+n$ и оси абсцисс в точке $\mathrm{D}(-2;0)$ означает, что $y(-2)=0$ и $y'(-2)=0$. В результате получаем систему уравнений для определения двух неизвестных m и n: $\begin{cases}-8+4m+n=0\\12-4m=0\end{cases}$. Решив ее, находим: $m=3,\ n=-4$.

Ответ: $m=3,\ n=-4$.

Задача 3 (1 балл)

1. Найти значения x и y, если известно, что $\log_x(y-2),-\frac{1}{2},\log_x(6-y)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, а $x^2y^2,\ x^{3x},\ \frac{1}{y^2}$ - последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение. Используя признаки арифметической и геометрической прогрессии, получаем систему уравнений для определения двух неизвестных x и y:

$$\begin{cases}\log_x(y-2)+\log_x(6-y)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\x^2y^2\cdot\frac{1}{y^2}=\left(x^{3x}\right)^2\end{cases}.$$

Решив эту систему, с учетом О.Д.З. $\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\2<y<6\end{cases}$ находим ответ: (1/3;3); (1/3;5).

Ответ: (1/3;3); (1/3;5).

2. Найти значения x и y, если известно, что $\log_x y, \log_x\left(x^3-18x-26\right), \log_x y^3$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, а $\frac{1}{x^2+2}, y, 9\left(x^2+2\right)$ - последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение. Используя признаки арифметической и геометрической прогрессии, получаем систему уравнений для определения двух неизвестных x и y:

$$\begin{cases}\log_x y+\log_x y^3=2\cdot\log_x\left(x^3-18x-26\right)\\ \frac{1}{x^2+2}\cdot 9\left(x^2+2\right)=y^2\end{cases}.$$

Решив эту систему, с учетом О.Д.З. $\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x^3-18x-26>0\\ y>0\end{cases}$ находим ответ: (5;3).

Ответ: (5;3)

3. Найти значения x и y, если известно, что $\log_y(x+3), \frac{1}{2}, \log_y(3-x)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, а $y^5(x-2), y^{0,5y}, \frac{1}{x-2}$ - последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение. Используя признаки арифметической и геометрической прогрессии, получаем систему уравнений для определения двух неизвестных x и y:

$$\begin{cases}\log_y(x+3)+\log_y(3-x)=2\cdot\frac{1}{2}\\ y^5(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}=\left(y^{0,5y}\right)^2\end{cases}.$$

Решив эту систему, с учетом О.Д.З. $\begin{cases}-3<x<3\\ x\neq 2\\ y>0\\ y\neq 1\end{cases}$ находим ответ: (-2;5).

Ответ: (-2;5)

4. Найти значения x и y, если известно, что $\log_y x^5, \log_y\left(y^3-6y^2+11y+58\right), \log_y x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, а $\frac{16}{y^2-9}, x, y^2-9$ - последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение. Используя признаки арифметической и геометрической прогрессии, получаем систему уравнений для определения двух неизвестных x и y:

$$\begin{cases}\log_y x^5+\log_y x=2\cdot\log_y\left(y^3-6y^2+11y+58\right)\\ \frac{16}{y^2-9}\cdot\left(y^2-9\right)=x^2\end{cases}.$$

Решив эту систему, с учетом О.Д.З. $\begin{cases}x>0\\ y>0\\ y\neq 1\\ y^3-6y^2+11y+58\\ y\neq\pm 3\end{cases}$ находим ответ: (4;2).

Ответ: (4;2)

Задача 4 (2 балла)

1. Инспекторы дорожно-патрульной службы Иванов и Петров остановили колонну автобусов, заметив, что некоторые автобусы переполнены (автобус считается переполненным, если в нем едет более 60 пассажиров). Инспектор Иванов подсчитал процент переполненных автобусов, а инспектор Петров – процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах. Кто из инспекторов получил больший процент? Ответ обосновать.

Решение. Пусть в колонне оказалось m переполненных и n непереполненных автобусов. Пусть число пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, равно M, а число остальных пассажиров равно N. Тогда $M > 60m$, $N \le 60n$. Тогда $\frac{M}{m} > 60$, а $\frac{N}{n} \le 60$, и, следовательно, $\frac{M}{m} > \frac{N}{n}$. Из последнего неравенства получаем: $\frac{N}{M} < \frac{n}{m}$, $\frac{M+N}{M} < \frac{m+n}{m}$. Поэтому $\frac{M}{M+N} \cdot 100\% > \frac{m}{m+n} \cdot 100\%$. Левая часть последнего неравенства представляет собой процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а правая – процент переполненных автобусов. Поэтому больший процент получил инспектор Петров.

Ответ: Петров.

2. Инспекторы дорожно-патрульной службы Александров и Сидоров остановили колонну автобусов, заметив, что некоторые автобусы переполнены (автобус считается переполненным, если в нем едет более 65 пассажиров). Инспектор Александров подсчитал процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а инспектор Сидоров – процент переполненных автобусов. Кто из инспекторов получил больший процент? Ответ обосновать.

Решение. Пусть в колонне оказалось m переполненных и n непереполненных автобусов. Пусть число пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, равно M, а число остальных пассажиров равно N. Тогда $M > 65m$, $N \le 65n$. Тогда $\frac{M}{m} > 65$, а $\frac{N}{n} \le 65$, и, следовательно, $\frac{M}{m} > \frac{N}{n}$. Из последнего неравенства получаем: $\frac{N}{M} < \frac{n}{m}$, $\frac{M+N}{M} < \frac{m+n}{m}$. Поэтому $\frac{M}{M+N} \cdot 100\% > \frac{m}{m+n} \cdot 100\%$. Левая часть последнего неравенства представляет собой процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а правая – процент переполненных автобусов. Поэтому больший процент получил инспектор Александров.

Ответ: Александров.

3. Инспекторы дорожно-патрульной службы Николаев и Дмитриев остановили колонну автобусов, заметив, что некоторые автобусы переполнены (автобус считается переполненным, если в нем едет более 55 пассажиров). Инспектор Николаев подсчитал процент переполненных автобусов, а инспектор Дмитриев – процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах. Кто из инспекторов получил меньший процент? Ответ обосновать.

Решение. Пусть в колонне оказалось m переполненных и n непереполненных автобусов. Пусть число пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, равно M, а число остальных пассажиров равно N. Тогда $M > 55m$, $N \le 55n$. Тогда $\frac{M}{m} > 55$, а $\frac{N}{n} \le 55$, и, следовательно, $\frac{M}{m} > \frac{N}{n}$. Из последнего неравенства получаем: $\frac{N}{M} < \frac{n}{m}$, $\frac{M+N}{M} < \frac{m+n}{m}$. Поэтому $\frac{M}{M+N} \cdot 100\% > \frac{m}{m+n} \cdot 100\%$. Левая часть последнего неравенства представляет собой процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а правая – процент переполненных автобусов. Поэтому меньший процент получил инспектор Николаев.

Ответ: Николаев.

4. Инспекторы дорожно-патрульной службы Алексеев и Данилов остановили колонну автобусов, заметив, что некоторые автобусы переполнены (автобус считается переполненным, если в нем едет более 70 пассажиров). Инспектор Алексеев подсчитал процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а инспектор Данилов – процент переполненных автобусов. Кто из инспекторов получил меньший процент? Ответ обосновать.
Решение. Пусть в колонне оказалось m переполненных и n непереполненных автобусов. Пусть число пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, равно M, а число остальных пассажиров равно N. Тогда $M > 70m$, $N \le 70n$. Тогда $\frac{M}{m} > 70$, а $\frac{N}{n} \le 70$, и, следовательно, $\frac{M}{m} > \frac{N}{n}$. Из последнего неравенства получаем: $\frac{N}{M} < \frac{n}{m}$, $\frac{M+N}{M} < \frac{m+n}{m}$. Поэтому $\frac{M}{M+N} \cdot 100\% > \frac{m}{m+n} \cdot 100\%$. Левая часть последнего неравенства представляет собой процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а правая – процент переполненных автобусов. Поэтому меньший процент получил инспектор Данилов.
Ответ: Данилов.

Задача 5 (2 балла)

1. Известно, что для α, β, γ справедливо неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \ge \frac{5}{2}$. Доказать, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Решение. Оценим сверху сумму: $S = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2$.
$S = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + 2(\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta) +$
$+2(\sin\alpha \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma) + 2(\sin\beta \cdot \sin\gamma + \cos\beta \cdot \cos\gamma) \le 3 + 3 \cdot 2 = 9$. Поэтому $(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 = S - (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 \le 9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$. Отсюда после извлечения квадратного корня из обеих частей последнего неравенства следует искомая оценка.

2. Известно, что для α, β, γ справедливо неравенство $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \ge \frac{7}{3}$. Доказать, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Решение. Оценим сверху сумму: $S = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2$.
$S = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + 2(\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta) +$
$+2(\sin\alpha \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma) + 2(\sin\beta \cdot \sin\gamma + \cos\beta \cdot \cos\gamma) \le 3 + 3 \cdot 2 = 9$. Поэтому $(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 = S - (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 \le 9 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$. Отсюда после извлечения квадратного корня из обеих частей последнего неравенства следует искомая оценка.

3. Известно, что для α, β, γ справедливо неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \ge \frac{5}{3}$. Доказать, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

Решение. Оценим сверху сумму: $S=(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2$.
$S=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)+2(\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta)+$
$+2(\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\gamma)+2(\sin\beta\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\cos\gamma)\le 3+3\cdot 2=9$. Поэтому
$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2=S-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2\le 9-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{56}{9}$. Отсюда после извлечения квадратного корня из обеих частей последнего неравенства следует искомая оценка.

4. Известно, что для α,β,γ справедливо неравенство $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\ge\frac{3}{2}$. Доказать, что $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Оценим сверху сумму: $S=(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2$.
$S=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)+2(\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta)+$
$+2(\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\gamma)+2(\sin\beta\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\cos\gamma)\le 3+3\cdot 2=9$. Поэтому
$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2=S-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\le 9-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$. Отсюда после извлечения квадратного корня из обеих частей последнего неравенства следует искомая оценка.

Задача 6 (2 балла)

1. Пусть уравнение $e^x+x-2=0$ имеет k действительных корней на отрезке $[0;1]$ и n действительных корней вне этого отрезка. Тогда $10n+k=\mathbf{K}$.

Решение. Функция $f(x)=e^x+x-2$ является строго возрастающей (как сумма двух строго возрастающих функций и константы). Заметим, что на концах отрезка $[0;1]$ функция принимает значения разного знака: $f(0)=-1$, $f(1)=e-1$. Поскольку $f(x)$ является непрерывной, в некоторой точке x_0 указанного отрезка она обращается в 0, а с учетом ее строгого возрастания других нулей у функции нет. Поэтому $k=1$, $n=0$, $10n+k=1$.
Ответ: 1.

2. Пусть уравнение $\operatorname{arctg}x+x-2=0$ имеет k действительных корней на отрезке $[0;1]$ и n действительных корней вне этого отрезка. Тогда $10n+k=\mathbf{K}$.

Решение. Функция $f(x)=\operatorname{arctg}x+x-2$ является строго возрастающей (как сумма двух строго возрастающих функций и константы). Заметим, что $f(1)=\frac{\pi}{4}-1<0$, а при больших x функция $f(x)$ принимает положительные значения. Поскольку $f(x)$ является непрерывной, в некоторой точке $x_0>1$ она обращается в 0, а с учетом ее строгого возрастания других нулей у функции нет. Поэтому $k=0$, $n=1$, $10n+k=10$.
Ответ: 10.

3. Пусть уравнение $\operatorname{arctg}x+x-1=0$ имеет k действительных корней на отрезке $[0;1]$ и n действительных корней вне этого отрезка. Тогда $10n+k=\mathbf{K}$.

Решение. Функция $f(x)=\operatorname{arctg}x+x-1$ является строго возрастающей (как сумма двух строго возрастающих функций и константы). Заметим, что на концах отрезка $[0;1]$ функция принимает значения разного знака: $f(0)=-1$, $f(1)=\frac{\pi}{4}$. Поскольку $f(x)$ является непрерывной, в некоторой точке x_0 указанного отрезка она обращается в 0, а с учетом ее строгого возрастания других нулей у функции нет. Поэтому $k=1$, $n=0$, $10n+k=1$.
Ответ: 1.

4. Пусть уравнение $e^x+x-5=0$ имеет k действительных корней на отрезке $[0;1]$ и n действительных корней вне этого отрезка. Тогда $10n+k=\mathbf{K}$.
Решение. Функция $f(x)=e^x+x-5$ является строго возрастающей (как сумма двух строго возрастающих функций и константы). Заметим, что $f(1)=e-4<0$, а при больших x функция $f(x)$ принимает положительные значения. Поскольку $f(x)$ является непрерывной, в некоторой точке $x_0>1$ она обращается в 0, а с учетом ее строгого возрастания других нулей у функции нет. Поэтому $k=0$, $n=1$, $10n+k=10$.
Ответ: 10.

Задача 7 (3 балла)

1. В треугольной пирамиде все три плоских угла при вершине равны α. Из вершины пирамиды проведены биссектрисы ее боковых граней. Найти все значения α, при которых биссектрисы будут образовывать угол, равный $\arccos\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть в тетраэдре $DABC$ (D - вершина тетраэдра) $\vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{c}_0$ - единичные векторы, направленные по боковым ребрам DA, DB, DC соответственно (углы между этими векторами равны α). Тогда векторы $\vec{n}_1=\vec{a}_0+\vec{b}_0$, $\vec{n}_2=\vec{b}_0+\vec{c}_0$, $\vec{n}_3=\vec{a}_0+\vec{c}_0$ будут совпадать по направлению с биссектрисами углов ADB, BDC и ADC боковых граней пирамиды. При этом из условий задачи следует, что длины этих векторов одинаковы, и углы между ними также совпадают (пока для удобства вычислений обозначим эти углы через β).

Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_3$. С одной стороны, $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=(\vec{a}_0+\vec{b}_0)\cdot(\vec{a}_0+\vec{c}_0)=1+3\cos\alpha$. С другой стороны, с учетом того, что $|\vec{a}_0+\vec{b}_0|\cdot|\vec{a}_0+\vec{c}_0|=|\vec{a}_0+\vec{b}_0|^2=(\vec{a}_0+\vec{b}_0)\cdot(\vec{a}_0+\vec{b}_0)=2+2\cos\alpha$, это же скалярное произведение имеет вид: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=|\vec{a}_0+\vec{b}_0|\cdot|\vec{a}_0+\vec{c}_0|\cdot\cos\beta=(2+2\cos\alpha)\cdot\cos\beta$. Приравнивая полученные выражения для $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3$, можно выразить $\cos\alpha$ через $\cos\beta$: $\cos\alpha=\frac{2\cos\beta-1}{3-2\cos\beta}$. Подставляя из условия задачи $\beta=\arccos\frac{1}{3}$, получим, что $\alpha=\arccos(-1/7)=\pi-\arccos(1/7)$.

Ответ: $\arccos(-1/7)=\pi-\arccos(1/7)$.

2. В треугольной пирамиде все три плоских угла при вершине равны α. Из вершины пирамиды проведены биссектрисы ее боковых граней. Найти все значения α, при которых биссектрисы будут образовывать угол, равный $\arccos\frac{1}{4}$.

Решение. Пусть в тетраэдре $DABC$ (D - вершина тетраэдра) $\vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{c}_0$ - единичные векторы, направленные по боковым ребрам DA, DB, DC соответственно (углы между этими векторами равны α). Тогда векторы $\vec{n}_1 = \vec{a}_0 + \vec{b}_0, \vec{n}_2 = \vec{b}_0 + \vec{c}_0, \vec{n}_3 = \vec{a}_0 + \vec{c}_0$ будут совпадать по направлению с биссектрисами углов ADB, BDC и ADC боковых граней пирамиды. При этом из условий задачи следует, что длины этих векторов одинаковы, и углы между ними также совпадают (пока для удобства вычислений обозначим эти углы через β).

Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_3$. С одной стороны, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) \cdot (\vec{a}_0 + \vec{c}_0) = 1 + 3\cos\alpha$. С другой стороны, с учетом того, что $|\vec{a}_0 + \vec{b}_0| \cdot |\vec{a}_0 + \vec{c}_0| = |\vec{a}_0 + \vec{b}_0|^2 = (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) \cdot (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) = 2 + 2\cos\alpha$, это же скалярное произведение имеет вид: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = |\vec{a}_0 + \vec{b}_0| \cdot |\vec{a}_0 + \vec{c}_0| \cdot \cos\beta = (2 + 2\cos\alpha) \cdot \cos\beta$. Приравнивая полученные выражения для $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3$, можно выразить $\cos\alpha$ через $\cos\beta$: $\cos\alpha = \dfrac{2\cos\beta - 1}{3 - 2\cos\beta}$. Подставляя из условия задачи $\beta = \arccos\dfrac{1}{4}$, получим, что $\alpha = \arccos(-1/5) = \pi - \arccos(1/5)$.

Ответ: $\arccos(-1/5) = \pi - \arccos(1/5)$.

3. В треугольной пирамиде все три плоских угла при вершине равны α. Из вершины пирамиды проведены биссектрисы ее боковых граней. Найти все значения α, при которых биссектрисы будут образовывать угол, равный $\arccos\dfrac{2}{3}$.

Решение. Пусть в тетраэдре $DABC$ (D - вершина тетраэдра) $\vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{c}_0$ - единичные векторы, направленные по боковым ребрам DA, DB, DC соответственно (углы между этими векторами равны α). Тогда векторы $\vec{n}_1 = \vec{a}_0 + \vec{b}_0, \vec{n}_2 = \vec{b}_0 + \vec{c}_0, \vec{n}_3 = \vec{a}_0 + \vec{c}_0$ будут совпадать по направлению с биссектрисами углов ADB, BDC и ADC боковых граней пирамиды. При этом из условий задачи следует, что длины этих векторов одинаковы, и углы между ними также совпадают (пока для удобства вычислений обозначим эти углы через β).

Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_3$. С одной стороны, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) \cdot (\vec{a}_0 + \vec{c}_0) = 1 + 3\cos\alpha$. С другой стороны, с учетом того, что $|\vec{a}_0 + \vec{b}_0| \cdot |\vec{a}_0 + \vec{c}_0| = |\vec{a}_0 + \vec{b}_0|^2 = (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) \cdot (\vec{a}_0 + \vec{b}_0) = 2 + 2\cos\alpha$, это же скалярное произведение имеет вид: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = |\vec{a}_0 + \vec{b}_0| \cdot |\vec{a}_0 + \vec{c}_0| \cdot \cos\beta = (2 + 2\cos\alpha) \cdot \cos\beta$. Приравнивая полученные выражения для $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3$, можно выразить $\cos\alpha$ через $\cos\beta$: $\cos\alpha = \dfrac{2\cos\beta - 1}{3 - 2\cos\beta}$. Подставляя из условия задачи $\beta = \arccos\dfrac{2}{3}$, получим, что $\alpha = \arccos(1/5)$.

Ответ: $\arccos(1/5)$.

4. В треугольной пирамиде все три плоских угла при вершине равны α. Из вершины пирамиды проведены биссектрисы ее боковых граней. Найти все значения α, при которых биссектрисы будут образовывать угол, равный $\arccos\dfrac{3}{4}$.

Решение. Пусть в тетраэдре $DABC$ (D - вершина тетраэдра) $\vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{c}_0$ - единичные векторы, направленные по боковым ребрам DA, DB, DC соответственно (углы между этими

векторами равны α). Тогда векторы $\vec{n}_1=\vec{a}_0+\vec{b}_0$, $\vec{n}_2=\vec{b}_0+\vec{c}_0$, $\vec{n}_3=\vec{a}_0+\vec{c}_0$ будут совпадать по направлению с биссектрисами углов ADB, BDC и ADC боковых граней пирамиды. При этом из условий задачи следует, что длины этих векторов одинаковы, и углы между ними также совпадают (пока для удобства вычислений обозначим эти углы через β).

Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_3$. С одной стороны, $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=\left(\vec{a}_0+\vec{b}_0\right)\cdot\left(\vec{a}_0+\vec{c}_0\right)=1+3\cos\alpha$. С другой стороны, с учетом того, что $\left|\vec{a}_0+\vec{b}_0\right|\cdot\left|\vec{a}_0+\vec{c}_0\right|=\left|\vec{a}_0+\vec{b}_0\right|^2=\left(\vec{a}_0+\vec{b}_0\right)\cdot\left(\vec{a}_0+\vec{b}_0\right)=2+2\cos\alpha$, это же скалярное произведение имеет вид: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=\left|\vec{a}_0+\vec{b}_0\right|\cdot\left|\vec{a}_0+\vec{c}_0\right|\cdot\cos\beta=\left(2+2\cos\alpha\right)\cdot\cos\beta$. Приравнивая полученные выражения для $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3$, можно выразить $\cos\alpha$ через $\cos\beta$: $\cos\alpha=\dfrac{2\cos\beta-1}{3-2\cos\beta}$. Подставляя из условия задачи $\beta=\arccos\dfrac{3}{4}$, получим, что $\alpha=\arccos(1/3)$.

Ответ: $\arccos(1/3)$.

Задача 8 (3 балла)

1. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}\sqrt{4+6x-x^2}=|y|+1\\ x=8+a|y|\end{cases}$ не имеет решений?

Решение. Первое уравнение системы задает две дуги окружности, симметричные относительно оси OX, а второе – два луча, выходящих из точки $A(8;0)$, поэтому ввиду такой симметрии задачу можно решить для $y\ge 0$. Условие для не пересечения или касания лучом дуги окружности получается из решения системы уравнений $\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2=13\\ x=8+ay\end{cases}$, которая сводится к квадратному уравнению $\left(a^2+1\right)y^2+(10a+2)y+13=0$. Это уравнение не имеет решений, когда $D=(5a+1)^2-13\left(a^2+1\right)<0$, причем $a<0$. Решая уравнение $6a^2+5a-6=0$, найдем $a=-1{,}5$. Значит, решений не будет при $a>-1{,}5$.

Ответ: $a>-1{,}5$.

2. При каких значениях параметра a система уравнений
$\begin{cases}\sqrt{8x-x^2-3}=|y|+2\\ x-0{,}5+a|y|=0\end{cases}$
имеет более двух решений?

Решение. Первое уравнение системы задает две дуги окружности, симметричные относительно оси OX, а второе – два луча, выходящих из точки $A(0{,}5;0)$, поэтому ввиду такой симметрии задачу можно решить для $y\ge 0$. Условие для пересечения лучом дуги окружности получается из решения системы уравнений $\begin{cases}(x-4)^2+(y+2)^2=13\\ x=0{,}5-ay\end{cases}$, которая сводится к квадратному уравнению $\left(a^2+1\right)y^2+(7a+4)y+\dfrac{13}{4}=0$. Это уравнение имеет два решение, когда $D=(7a+4)^2-13\left(a^2+1\right)>0$, причем $a<0$. Решая уравнение $36a^2+56a+3=0$, найдем $a=-1{,}5$ и $a=-\dfrac{1}{18}$. Второе значение не подходит при анализе

уравнения. Значит, два решения (а с учетом условия $y<0$ получим 4 решения) будет при $a<-1,5$.
Ответ: $a<-1,5$.

3. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{10x-x^2-8}=|y|+2\\ 14-x=a|y|\end{cases}$$
имеет решения?
Решение. Первое уравнение системы задает две дуги окружности, симметричные относительно оси OX, а второе – два луча, выходящих из точки $A(14;0)$, поэтому ввиду такой симметрии задачу можно решить для $y\ge 0$. Условие для касания или пересечения лучом дуги окружности получается из решения системы уравнений $\begin{cases}(x-5)^2+(y+2)^2=17\\ x=14-ay\end{cases}$, которая сводится к квадратному уравнению $(a^2+1)y^2+(10a+2)y+13=0$. Это уравнение имеет решения, когда $D=(2-9a)^2-68(a^2+1)\ge 0$, причем $a>0$. Решая уравнение $13a^2-36a-64=0$, найдем $a=4$. Значит, решения будут при $a\ge 4$.
Ответ: $a\ge 4$.

4. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{10x-x^2-8}=|y|+1\\ x+8=a|y|\end{cases}$$
не имеет решений?
Решение. Первое уравнение системы задает две дуги окружности, симметричные относительно оси OX, а второе – два луча, выходящих из точки $A(-8;0)$, поэтому ввиду такой симметрии задачу можно решить для $y\ge 0$. Условие для не пересечения или касания лучом дуги окружности получается из решения системы уравнений $\begin{cases}(x-5)^2+(y+1)^2=17\\ x=ay-8\end{cases}$, которая сводится к квадратному уравнению $(a^2+1)y^2+2(1-13a)y+153=0$. Это уравнение не имеет решений, когда $D=(1-13a)^2-153(a^2+1)<0$, причем $a>0$. Решая уравнение $8a^2-13a-76=0$, найдем $a=4$. Значит, решений не будет при $a<4$.
Ответ: $a<4$.

Задача 9 (3 балла)

1. Из куба с целочисленной стороной выпиливается куб также с целочисленной стороной, а также 1115 кубиков единичного объема (направления распила параллельны граням куба). Найти сторону самого большого куба, который можно распилить таким образом.
Решение. Обозначим длину стороны куба, из которого выпиливаются меньшие кубы, за a, а сторону куба (не единичного объема), который выпиливается из исходного куба, обозначим за b. Из условия задачи следует, что $a^3=b^3+1115\cdot 1$. Отсюда сразу следует равенство: $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=1115=5\cdot 223$. Поскольку число 223 – простое, а числа a и b - натуральные, получаем следующую систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases}a-b=5\\ a^2+ab+b^2=223\end{cases}$. Нетрудно заметить, что альтернативный вариант написания системы в

виде $\begin{cases} a-b=223 \\ a^2+ab+b^2=5 \end{cases}$ не дает решений в натуральных числах. Решая первую из приведенных систем, с учетом $a,b\in\mathbb{N}$, получаем: $a=11$, $b=6$.

Ответ: 11.

2. Из куба с целочисленной стороной выпиливается куб также с целочисленной стороной, а также 386 кубиков единичного объема (направления распила параллельны граням куба). Найти сторону самого большого куба, который можно распилить таким образом.

Решение. Обозначим длину стороны куба, из которого выпиливаются меньшие кубы, за a, а сторону куба (не единичного объема), который выпиливается из исходного куба, обозначим за b. Из условия задачи следует, что $a^3=b^3+386\cdot 1$. Отсюда сразу следует равенство: $(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=386=2\cdot 193$. Поскольку число 193 – простое, а числа a и b - натуральные, получаем следующую систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+ab+b^2=193 \end{cases}$. Нетрудно заметить, что альтернативный вариант написания системы в виде $\begin{cases} a-b=193 \\ a^2+ab+b^2=2 \end{cases}$ не дает решений в натуральных числах. Решая первую из приведенных систем, с учетом $a,b\in\mathbb{N}$, получаем: $a=9$, $b=7$.

Ответ: 9.

3. Из куба с целочисленной стороной выпиливается куб также с целочисленной стороной, а также 1115 кубиков единичного объема (направления распила параллельны граням куба). Найти сторону самого большого куба, который можно выпилить таким образом.

Решение. Обозначим длину стороны куба, из которого выпиливаются меньшие кубы, за a, а сторону куба (не единичного объема), который выпиливается из исходного куба, обозначим за b. Из условия задачи следует, что $a^3=b^3+1115\cdot 1$. Отсюда сразу следует равенство: $(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=1115=5\cdot 223$. Поскольку число 223 – простое, а числа a и b - натуральные, получаем следующую систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} a-b=5 \\ a^2+ab+b^2=223 \end{cases}$. Нетрудно заметить, что альтернативный вариант написания системы в виде $\begin{cases} a-b=223 \\ a^2+ab+b^2=5 \end{cases}$ не дает решений в натуральных числах. Решая первую из приведенных систем, с учетом $a,b\in\mathbb{N}$, получаем: $a=11$, $b=6$.

Ответ: 6.

4. Из куба с целочисленной стороной выпиливается куб также с целочисленной стороной, а также 386 кубиков единичного объема (направления распила параллельны граням куба). Найти сторону самого большого куба, который можно выпилить таким образом.

Решение. Обозначим длину стороны куба, из которого выпиливаются меньшие кубы, за a, а сторону куба (не единичного объема), который выпиливается из исходного куба, обозначим за b. Из условия задачи следует, что $a^3=b^3+386\cdot 1$. Отсюда сразу следует равенство: $(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=386=2\cdot 193$. Поскольку число 193 – простое, а числа a и b - натуральные, получаем следующую систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+ab+b^2=193 \end{cases}$. Нетрудно заметить, что альтернативный вариант написания системы в виде $\begin{cases} a-b=193 \\ a^2+ab+b^2=2 \end{cases}$ не дает решений в натуральных числах. Решая первую из приведенных систем, с учетом $a,b\in\mathbb{N}$, получаем: $a=9$, $b=7$.

Ответ: 7.

Задача 10 (4 балла)

1. Из угла прямоугольного бильярда размерами $i \times j$ (где i и j - натуральные числа, $i < j$) катится шар под углом $15°$ к более длинной стенке бильярда. Может ли шар после нескольких отражений от стенок попасть в угол (шар считается точкой)? Ответ обосновать.

Решение. Мысленно предположим, что вместо отражения шара от стенки происходит отражение поля бильярда относительно той же стенки. Тогда шар будет всё время двигаться по прямой (можно считать вправо и вверх). Если бы шар попал в угол после x отражений относительно вертикали и y отражений относительно горизонтали (при размерах поля $i \times j$, при этом x и y - натуральные числа), то тангенс угла наклона линии движения к горизонтали был бы равен $\frac{y \cdot j}{x \cdot i}$ – рациональному числу. В то же время $\operatorname{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$ число иррациональное. Получаем противоречие, поэтому ответ на вопрос задачи: нет.

Ответ: нет, т.к. $\operatorname{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$ - иррациональное число.

2. Из угла прямоугольного бильярда размерами $k \times l$ (где k и l - натуральные числа, $l > k$) катится шар под углом $30°$ к более длинной стенке бильярда. Может ли шар после нескольких отражений от стенок попасть в угол (шар считается точкой)? Ответ обосновать.

Решение. Мысленно предположим, что вместо отражения шара от стенки происходит отражение поля бильярда относительно той же стенки. Тогда шар будет всё время двигаться по прямой (можно считать вправо и вверх). Если бы шар попал в угол после x отражений относительно вертикали и y отражений относительно горизонтали (при размерах поля $k \times l$, при этом x и y - натуральные числа), то тангенс угла наклона линии движения к горизонтали был бы равен $\frac{y \cdot l}{x \cdot k}$ – рациональному числу. В то же время $\operatorname{tg}30° = \sqrt{3}/3$ число иррациональное. Получаем противоречие, поэтому ответ на вопрос задачи: нет.

Ответ: нет, т.к. $\operatorname{tg}30° = \sqrt{3}/3$ - иррациональное число.

3. Из угла прямоугольного бильярда размерами $m \times n$ (где m и n - натуральные числа, $m < n$) катится шар под углом $60°$ к более длинной стенке бильярда. Может ли шар после нескольких отражений от стенок попасть в угол (шар считается точкой)? Ответ обосновать.

Решение. Мысленно предположим, что вместо отражения шара от стенки происходит отражение поля бильярда относительно той же стенки. Тогда шар будет всё время двигаться по прямой (можно считать вправо и вверх). Если бы шар попал в угол после x отражений относительно вертикали и y отражений относительно горизонтали (при размерах поля $m \times n$, при этом x и y - натуральные числа), то тангенс угла наклона линии движения к горизонтали был бы равен $\frac{y \cdot n}{x \cdot m}$ – рациональному числу. В то же время $\operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$ число иррациональное. Получаем противоречие, поэтому ответ на вопрос задачи: нет.

Ответ: нет, т.к. $\operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$ - иррациональное число.

4. Из угла прямоугольного бильярда размерами $p \times q$ (где p и q - натуральные числа, $q > p$) катится шар под углом $75°$ к более длинной стенке бильярда. Может ли шар после нескольких отражений от стенок попасть в угол (шар считается точкой)? Ответ обосновать.

Решение. Мысленно предположим, что вместо отражения шара от стенки происходит отражение поля бильярда относительно той же стенки. Тогда шар будет всё время двигаться

по прямой (можно считать вправо и вверх). Если бы шар попал в угол после x отражений относительно вертикали и y отражений относительно горизонтали (при размерах поля $p \times q$, при этом x и y - натуральные числа), то тангенс угла наклона линии движения к горизонтали был бы равен $\frac{y \cdot q}{x \cdot p}$ – рациональному числу. В то же время $\operatorname{tg}75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ число иррациональное. Получаем противоречие, поэтому ответ на вопрос задачи: нет.

Ответ: нет, т.к. $\operatorname{tg}75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ - иррациональное число.