

Высшая проба

Заочный тур – 2017

1.10

На складе имеются баскетбольные и футбольные мячи. Все баскетбольные мячи одинаковы, и все футбольные тоже одинаковы. Известно, что 5 баскетбольных мячей тяжелее чем 4 футбольных, но 11 баскетбольных мячей легче чем 9 футбольных. Найти такое натуральное n , что 39 баскетбольных мячей тяжелее чем n , но легче чем $n + 1$ футбольных мячей.

2.10

Сумма двух положительных несократимых дробей равна $\frac{106}{91}$. Чему равна сумма числителей этих дробей, если их знаменатели меньше 91?

3.10

За круглым столом сидят 140 человек. У $\frac{1}{3}$ всех мужчин правым соседом является женщина, а у $\frac{1}{11}$ всех женщин правым соседом является мужчина. Сколько мужчин за столом?

4.10

Дан треугольник T_1 со сторонами 3000, 4000, 5000. В него вписана окружность. В неё вписан треугольник T_2 со сторонами, параллельными сторонам T_1 . В него также вписана окружность. В неё вписан треугольник T_3 со сторонами, параллельными сторонам T_2 и т.д. Найти периметр треугольника T_5 . Если ответ не целый, запишите его в виде **десятичной дроби**.

5.10

Сколько целых чисел от 0 до 99999 не содержат двух цифр 7 подряд в своей десятичной записи?

6.10

К графику функции $y = x^3 - 6x^2 + 1$ проведена касательная, имеющая ровно одну общую точку с графиком. Найдите уравнение этой касательной. Приведите уравнение к виду $y = kx + b$ и запишите в ответ произведение коэффициентов b и k . Если ответ не целый, запишите его в виде **десятичной дроби**.

7.10

Все делители натурального числа n , включая 1 и n , выписали в порядке возрастания:

$1, d_1, d_2, \dots, d_k, n$, т.е. d_1 — наименьший делитель после 1, d_k — наибольший делитель после n . Известно, что d_1 меньше d_k в 4160 раз. Найти количество делителей числа n .

8.10

Числа x_1 и x_2 являются действительными корнями квадратного уравнения $x^2 + 10\sqrt{3}x + c = 0$. Известно, что $\arctg x_1 + \arctg x_2 = -30^\circ$. Найдите c . Если ответ не целый, запишите его в виде **десятичной дроби**.

9.10

Найти арифметическую прогрессию максимальной длины, состоящую из простых чисел, лежащих в промежутке $[100, 300]$. В ответе укажите наибольшее число в этой прогрессии. Если таких прогрессий несколько, укажите наибольшее число в любой из них.

10.10

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Точки A, B, C, D расположены по одну сторону от некоторой плоскости α на расстояниях соответственно 23, 19, 12, 10 от этой плоскости. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости α . Если ответ не целый, запишите его в виде **десятичной дроби**.