

## Высшая проба

### Заочный тур – 2017

#### 1.10

На складе имеются баскетбольные и футбольные мячи. Все баскетбольные мячи одинаковы, и все футбольные тоже одинаковы. Известно, что 5 баскетбольных мячей тяжелее чем 4 футбольных, но 11 баскетбольных мячей легче чем 9 футбольных. Найти такое натуральное  $n$ , что 39 баскетбольных мячей тяжелее чем  $n$ , но легче чем  $n + 1$  футбольных мячей.

#### 2.10

Сумма двух положительных несократимых дробей равна  $\frac{106}{91}$ . Чему равна сумма числителей этих дробей, если их знаменатели меньше 91?

#### 3.10

За круглым столом сидят 140 человек. У  $\frac{1}{3}$  всех мужчин правым соседом является женщина, а у  $\frac{1}{11}$  всех женщин правым соседом является мужчина. Сколько мужчин за столом?

#### 4.10

Дан треугольник  $T_1$  со сторонами 3000, 4000, 5000. В него вписана окружность. В неё вписан треугольник  $T_2$  со сторонами, параллельными сторонам  $T_1$ . В него также вписана окружность. В неё вписан треугольник  $T_3$  со сторонами, параллельными сторонам  $T_2$  и т.д. Найти периметр треугольника  $T_5$ . Если ответ не целый, запишите его в виде **десятичной дроби**.

#### 5.10

Сколько целых чисел от 0 до 99999 не содержат двух цифр 7 подряд в своей десятичной записи?

### 6.10

К графику функции  $y = x^3 - 6x^2 + 1$  проведена касательная, имеющая ровно одну общую точку с графиком. Найдите уравнение этой касательной. Приведите уравнение к виду  $y = kx + b$  и запишите в ответ произведение коэффициентов  $b$  и  $k$ . Если ответ не целый, запишите его в виде **десятичной дроби**.

### 7.10

Все делители натурального числа  $n$ , включая 1 и  $n$ , выписали в порядке возрастания:

$1, d_1, d_2, \dots, d_k, n$ , т.е.  $d_1$  — наименьший делитель после 1,  $d_k$  — наибольший делитель после  $n$ . Известно, что  $d_1$  меньше  $d_k$  в 4160 раз. Найти количество делителей числа  $n$ .

### 8.10

Числа  $x_1$  и  $x_2$  являются действительными корнями квадратного уравнения  $x^2 + 10\sqrt{3}x + c = 0$ . Известно, что  $\arctg x_1 + \arctg x_2 = -30^\circ$ . Найдите  $c$ . Если ответ не целый, запишите его в виде **десятичной дроби**.

### 9.10

Найти арифметическую прогрессию максимальной длины, состоящую из простых чисел, лежащих в промежутке  $[100, 300]$ . В ответе укажите наибольшее число в этой прогрессии. Если таких прогрессий несколько, укажите наибольшее число в любой из них.

### 10.10

Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Точки  $A, B, C, D$  расположены по одну сторону от некоторой плоскости  $\alpha$  на расстояниях соответственно 23, 19, 12, 10 от этой плоскости. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости  $\alpha$ . Если ответ не целый, запишите его в виде **десятичной дроби**.